Úvodem

Milí řešitelé!

Právě se k vám dostala první brožurka XXV. ročníku Fyzikálního korespondenčního semináře. Můžete tak řešit další skupinu zajímavých fyzikálních úloh.

Na letní zážitky z kola a koupání vzpomenete ve druhé a třetí úloze. První a čtvrtá úloha jsou nabity elektřinou a nabitá pistole vás čeká v pátém střeleckém problému. Dále se ponoříte do světa představivosti a ocitnete se na hranaté planetě. Ale aby tělo nezahálelo, potrápíte trochu gumové medvídky v rámci experimentální úlohy. Nakonec se do vesmírných výšin vrátíte v úkolech k seriálu, který se letos bude zabývat astrofyzikou a chystá jej pro vás Jana Poledniková.

Novinky letošního ročníku

Nový ročník přináší spoustu změn, nových věcí a aktualit; pojďte se s nimi blíže seznámit.

Bodování

Za první dva příklady (tzv. rozcvičkové úlohy), které budou mít obvykle maximum 2–3 body, budeme studentům z druhých a nižších ročníků SŠ (a odpovídajících ročníků víceletého gymnázia) do celkového hodnocení počítat jako bonus dvojnásobek bodů (tj. maximum pro ně bude 4–6 bodů).

Úspěšní řešitelé

Zavádíme nově diplomy pro tzv. „úspěšné řešitele“. Úspěšný řešitel je takový řešitel, který získal více jak 50 % bodů z maxima v ročníku. Takto vysoká hranice je nastavená zatím kvůli tomu, že diplom úspěšného řešitele bude sloužit i pro **prominutí přijímacích zkoušek na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy**, a je potřeba, aby ji mělo nastavenou na stejnou hladinu více seminářů. Tím ovšem nechceme říci, že řešitelé, kteří na ni nedosáhnou se svými bodovými zisky jsou neúspěšní. Je to jenom další meta, kterou můžete při řešení FYKOSu zdolat a která vám může něco přinést.

Soustředění

Od jarního soustředění se bude zvát striktně podle pořadí semináře z předcházejícího pololetí. Na jarní soustředění se bude zvát podle výsledků prvních tří sérií v aktuálním ročníku a na podzimní podle posledních tří sérií předcházejícího ročníku.

Přednášky

Řešitele z okolí Prahy určitě potěší, že chystáme sérii přednášek na různá triková řešení úloh a zajímavá témata středoškolské fyziky. Budou se konat pravidelně od října jednou za čtrnáct dní v Praze na MFF UK v Troji. Naše přednášky se budou ob týden střídat s Přednáškami z moderní fyziky[1]. Další podrobnosti se objeví včas na stránkách FYKOSu.

[1] Odkaz `http://utf.mff.cuni.cz/popularizace/PMF/`. Naše přednášky budou i ve stejný čas – 18.00.

Zadání I. série

Termín doručení: 12. října 2011 18.00

Úloha I.1 ... Pepiččina žárovička — 2 body

Pepička si koupila žárovičku, dva přepínače a klubko drátu. Jak má žárovičku a přepínače zapojit, aby změnou polohy kteréhokoli přepínače žárovička vždy změnila stav mezi svítí/nesvítí? Jak by to bylo, kdyby chtěla Pepička takto zapojit víc než dva přepínače?

Úloha I.2 ... plavec v řece — 2 body

Plavec se snaží přeplavat řeku, v níž teče voda rychlostí $v_\mathrm{r} = 2\,\mathrm{km/h}$. Sám přitom plave rychlostí $1\,\mathrm{m/s}$. Po jaké dráze a jakým směrem musí plavat, aby se nejméně namohl? V jakém místě a za jak dlouho vyplave na druhý břeh? A co aby jeho dráha byla nejkratší? Šířka řeky je $d = 10\,\mathrm{m}$.

Úloha I.3 ... hustilka — 4 body

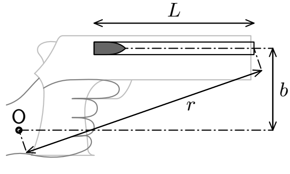
Jakou teplotu má vzduch, který foukáme do duše kola? Duši hustíme na 3 atmosféry, do pumpičky přichází vzduch o teplotě $20\,\mathrm{^\circ C}$.

Úloha I.4 ... drrrrr — 4 body

Mezi dvěma opačně nabitými deskami se sem a tam odráží vodivá kulička zanedbatelných rozměrů. S jakou frekvencí se pohybuje? Napětí mezi deskami je U. Při nárazu se kulička nabije na náboj velikosti Q shodný s polaritou desky. Koeficient restituce je k.
Bonus: Odpovídá výkon na tomto rezistoru energetickým ztrátám při nárazech?
Poznámka: Koeficient restituce je poměr kinetických energií po nárazu a před ním.

Úloha I.5 ... zpětný ráz — 4 body

Při výstřelu z pistole zpětný ráz pistolí trhne a střela vyletí jiným směrem, než kam původně mířila hlaveň. O jak velký úhel se jedná? Uvažujte, že vliv gravitace je po celou dobu výstřelu kompenzován svaly v ruce a bod otáčení je v zápěstí. Znáte moment setrvačnosti pistole s rukou vzhledem k bodu otáčení, hmotnost a úsťovou rychlost projektilu a vzdálenosti popsané v obrázku. Hodnoty těchto veličin můžete zkusit odhadnout a výsledek číselně dopočítat.



Obr. 1

Úloha I.P ... zeměkrychle — 5 bodů

Představte si, že by Země měla tvar krychle. Udržela by si takový tvar? Případně jak asi dlouho by si ho mohla udržet? Na čem by to záviselo? Jak by se na ní žilo? Co by se dělo lidem jdoucím po jejím obvodu – jakou gravitační sílu by pociťovali?

Úloha I.E ... brumlovo tajemství 8 bodů

Změřte co nejvíc (alespoň 3) fyzikálních vlastností a charakteristik želatinových medvídků. Zkoumejte i rozdíly mezi jednotlivými barvami medvídků v pytlíku. Měřit můžete například teplotu tání, Youngův modul pružnosti, mez pevnosti, savost (změna objemu či hmotnosti medvídka po namočení po nějakou dobu), hustotu, vodivost, index lomu, rozpustnost (ve vodě, lihu), změnu některé z předcházejících vlastností při změně teploty či cokoliv jiného vás napadne.

Úloha I.S ... seriálová 6 bodů

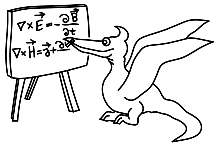
a) Některé hvězdy jsou považovány za obtočné, čili cirkumpolární. Znamená to, že jsou vidět po celý rok? Jaké hvězdy jsou v našich zeměpisných šířkách vidět po celý rok? Jaká souřadnice nám cirkumpolární hvězdy označuje? Jaká je situace u nás, na pólu a na rovníku? Pro ilustraci doporučujeme stáhnout program Stellarium[2], kde si můžete zadat jakoukoliv zeměpisnou polohu a podívat se na jednotlivé situace.

b) Srovnejte absolutní hvězdnou velikost nejjasnější hvězdy letní oblohy, Vegy (α Lyr, 7,76 pc daleko, zdánlivá hvězdná velikost $-0,01\,\mathrm{mag}$), a Betelgeuze (α Ori, 200 pc daleko, zdánlivá hvězdná velikost 0,42 mag). Jak by se nám hvězdy jevily, kdyby si vyměnily vzdálenosti? Diskutujte viditelnosti.

c) Transformace a zase transformace. Zkuste si spočítat transformaci mezi galaktickými a ekvatoriálními souřadnicemi II. druhu. Výrazy nemusíte upravovat do verze uvedené v literatuře.

d) Janap má ve zvyku občas se ztratit. Ona za to nemůže, občas se to stane. Tentokrát však s sebou měla theodolit. Zázračnou krabičku, která umí určit výšku hvězd nad obzorem. Změřila si polohy hvězd Arcturus a Capella a zaznamenala přesný čas. Arcturus měl 123,20 grad v 18:46:30, Capella 113,60 grad v 19:18:30. Kdepak se Janap nacházela? (Nezapomeňte, že výška hvězd je uváděna v gradech, horizont je na úrovni 100 gradiánů, plný úhel je 400 gradiánů).

[2] `http://www.stellarium.org/`, licence GNU GPL, takže program je ke stáhnutí zdarma.



Seriál: Úvod

V letošním ročníku FYKOSího seriálu se budeme věnovat astronomii a astrofyzice. Astronomie je věda stará jako lidstvo samo, v každé kultuře najdete zprávy o lidech, již trávili své večery pozorováním nebes, ať už s úmysly náboženskými, vědeckými či čistě romantickými. Až s vynálezem dalekohledu, fotografické emulze a spektrografů se astronomie mohla stát i astrofyzikou, tedy vědou vysvětlující procesy, jež se odehrávají ve hvězdách.

> Básníci říkají, že věda vzala hvězdám krásu, udělala z nich pouhé koule atomárního plynu. I já se mohu podívat na hvězdy za jasné noci. Ale vidím méně nebo více?
>
> (Richard Feynman)

Zájemci o podrobnější výklad pak vždy mohou sáhnout po učebnicích.

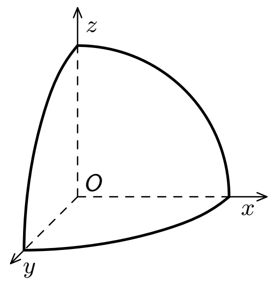
[1] Vanýsek V. *Základy astronomie a astrofyziky.* Praha: Academia, 1980. (Pozor, zejména v modernějších tématech je tato kniha nedostačující a informace v ní uvedené jsou ne vždy korektní.)

[2] Carroll B.W., Ostlie D.A. *An Introduction to Modern Astrophysics (2nd edition).* San Francisco: Pearson Addison-Wesley, 2007.

Případná další literatura bude uvedena v jednotlivých dílech seriálu. Krom toho nezapomeňte sledovat stránky seriálu, kde se občas objeví nějaký textík s doplňujícími informacemi, zajímavostmi nebo věnující se příbuznému tématu.

O souřadnicích, Pogsonovi a vůbec. . .

První díl seriálu bude věnován popisu toho, co na noční obloze můžeme spatřit a jak to můžeme popsat. Pro moderní astronomii, kde se o všechno postará automatizovaný dalekohled, se to může zdát zbytečné, ale člověk nikdy neví, kdy jej život donutí předpovídat z hvězd budoucnost. V takovém případě je fajn vědět, kde která souhvězdí najdeme a jak jejich polohu popíšeme. Podíváme se na zoubek podivným trojúhelníkům s nestandardním součtem vnitřních úhlů, ztransformujeme všechny možné souřednice a nakonec se budeme věnovat veledůležitému logaritmickému vztahu – Pogsonově rovnici.



Obr. 2: Sférický trojúhelník se všemi pravými úhly

Sférická geometrie

V běžném životě se stále a znovu setkáváme s euklidovskou, tedy plochou geometrií. Trojúhelníky se zde chovají slušně a mají součet vnitřních úhlů 180°, vzdálenosti udáváme v běžných délkových jednotkách a nejkratší spojnicí dvou bodů je přímka.

Ve sférické geometrii je tomu docela jinak. Součet úhlů v trojúhelníku je větší než 180° a nejkratší spojnicí bodů jsou části kružnic. Podstatnou roli bude hrát hlavní kružnice, jejíž střed je totožný se středem zemským. Pomocí ní vystavíme souřadnicové systémy. Než se pustíme do samotných souřadnic, podíváme se na základní vztahy sférické geometrie. Je třeba si uvědomit, že vzdálenosti měříme ve stupních a vždy je budeme počítat po kružnici, jejíž obvod je maximální, tedy po hlavní kružnici. Vzdálenosti po hlavní kružnici budeme označovat malými latinskými písmeny, úhly mezi křivkami budeme označovat řeckými písmeny.

Pro sférické trojúhelníky, stejně jako pro rovinné, platí sinová věta

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}\,,$$

kosinová věta pro strany

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

a pro úhly

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a\,.$$

A anomálie sférické geometrii vlastní, sinová-kosinová věta

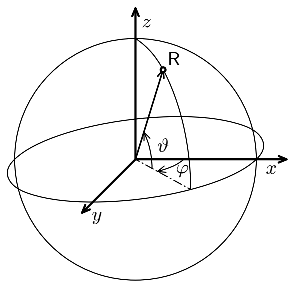
$$\sin a \cos \beta = -\cos c \sin b \cos \alpha + \sin c \cos b\,.$$

Stejně jako v euklidovské geometrii zde můžeme provést aproximaci malých úhlů (v radiánech) $\sin \varepsilon \sim \varepsilon$ a $\cos \varepsilon \sim 1$. Tyto vztahy jsou užitečné zejména, pokud si chceme vyzkoušet spočítat pohyby hvězd na nebeské sféře.

Astronomické souřadnice

Nejvíce v astronomii využívané jsou sférické souřadnicové systémy. Než se dostaneme k samotným astronomickým souřadnicím, ukážeme si, jak vypadá převod z kartézských souřadnic do sférických, který nám později bude nadmíru užitečný:

$$x = r \cos \vartheta \cos \varphi\,,$$
$$y = r \cos \vartheta \sin \varphi\,,$$
$$z = r \sin \vartheta\,.$$



Obr. 3: Sférické souřadnice

Úhly si samozřejmě můžeme určit naprosto libovolně (záleží na vašem náboženství, stejně jak s loupáním banánu, nakonec ale zjistíte, že je dobré preferovat jednu soustavu) a s tím se nám budou měnit i zmíněné transformační vztahy. Nespornou výhodou astronomie je fakt, že o vzdálenost ze středu r se vůbec nemusíme starat, neboť popisujeme pouze nebeskou sféru, tedy nám postačí jednotkový poloměr. r tedy pokládejme za jedničku. Na druhou stranu je nepříjemné, že při používání astronomických souřadnicových systémů a transformací mezi nimi musíme udržet na paměti, zda pracujeme v pravotočivé, nebo levotočivé soustavě.

Abychom se mohli konečně podívat na nejpoužívanější souřadnicové systémy, je třeba si určit také význačné hlavní kružnice (pro nás ty, jejichž střed by ležel v zemském středu). Hlavní kružnice leží v rovinách významných pro souřadnicové systémy.

- Rovník – průmět zemského rovníku na nebeskou sféru.
- Poledníky – spojnice severního a jižního pólu. Kružnice, která Zemi takto obkrouží, má střed ve středu zemském. Důležité jsou pro nás průměty poledníku na nebeskou sféru. Význačné postavení má nultý poledník procházející Greenwichskou hvězdárnou v Anglii.

- Ekliptika – kružnice, po níž se po obloze zdánlivě pohybuje Slunce.
- Galaktický rovník – průmět roviny galaxie na oblohu.

Dalším důležitým pojmem je *jarní bod*. Ten je průsečíkem ekliptiky a průmětu zemského rovníku na oblohu. Takové body jsou dva, v jednom se Slunce nachází v podzimní rovnodennosti (podzimní bod), ve druhém v jarní rovnodennosti. Jarní bod je často označován stejně jako znamení berana ♈, což vede k úvaze, že se nachází v tomto souhvězdí. V důsledku precese zemské osy se posunulo do souhvězdí ryb (správně tedy lidé narození okolo rovnodennosti nejsou berani, ale ryby. . . , ale vzhledem k efektivitě horoskopů můžete klidně číst to, co doposud).

V tuto chvíli jsme již připraveni seznámit se s hlavními systémy souřadnic používaných v astronomii.

Obzorníková/azimutální soustava

Obzorníková nebo též azimutální soustava je spojena s místem pozorování (topocentrická); základní rovinou, ke které vztahujeme měření, je horizont – rovina tečná na místo pozorování.

Hlavní směr je na severní polokouli určen na jih, opisující poledník. Pro zadání jednoznačné polohy nám stačí azimut A, kde $A \in \langle 0^\circ, 360^\circ \rangle$. Výška se měří po poledníku, a je tedy kolmá na horizont – označíme ji h, kde $h \in \langle -90^\circ, 90^\circ \rangle$, horizont leží v poloze 0°.

Krom výšky si můžeme také zavést zenitovou vzdálenost. Zenit nebo také nadhlavník je bod přímo nad pozorovatelem, vztažený k poloze pozorovatele (přímo pod pozorovatelem je pak nadir čili podnožník). Můžeme si zavést parametr zenitová vzdálenost z, což je doplněk výšky do 90°. Soustava je levotočivá a transformujeme dle vztahů

$$
\begin{aligned}
x &= r \cos h \cos A\,,\\
y &= r \cos h \sin A\,,\\
z &= r \sin h\,.
\end{aligned}
$$

Ekvatoriální soustava I. druhu

Soustava je topocentrická. Základním směrem je opět směr na jih po místním poledníku, základní rovinou je rovina rovníku. Soustava je levotočivá. Význačnými body této soustavy jsou průsečíky místního poledníku s rovinou rovníku. Používanými souřadnicemi jsou hodinový úhel t, narůstající směrem na západ, kde $t \in \langle 0^h, 24^h \rangle$ popř. $t \in \langle 0^\circ, 360^\circ \rangle$ a deklinace δ, kde $\delta \in \langle -90^\circ, 90^\circ \rangle$. Pozor, deklinace a výška v azimutální soustavě se zpravidla neshodují. Analogicky k zenitové vzdálenosti si můžeme zadefinovat také pólovou vzdálenost, kterou je doplněk deklinace do 90°.

Dále si můžeme nadefinovat *hodinový úhel hvězdy*, který svírá deklinační kružnice (kružnice, jejíž střed by ležel v zemském středu a její rovina svírá s rovinou rovníku úhel rovný deklinaci hvězdy) proložená hvězdou s místním poledníkem, počítaný ve směru denního pohybu hvězdy. Transformační vztahy pak jsou

$$
\begin{aligned}
x &= r \cos \delta \cos t\,,\\
y &= r \cos \delta \sin t\,,\\
z &= r \sin \delta\,.
\end{aligned}
$$

Ekvatoriální soustava II. druhu

Ekvatoriální soustava II. druhu je zřejmě nejpoužívanější astronomickou soustavou. Je spojena se zemí (geocentrická) a je pravotočivá. Hlavní rovinou je rovník, význačným směrem je směr k jarnímu bodu. Souřadnicemi jsou rektascenze (RA), označená α a deklinace (dec), značená δ. Rektascenze narůstá na východ (tedy proti dennímu pohybu hvězdy, která na východě vyjde a přes den se nám pohybuje na západ), $\alpha \in \langle 0^h, 24^h \rangle$, popř. $\alpha \in \langle 0°, 360° \rangle$, deklinace $\delta \in \langle -90°, 90° \rangle$.

Pól těchto souřadnic je v souhvězdí jednorožce (zkratka Uni). Narozíl od souřadnic I. druhu se tyto souřadnice téměř nemění v čase, což je ideální pro popis polohy nebeských těles. Jak již bylo výše zmíněno, vzhledem k precesi se mění poloha jarního bodu (změna ale není bůhvíjak patrná, opsat precesní kružnici Zemi trvá jeden Platónský rok, což je 22 400 let). Tato změna je relativně malá, proto není třeba ji zahrnovat v každém výpočtu. Podíváme-li se však do astronomické ročenky, zjistíme, že polohy hvězd jsou udávány v J2000. Toto značí tzv. epochu. Znamená to, že dané polohy jsou vypočítány k referenčnímu bodu (pro aktuální epochu byl určen jako pravé poledne greenwichského času 1. ledna 2000). K tomuto bodu jsou vypočítány polohy hvězd. Předchozí epocha byla určena v roce 1950 a předpokládá se, že další bude určena opět v roce 2050. Polohy hvězd se v těchto epochách změní poměrně málo, ale každé zpřesnění polohy výrazně zpřesní astronomické pozorování. Transformační vztahy jsou

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\delta\cos\alpha\,,\\
y &= r\cos\delta\sin\alpha\,,\\
z &= r\sin\delta\,.
\end{aligned}
$$

Ekliptikální soustava

Soustava je geocentrická, pravotočivá, hlavním směrem je směr k jarnímu bodu a za hlavní rovinu je zde považována rovina ekliptiky (s rovinou rovníku svírající úhel $\varepsilon = 23°27'$. Požívané souřadnice jsou ekliptikální délka λ, kde $\lambda \in \langle 0°, 360° \rangle$ a ekliptikální šířka β, kde $\beta \in \langle -90°, 90° \rangle$. Pól této soustavy se nachází v souhvězdí draka (zkratka Dra). Transformujeme podle

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\beta\cos\lambda\,,\\
y &= r\cos\beta\sin\lambda\,,\\
z &= r\sin\beta\,.
\end{aligned}
$$

Galaktická soustava

Galaktická soustava byla definována na základě ekvatoriální soustavy. Hlavní rovinou je rovina, v níž leží průmět roviny galaxie na nebeskou sféru, tedy Mléčná dráha. Soustava je pravotočivá.

Vzhledem k tomu, že se jedná o neohraničený pás na obloze, byla hlavní rovina definována Mezinárodní Astronomickou Unií v roce 1958, tak, že s rovníkem tato rovina svírá inklinační úhel $i = 62{,}6°$. Použité souřadnice jsou galaktická délka l a šířka b. Významným bodem, kde jsou obě souřadnice nulové, je zdroj Sagittarius A* (Sag A*, v ekvatoriálních souřadnicích RA $17^h 45^m 37{,}224^s$ dec $28°56'10{,}23''$ (J2000)), dobře detekovatelný pomocí rádiových dalekohledů, který představuje centrum naší galaxie, tedy supermasivní černou díru. Pól míří do souhvězdí Vlasy Bereniky (zkratka Com). Transformační vztahy jsou

$$x = r\cos b\cos l\,,$$
$$y = r\cos b\sin l\,,$$
$$z = r\sin b\,.$$

Souřadnicových systémů si samozřejmě můžeme zavést mnoho, spojených s libovolným referenčním bodem. (Často se stává, že potřebujete-li ovládat družici, nadefinujete si vlastní soustavu spojenou s její oběžnou dráhou apod. To se však většinou nedostane do světa a je to spíš interní záležitost centra, odkud se družice ovládá. Do databází se dostanou polohy objektů převedené typicky do Ekvatoriální soustavy II. druhu.). V astronomické praxi se však setkáme povětšinou pouze se zmíněnými soustavami. Tip: podívejte se na oblíbenou stránku většiny astronomů `http://simbad.u-strasbg.fr/simbad/sim-fbasic`. Zadáte-li do vyhledávacího pole libovolné jméno hvězdy (kupříkladu Alpha Centauri), vyskočí vám její identifikace, včetně nejpoužívanějších souřadnic (libovolné FK je ekvatoriální soustava II. druhu).

Hvězdný čas

Než se vrhneme na převod jednotlivých systémů souřadnic, zadefinujeme si ještě jeden pojem – *hvězdný čas*. Hvězdný čas je hodinový úhel jarního bodu.

V okamžiku svrchního průchodu průmětu jarního bodu místním poledníkem je $0^h0^m0^s$. Tedy je-li hodinový úhel jarního bodu 15° (čili 1^h), je *místní hvězdný čas* (neplést s hvězdným časem) 1^h a ve své maximální výšce (tzv v kulminaci) se nachází hvězdy s rektascenzí 1^h. Zapadá-li jarní bod, je 6^h hvězdného času, v dolní kulminaci je 12^h hvězdného času.

Z uvedeného příkladu je patrné, že pro určení hvězdného času potřebujeme znát hodinový úhel jarního bodu a rektascenzi hvězdy. Hvězdný čas označíme písmenkem S, místní hvězdný čas písmenkem t a pak platí

$$S = \alpha + t\,.$$

Aby to nebylo tak jednoduché, tak hvězdný den (též siderický), tedy jedno otočení země vzhledem k hvězdám, je jiný než sluneční den (též synodický), který je definován jako doba mezi dvěma průchody slunce místním poledníkem. Siderický den je 23 hodin, 56 minut, 4,091 sekund, kdežto synodický den je 24 hodin. Tento rozdíl vedl k zavedení přestupného roku.

Transformace souřadnic

Celý nápad schovaný za transformací jednoho astronomického souřadného systému na druhý je v podstatě ohromně jednoduchý. Pořád se jedná o sférické systémy, které jsou vůči sobě nějak otočeny. Nejelegantnější způsob, jakým lze najít transformační vztah mezi jednotlivými souřadnými systémy, je pomocí transformačních matic. Avšak ti, kteří nevědí, jak s nimi zacházet, nemusejí věšet hlavu. Stačí jednoduché trigonometrické vztahy pro kosinus rozdílu úhlů atp. (samozřejmě mějme na paměti, že obloukové délky zde vyjadřujeme ve stupních, jsme na sférickém trojúhleníku). Pro milovníky matic je na `http://fykos.cz/serial` přehled matic otočení a příklad jedné souřadnicové transformace.

Bez matic postup není nerealizovatelný, což si můžeme ukázat na příkladu obzorníkového čili azimutálního systému a ekvatoriálních souřadnic I. druhu. Pro jednoduchost budeme souřadnice ekvatoriální značit indexem e a obzorníkové indexem o. Polohu na sféře můžeme v obou případech vyjádřit v kartézských souřadnicích

$$\begin{aligned} x_e &= \cos\delta\cos t\,, \\ y_e &= \cos\delta\sin t\,, \\ z_e &= \sin\delta\,, \\ \\ x_o &= \cos h\cos A\,, \\ y_o &= \cos h\sin A\,, \\ z_o &= \sin h\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Místem, které popisujeme, můžeme beztrestně vést přímku rovinou poledníku, která protne západovýchodní směr v průsečíku x-ových a y-ových os. Díky tomu můžeme popsat polohu bodu v obzorníkových souřadnicích pomocí otočení o zeměpisnou šířku φ vůči ekvatoriálním souřadnicím.

$$\begin{aligned} x_o &= x_e\cos(90^\circ-\varphi) - z_e\sin(90^\circ-\varphi)\,, \\ y_o &= y_e\,, \\ z_o &= x_e\sin(90^\circ-\varphi) + z_e\cos(90^\circ-\varphi)\,, \\ x_e &= x_o\sin(90^\circ-\varphi) + z_o\cos(90^\circ-\varphi)\,, \\ y_e &= y_o\,, \\ z_e &= x_o\cos(90^\circ-\varphi) - z_o\sin(90^\circ-\varphi)\,. \end{aligned}$$

Do druhé trojice rovnic můžeme dosadit vyjádření souřadnic (1).

$$\begin{aligned} \cos\delta\cos t &= \sin h\sin(90^\circ-\varphi) + \cos h\cos(90^\circ-\varphi)\cos A\,, \\ \cos\delta\cos t &= \cos h\sin A\,, \\ \sin\delta &= \sin h\cos(90^\circ-\varphi) + \cos h\sin(90^\circ-\varphi)\cos A\,. \end{aligned}$$

Pokud chceme elegantnější tvar, lze použít zenitovou vzálenost $z = (90^\circ - h)$ a goniometrické identity a vztahy potom přepsat následujícím způsobem

$$\begin{aligned} \cos\delta\cos t &= \cos z\cos\varphi + \sin z\sin\varphi\cos A\,, \\ \cos\delta\cos t &= \sin z\sin A\,, \\ \sin\delta &= \cos z\sin\varphi - \sin z\cos\varphi\cos A\,. \end{aligned}$$

Obdobně pokud bychom dosazovali do první trojice rovnic, dostaneme opačný převod.

Variace na Pogsonovu rovnici

Pogsonova rovnice patří mezi nejzákladnější vztahy v astronomii. Už víme, jak popsat polohu hvězdy pomocí souřadného systému, řekneme si ještě něco o její jasnosti. Řecký astronom Hipparchos si řekl, že pro hvězdy vytvoří stupnici, kde jsou nejjasnější hvězdy označeny číslem 0, méně jasné 1 atp. Tohle dělení dalo základ popisu hvězd, které používáme dodnes. Jasnost hvězdy čili *hvězdnou velikost* (jednotka magnituda mag) máme dvoji. Jedna hvězdná velikost je zdánlivá (též relativní) jasnost, která jasnost objektu popisuje tak, jak ji vidíme ze Země. Druhá, absolutní hvězdná velikost, je jasnost vztažená na vzdálenost 10 parseků[3].

Podle moderní definice zdánlivé hvězdné velikosti je etalonem hvězda Vega ze souhvězdí Lyry (α Lyr), která má zdánlivou hvězdnou velikost 0 mag (podle novějších měření 0,03 mag). Základní vztah, který nám určuje relativní hvězdné velikosti, označené m s patřičnými indexy, je Pogsonova rovnice

$$m_1 - m_2 = -2{,}5 \log_{10} \frac{F_1}{F_2}\,.$$

Člověk se občas zamyslí nad tím, proč je vztah logaritmický. Je to jednoduché – může za to historická definice. Lidské oko vidí v logaritmické škále a tento fakt se přenesl i do základního astronomického vztahu, 2,5 je jen naškálování pro moderní potřeby.

Na pravé straně mohou vystupovat různé veličiny. Výše je uveden vztah se světelným tokem F, který může nahradit také poměr intensit I. Důležitou modifikací Pogsonovy rovnice je modul vzdálenosti. Víme totiž, že světelný tok je nepřímo úměrný kvadrátu vzdálenosti. Za referenční vzdálenost budeme považovat 10 parseků (pc). Výsledkem pak bude absolutní hvězdná velikost

$$m - M = 5 \log_{10} \frac{d}{10\,\mathrm{pc}}\,,$$

$$m - M = -5 + 5 \log_{10} \frac{d}{\mathrm{pc}}\,.$$

Velké M označuje absolutní hvězdnou velikost, malé m pozorovanou a d označuje vzdálenost.

Pro řešitele minulého ročníku vkládáme na závěr řešení experimentální úlohy poslední série loňského ročníku. Všem lačným čtenářům se omlouváme za zpoždění.

Úloha VI.E ... Zeměplocha

8 bodů; průměr 3,25; řešilo 8 studentů

To, že Země není placka, je všeobecně známá věc. Myslím, že jen s obtížemi bychom hledali člověka, který by tvrdil, že Země není kulatá, nýbrž placatá, a zdůvodňoval by to tím, že kdyby přeci jen placatá byla, tak by australani chodili vzhůru nohama... Ale umíme takto samozřejmý fakt dokázat?

Terka J. si ušila bič.

Odraz Slunce na hladině jezera[4]

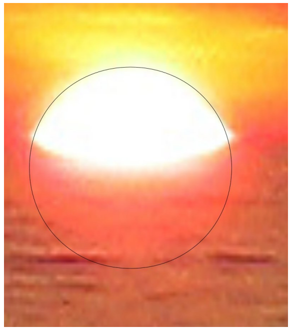
Důkaz toho, že Země není kulatá, nám poskytne pouhá fotografie západu Slunce. Dokonce z ní dokážeme určit i horní odhad zemského poloměru. (Pokud ukážeme, že Země není placka, budeme předpokládat, že nemá žádný jiný tvar – krychle, válec atp. – nebylo by těžké pro každé, které vás napadne, najít argument, proč by takový tvar Země mít nemohla. Pokud vás žádný nenapadne, pak se klidně ozvěte a můžeme si o tom poslat pár mailů.)

Podívejte se na obrázek 5. Zde je zobrazen západ Slunce nad hladinou jezera. Slunce zde vidíme dvakrát – jednou skutečné Slunce a podruhé jeho odraz v hladině. Není jednoduché pořídit takovou fotografii – pokud se podíváte na většinu takových obrázků, odraz se „rozpije“ přes celou hladinu vlivem nerovností na hladině.

[3] O vzdálenostech si budeme povídat příště.

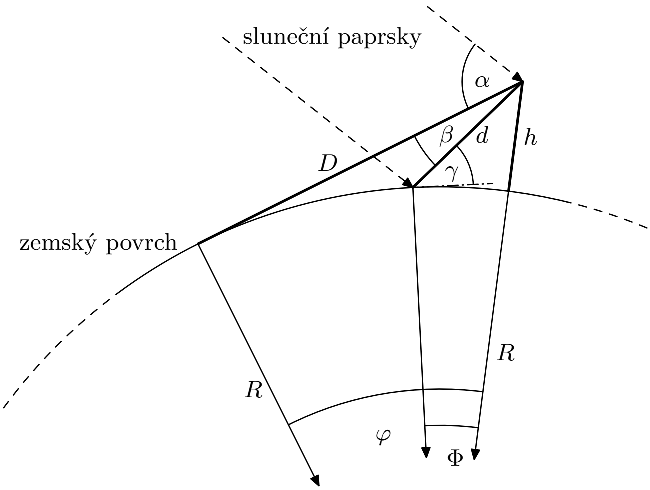
[4] Tuto metodu navrhl a aplikoval Robert J. Vanderbei z Princetonské University. Všechny informace a fotografie jsou zde s jeho svolením.

Obr. 4



Obr. 5

Zde byla hladina jezera dostatečně klidná, takže pozorujeme odraz Slunce zmenšený. Při odečtení patřičných hodnot z obrázku 5 lze pomocí klasické geometrické optiky odhadnout poloměr Země. Hladina jezera se vlastně chová jako kulové zrcadlo o poloměru Země (kdyby Země byla placka, pozorovali bychom odraz nezmenšený); viz obrázek 6, který zároveň definuje veličiny potřebné pro výpočet: 1. R – poloměr Země, 2. h – výšku fotoaparátu nad hladinou vody, 3. D – vzdálenost fotoaparátu od horizontu, 4. φ – úhel příslušný vzdálenosti D, 5. d – vzdálenost místa odrazu a fotoaparátu, 6. Φ – úhel příslušný vzdálenosti d, 7. α – úhel svírající spojnice horizontu a pozorovatele se směrem paprsků Slunce, 8. β – úhel svírající spojnicí horizontu a pozorovatele a spojnicí místa odrazu a pozorovatele, 9. γ – úhel odrazu paprsku.



Obr. 6

Máme tedy devět neznámých veličin, které potřebujeme změřit. Veličinu h odhadneme hodnotou 2,135 m. Z fotografie určíme hodnoty úhlů α a β, přičemž velikost slunečního kotouče je přibližně 0,5°. Při větším rozlišení určíme z obrázku 5, že průměr Slunce je 76 dílů, vršek Slunce je 18 dílů nad horizontem a spodní část odrazu Slunce je 7 dílů pod horizontem. Pak tedy,

$$\alpha = \frac{18}{76} \cdot 0{,}5^\circ \,, \quad \beta = \frac{7}{76} \cdot 0{,}5^\circ \,.$$

Máme tedy už pouze šest neznámých. Zároveň ovšem také šest lineárně nezávislých rovnic snadno odvoditelných z obrázku 6,

$$\begin{aligned} \Phi + \gamma &= \varphi + \beta \,, \\ \alpha &= 2\gamma + \beta \,, \\ R \cos \Phi + d \sin \left(\Phi + \gamma \right) &= R + h \,, \\ R \sin \Phi - d \cos \left(\Phi + \gamma \right) &= 0 \,, \\ R \cos \varphi + D \sin \varphi &= R + h \,, \\ R \sin \varphi - D \cos \varphi &= 0 \,. \end{aligned}$$

Máme tedy systém šesti nelineárních rovnic o šesti neznámých. Numerické[5] řešení v programu Mathematica nese hodnotu

$$R = 5\,500\,\mathrm{km} \,.$$

Pro $\beta < \alpha$, máme $\varphi > 0$ a tedy $R < \infty$. Pro $\beta = \alpha$ je $\varphi = 0$ a R směřuje k nekonečnu, tj. Země by se podobala placce.

Největší nepřesnost měření spočívá v umístění horizontu. Ohyb světla v atmosféře (refrakce) nemá na měření vliv, mění pouze zdánlivou polohu Slunce na obloze, která je pro měření nepodstatná – snímáme Slunce a jeho odraz na hladině, ale na tom přesně v jaké poloze měření nijak neovlivní.

Pokud bychom měli fotografii ve větším rozlišením, byli bychom schopni určit hodnotu poloměru přesněji. Nicméně pouhou fotografií jsme dokázali, že poloměr Země je konečný a přibližně jsme dokázali určit jeho hodnotu, což je podle mne v uvážení „náročnosti“ měření docela působivé.

Tereza Jeřábková
`terkaj@fykos.cz`

[5] Pro malé úhly je možné najít i aproximativní řešení, je však třeba nezanedbat ještě druhé mocniny rozvoje goniometrických funkcí. Numerické řešení je sice méně elegantní, avšak méně pracné a výslednou hodnotu dostaneme s uspokojivou přesností.

FYKOS
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `http://fykos.cz`
e-mail: `fykos@fykos.cz`

FYKOS je také na Facebooku
http://www.facebook.com/Fykos

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.