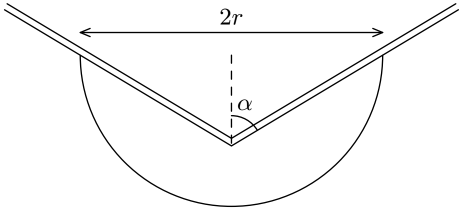
24. ročník, úloha III . 4 ... *rumové ovoce* *(4 body; průměr 2,75; řešilo 8 studentů)*

Uvažujme misku, do které položíme dvě spojená brčka, která mají tvar písmene V. Miska má poloměr r a brčko se smí dotýkat pouze jejích okrajů. Určete nejprve podmínku stability a potom vypočítejte periodu kmitů brčka v souměrné poloze.

Vymyslel Jakub, než se opil během labyrintu.



Obr. 1. Miska s brčky

V řešení budeme o brčkách uvažovat tak, že každé z nich má délku l a hmotnost m. Spojená jsou tak, že svírají úhel 2α. Miska má průměr r. Viz obrázek 1.

Podmínka stability

Aby se véčko z brček nepřeklopilo, musí být jeho těžiště pod osou otáčení. Pokud by bylo nad ní, malá výchylka by způsobila překlopení. Z toho umíme vypočítat podmínku pro délku brčka.

$$\frac{r}{\sin\alpha} \leq l \leq \frac{2r}{\sin\alpha}\,,$$

tj. že se brčko nesmí propadnout do misky (spodní mez) a že těžiště (o kterém předpokládáme, že je v polovině brčka) leží nejvýše na ose rotace.

Další podmínku můžeme klást na úhel spojení. Protože brčka musí mít volný prostor ke kmitání, musí platit $\alpha \geq \pi/4$.

Perioda malých kmitů

Nejprve se podíváme na moment setrvačnosti brček. Pokud tyč rotuje okolo kolmé osy procházející těžištěm, víme, že má moment setrvačnosti

$$J_{\mathrm{T}} = \tfrac{1}{3}ml^2\,,$$

kde m je hmotnost tyče a l je její délka. Tyč, resp. brčko je ale skloněná (o úhel $\pi/2 - \alpha$) od horizontály a také nerotuje okolo osy procházející těžištěm. První problém vyřešíme úvahou, na druhý použijeme Steinerovu větu.

Představme si, že máme tyč, která rotuje okolo šikmé osy procházející těžištěm. Víme, že moment setrvačnosti je součet přes všechny hmotné elementy tyče ze součinu jejich hmotnosti a kolmé vzdálenosti od osy. Tedy tyče jde jen o její průmět do roviny kolmé na osu. Protože jde o jednoduchý útvar, můžeme tak tyč považovat za kratší, s větší délkovou hustotou a hlavně kolmou na osu. Pokud zavedeme úhel odklonu α tak, aby se shodoval s geometrií soustavy brček, bude moment setrvačnosti tyče vůči šikmé ose procházející těžištěm

$$J_0 = \tfrac{1}{12}ml^2\cos^2\alpha\,.$$

Úhel α můžeme vyjádřit jako $\alpha = \pi/2 - \beta$, kde β je menší úhel mezi tyčí a osou.

K tomu, abychom mohli využít Steinerovy věty pro určení momentu setrvačnosti soustavy, potřebujeme znát polohu těžiště. Jsou-li splněny podmínky stability, těžiště se nachází v poloze r_{T} pod osou rotace

$$r_{\mathrm{T}} = \frac{r}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{l}{2}\cos\alpha\,.$$

První člen odpovídá posunu od osy dolů do vrcholu véčka, druhý od vrcholu véčka nahoru do jeho poloviny.

Steinerova věta říká, že moment setrvačnosti tělesa vůči ose rovnoběžné s osou procházející těžištěm (které přísluší moment J_0) vypočteme jako součet J_0 s mr^2, kde m je hmotnost tělesa a r vzdálenost os. Pro případ s brčky tedy vychází

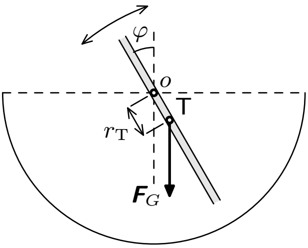
$$J = 2(J_0 + mr_\mathrm{T}^2) = \tfrac{1}{6}ml^2\cos^2\alpha + 2mr_\mathrm{T}^2\,.$$

Číslo 2 je ve vzorci proto, že véčko se skládá ze dvou stejných brček.

Teď už nic nebrání tomu, abychom začali řešit pohybovou rovnici. Použijeme její zápis jako diferenciální rovnici. Nebudeme ji řešit, jen ukážeme podobnost s rovnicí harmonického oscilátoru

$$J\varepsilon = M \quad \Rightarrow \quad J\ddot{\varphi} = M\,.$$

Úhel φ představuje výchylku z rovnovážné polohy (viz obrázek 2).



Obr. 2. Kmitání kolem osy

Moment setrvačnosti jsme již vypočetli, moment síly také není těžké určit

$$M = -2mgr_\mathrm{T}\sin\varphi\,,$$

protože síla budící pohyb je síla tíhová (opět $2m$ kvůli dvojnásobné hmotnosti brček), která působí v těžišti, jehož vzdálenost od osy známe. Ještě si uvědomíme, že malé výchylky umožňují použít aproximaci $\sin\varphi \approx \varphi$ (srovnej graf funkce $\sin x$ a x), a tedy můžeme pohybovou rovnici přepsat do tvaru

$$J\ddot{\varphi} + 2mgr_\mathrm{T}\varphi = 0\,,$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{2mgr_\mathrm{T}}{J}\varphi = 0\,,$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0\,.$$

Napravo dostáváme rovnici harmonického oscilátoru (kyvadla) s úhlovou frekvencí ω^2. Až na označení konstant a proměnných jsou to rovnice naprosto identické a proto můžeme říct, že i véčko z brček je harmonickým oscilátorem a jeho úhlová frekvence je

$$\omega = \sqrt{\frac{2mgr_\mathrm{T}}{J}}\,.$$

Hledanou periodu kmitů vypočteme již jednoduchým převodem ($T = 2\pi/\omega$) a dosazením za r_T a J z předchozích výpočtů.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{g}\left(\frac{r}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{l\cos\alpha\,(2l\sin\alpha - 3r\cos\alpha)}{6r\cos\alpha - 3l\sin\alpha}\right)}\,.$$

Aleš Podolník
ales@fykos.cz