24. ročník, úloha V.3 ... těžký řetěz *(4 body; průměr 2,80; řešilo 10 studentů)*

Řetěz o hmotnosti m a délky l visí svisle těsně nad váhou. Najednou ho upustíme z klidu a začne na váhu dopadat. Jakou váhu bude váha ukazovat v závislosti na tom, jaká délka x již na ni dopadla? Zanedbejte rozměry jednotlivých ok řetězu.

Zobrazovaná váha bude přesně odpovídat síle, kterou bude řetěz na váhu působit. Vypočítejme proto nejdříve, jakou silou na ni působí.

Ta část řetězu, která již na váze leží, bude samozřejmě působit pouze silou tíhovou. Ta se jednoduše vypočítá jako

$$F_1 = gm\frac{x}{l}\,.$$

Dále budou na váhu působit právě dopadající články řetězu, které se o ni budou brzdit. Víme, že síla je rovna změně hybnosti za jednotku času. Můžeme psát

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}\,, \tag{1}$$

kde Δp je změna hybnosti za čas Δt. Hybnost je definovaná jako součin hmotnosti a rychlosti. Protože se oka řetězu zcela zastaví, bude změna hybnosti rovna

$$\Delta p = \Delta m \cdot v\,,$$

kde Δm je hmotnost části řetízku, který dopadne na váhu za čas Δt a v je okamžitá rychlost řetízku. Zřejmě platí

$$\Delta m = m\frac{\Delta x}{l}\,,$$

kde Δx je délka části řetízku, která dopadla na váhu za čas Δt. Tuto délku pak lze vyjádřit jako

$$\Delta x = v \cdot \Delta t\,.$$

Uvedené úvahy dobře platí pro malé časové úseky Δt, během kterých se rychlost řetízku změní jen zanedbatelně. Nyní stačí již jen dosadit za Δp do (1) a získáme vzorec pro druhou složku síly

$$F_2 = \frac{m\frac{v\cdot\Delta t}{l}v}{\Delta t} = \frac{mv^2}{l}\,. \tag{2}$$

Poznámka pro zkušenější řešitele – úvahy uvedené výše lze samozřejmě zcela analogicky provést za použití derivací se stejným výsledkem.

Řetízek dopadající na váhu bude mít stejnou rychlost jako těleso padající volným pádem, které již urazilo dráhu délky x. Ze vzorců pro volný pád

$$v = gt \quad \text{a} \quad x = \frac{1}{2}gt^2\,,$$

dosazením za t získáme jednoduchý vztah

$$v = \sqrt{2gx}.$$

Dosazením do (2) získáme konečný vztah pro F_2

$$F_2 = \frac{2mgx}{l}.$$

Celková síla působící na váhu tedy bude

$$F = F_1 + F_2 = 3mg\frac{x}{l}.$$

Pro určení zobrazované váhy stačí podělit působící sílu gravitačním zrychlením. Získáme výsledek

$$m_v = 3m\frac{x}{l}.$$

Jáchym Sýkora
jachym@fykos.cz