24. ročník, úloha I . S ... *komplexní rychlokvaška* *(6 bodů; průměr 2,92; řešilo 12 studentů)*

a) Uvědomte si, že n-té odmocniny z komplexní jednotky leží na n-úhelníku, a dořešte Bombelliho rovnici $x^3 - 15x - 4 = 0$. Nápovědu naleznete v textu seriálu.
b) Vyjádřete goniometrické součtové vzorce pomocí komplexních exponenciál.
c) Ukažte oprávněnost zanedbání vyšších mocnin v odvození Bernoulliho limity, tj. že do závorky můžeme přidat člen $o(1/N)$.
d) Použijte značení s malým o, abyste vyřešili úlohu, s jakou frekvencí kmitají body hmotnosti m po ose x v Yukawově potenciálu $k\mathrm{e}^{x/\lambda}/x$ kolem rovnovážné polohy.
e) Dokažte, že Čebyševovy polynomy $\cos(n \arccos(x))$ jsou skutečně polynomy. Návod: Uvažujte komplexní jednotku z, která má reálnou část x. Pak se vyšetřovaný výraz rovná reálné části z^n, což musí být polynom, protože odmocniny a imaginární jednotky drží pospolu.

Jakub Michálek a Lukáš Ledvina

Bombeliho rovnice

Připomeňme nejprve nad rámec řešení, jak se dospěje ke Cardanovým vzorcům. Pokud do rovnice v redukovaném tvaru

$$x^3 = 3px + 2q$$

dosadíme $x = a + b$, dostaneme z faktu, že rovnice má platit pro všechna p a q, ekvivalentní soustavu rovnic

$$a^3 + b^3 = 2q\,,$$
$$ab = p\,.$$

Tato soustava je invariantní vůči záměně neznámých, takže nám stačí vypočítat jen jednu z nich. Dosazením druhé rovnice do první a vyřešením kvadratické rovnice zjistíme

$$b^3 = q \pm \sqrt{q^2 - p^3}\,.$$

Ovšem s ohledem na první rovnici v soustavě budou mít řešení opačné znaménko. Dosazením pro původní $x = a + b$ dostaneme Cardanův vzorec.

Dosazením $p = 5$ a $q = 2$ získáme $a^3 = 2 \pm 11\mathrm{i} = (2 \pm \mathrm{i})^3$. Jedním z řešení je tedy $a = 2 + \mathrm{i}$ a $b = 2 - \mathrm{i}$, což dá prozrazený kořen $x = 4$. Kořeny třetí odmocniny leží na rovnostranném trojúhelníku, takže máme další kořeny

$$a' = a\mathrm{e}^{\pm 2\pi/3\mathrm{i}} = (2 + \mathrm{i})\frac{-1 \pm \sqrt{3}\mathrm{i}}{2} = \frac{-2 \mp \sqrt{3}}{2} + (\ldots)\mathrm{i}\,.$$

Pokud si uvědomíme, že x vznikne jako součet čísla a' a čísla komplexně sdruženého, můžeme rovnou psát

$$x = a' + \bar{a}' = 2\mathrm{Re}(a') = (-2 \mp \sqrt{3})\,.$$

Jiným postupem, jak celou rovnici řešit, je vydělení polynomem $x - 4$. Tak dostaneme kvadratickou rovnici, kterou řešíme diskriminantem.

Součtové vzorce

Rozepíšeme nyní $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+y)}$ dvěma způsoby. Jednak lze psát

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+y)} = \cos\left(x+y\right) + \mathrm{i}\sin\left(x+y\right),$$

ale zároveň také

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+y)} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \left(\cos x + \mathrm{i}\sin x\right)\left(\cos y + \mathrm{i}\sin y\right) = \\ &= \left(\cos x\cos y - \sin x\sin y\right) + \mathrm{i}\left(\cos x\sin y + \sin x\cos y\right).\end{aligned}$$

Srovnáním pravých stran dostáváme

$$\begin{aligned}\cos\left(x+y\right) &= \cos x\cos y - \sin x\sin y\,,\\ \sin\left(x+y\right) &= \cos x\sin y + \sin x\cos y\,.\end{aligned}$$

Součtový vzorec pro tangens získáme jednoduše z výše uvedených rozšířením $(\cos x\cos y)^{-1}$

$$\mathrm{tg}\left(x+y\right) = \frac{\cos x\sin y + \sin x\cos y}{\cos x\cos y - \sin x\sin y} = \frac{\mathrm{tg}\,x + \mathrm{tg}\,y}{1 - \mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,y}\,.$$

Hodilo by se ještě dodat, jak získáme vzorce pro $\sin\alpha + \sin\beta$. Nejvýhodnější způsob, jak si vzorce z hlavy vybavit, uvažuje dvě komplexní jednotky e^{α} a e^{β}. Ty leží na kružnici a sečteme je jako vektory podle rovnoběžníkového pravidla. Výsledek bude mít směr $\mathrm{e}^{(\alpha+\beta)/2}$ a velikost $2\cos((\alpha-\beta)/2)$. Hledaný vzorec je pak zřejmě jen imaginární část součinu posledních dvou čísel (směru a velikosti).

Bernoulliho limita a $o\left(1/N\right)$

Naším cílem bude ukázat, že platí

$$\left(1 + \frac{x}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right)\right)^N = \mathrm{e}^x\,,\quad N\to\infty\,. \tag{1}$$

Nejdříve označme $f(N) = o(1/N)$. Z definice malého o platí $Nf(N)\to 0$ pro $N\to\infty$. Provedeme zde malý trik: Budeme počítat dvě vnořené limity místo jedné, tj.

$$(1) = \left(1 + \frac{x}{N} + \frac{Nf(N)}{N}\right)^N = \left(1 + \frac{x + Nf(N)}{N}\right)^N = \mathrm{e}^{x+Nf(N)} \to \mathrm{e}^x\,.$$

Zkuste si promyslet, že pro exponenciálu je takový postup v pořádku. Jde o to ukázat, že maximum rozdílu funkcí e^x a $B_N(x)$ na intervalu $[0,1]$ jde s rostoucím N k nule. Pak se o funkci $B_N(x)$ říká, že lokálně stejnoměrně konverguje k e^x a limity jdou prohazovat.

Kmitání v Yukawově potenciálu

Yukawův potenciál se podobá Coulombovu potenciálu, který zahrnuje klesání síly s druhou mocninou povrchu koule. Yukawův potenciál navíc bere v úvahu, že se interakční částice se vzdáleností rozpadají stejně jako v radioaktivitě.

Budeme uvažovat potenciální energii

$$U(x) = g\frac{\mathrm{e}^{x/\lambda}}{x}\,, \tag{2}$$

kde g je konstanta, kterou nebudeme specifikovat, úměrná jednak konstantě k v potenciálu, jednak veličině charakterizující interakci s částicí (něco jako náboj). Nejdříve je potřeba určit rovnovážnou polohu. Toto je možné pomocí několika metod. První metodou je použití derivace. Má-li f v bodě x_0 minimum, platí $f'(x_0) = 0$. Další hojně používanou metodou porovnávaní funkce f s konstantou. Hledáme nejmenší konstantu C takovou, aby rovnice $f(x) = C$ měla právě jedno řešení. Poslední zde zmíněnou metodou, kterou také použijeme, je rozvedení dané funkce do polynomu s přesností alespoň $o(\delta^2)$ okolo předpokládaného minima[1] x_0. Pokud bude lineární člen nulový, je to ekvivalentní nulové derivaci v tomto bodě (viz definici derivace v druhé kapitole seriálu).

Uvažujme, že minimum je v bodě x_0 a platí $x = x_0 + \delta$ a $\delta \to 0$. Potom potenciální energii (2) platí

$$U(x) = g\frac{\mathrm{e}^{(x_0+\delta)/\lambda}}{x_0+\delta} = g\frac{\mathrm{e}^{x_0/\lambda}}{x_0}\frac{\mathrm{e}^{\delta/\lambda}}{1+\dfrac{\delta}{x_0}}\,.$$

Ve druhém zlomku rozvineme čitatele i jmenovatele do polynomu s přesností $o(\delta^2)$ a obě závorky vzájemně vynásobíme. Jmenovatel je součtem geometrické řady s kvocientem $-\delta/x_0$.

$$\begin{aligned} U(x) &= g\frac{\mathrm{e}^{x_0/\lambda}}{x_0}\left(1+\frac{\delta}{\lambda}+\frac{\delta^2}{2\lambda^2}+o\left(\delta^2\right)\right)1-\frac{\delta}{x_0}+\frac{\delta^2}{x_0^2}+o\left(\delta^2\right) = \\ &= g\frac{\mathrm{e}^{x_0/\lambda}}{x_0}\left(1+\delta\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{x_0}\right)+\delta^2\left(\frac{1}{2\lambda^2}-\frac{1}{\lambda x_0}+\frac{1}{x_0^2}\right)\right)+o\left(\delta^2\right)\,. \end{aligned}$$

Jak jsme uvedli výše, aby měl potenciál minimum, musí být koeficient lineárního členu roven nule. Musí proto platit $x_0 = \lambda$. Pro potenciál proto platí

$$U(x) = g\frac{\mathrm{e}}{\lambda}\left(1+\frac{\delta^2}{2\lambda^2}+o\left(\delta^2\right)\right)\,.$$

Srovnáme nyní potenciální energii $U(x)$ s potenciální energií pružinky, která je $U_\mathrm{t}uh = k\delta^2/2$. Dostaneme tuhost k odpovídající pružinky

$$\hat{k} = \frac{g\mathrm{e}}{\lambda^3}\,.$$

Proto je frekvence kmitání

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g\mathrm{e}}{m\lambda^3}}\,.$$

[1] O minimum jde, pokud první nenulový člen rozvoje bude sudý. Pokud první nenulový bude lichý člen, jedná se o inflexní bod. Samozřejmě museli bychom použít rozvoj s dostatečnou přesností.

Čebyšebovy polynomy

Naším cílem je ukázat, že pro každé n přirozené je $\cos(n \arccos(x))$ polynomem n-tého stupně. Omezme se pro začátek na $x \in \langle 0, 1\rangle$. Označme z komplexní jednotku s argumentem α. Platí tedy $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$. Reálnou část této komplexní jednotky označme x. Platí tedy $x = \cos\alpha$. Budeme uvažovat pouze horní polovinu jednotkové kružnice, tj. $\alpha \in \langle 0, \pi\rangle$.

Studujme nyní výraz $\cos(n \arccos(x))$. Užijeme identity $|\sin\alpha| = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$.

$$\cos(n \arccos(x)) = \cos(n\alpha) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\alpha}\right) = \mathrm{Re}((\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)^n) = \mathrm{Re}\left(\left(x + \mathrm{i}\sqrt{1-x^2}\right)^n\right).$$

Zamysleme se nyní nad výše získaným výrazem. Jaké členy z binomického rozvoje budou reálné a jaké ryze imaginární? Binomická věta nám říká, jak umocňovat dvojčlen na n-tou

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

kde kombinační číslo $\binom{n}{k}$, $k = 0, \ldots, n$ najdeme jako k-té číslo na n-tém řádku Pascalova trojúhelníku. Protože víme, jak se umocňuje komplexní jednotka, víme, že

$$\begin{aligned} 2|k \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{i}^k \in \mathbb{R}, \\ 2 \nmid k \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{i}^{k-1} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Protože člen s odmocninou v reálné části umocňujeme vždy na sudou mocninu, odmocnina vymizí! A celý výraz je tedy polynomem.

Je jasné, že polynom neobsahuje mocniny x větší než n. Stačí dokázat, že koeficient před x je nenulový. Rozpisem příslušných členů v binomickém rozvoji zjistíme, že se koeficient před x^n rovná součtu sudých členů na n-tém řádku Pascalova trojúhelníku. Ale tento součet se z konstrukce Pascalova trojúhelníku rovná součtu celého $(n-1)$-tého řádku, který je 2^{n-1}, což je nenulové číslo.

Tímto jsme ukázali, že

$$\cos(n \arccos(x)) = P_n(x)$$

platí na intervalu $\langle 0, 1\rangle$. V některém dalším díle si ukážeme, že analytická funkce je jednoznačně určena svými hodnotami na množině s hromadným bodem,[2] což je i interval.

Lukáš Ledvina
lukasl@fykos.cz
Jakub Michálek
jmi@fykos.cz

[2]) Hromadný bod je takový, že jeho libovolně malé okolí obsahuje alespoň jeden bod, a tedy i nekonečně mnoho bodů.