

Milí řešitelé!

Nezahltla-li se pošta, tak jste ještě před tradiční vánoční nadílkou obdrželi i třetí číslo FYKOSu. Pro rozcvičení se vrátíme do minulých časů parních lokomotiv a parníků, jež ve třetí úloze vystřídá chlouba francouzských inženýrů. Praktická, ještě podzimní, je další úloha, kde pomůžeme s prořezáváním stromů. Naopak čistě teoretická je elektrostatická úloha pátá. Poslední tři úlohy se týkají koulí – Zeměkoule, koulí na hraní a koulí co se „vznášá“ ve vesmíru.

Bystrou mysl při řešení a veselé Vánoce vám přeji

Organizátoři.

Změny v příjmu řešení

Do druhé půlky semináře hodláme aplikovat několik změn, které by nám měly usnadnit zpracování vašich řešení.

Předně bude posunut termín doručení o 22 hodin dříve, tzn. místo obvyklé středy bude dnem doručení úterý a čas osmá hodina večer.

Dále převádíme veškerý příjem elektronických řešení výlučně na webové rozhraní¹ a na e-mailové adrese `fykos-solutions@fykos.cz` budeme přijímat jen dotazy týkající se vašich řešení. Dotazy týkající se nějak vás konkrétně použijte adresu `fykos@fykos.cz`, všeobecné dotazy doporučujeme pokládat do našeho fóra².

Poslední změna se též týká elektronických řešení – nově přijmeme jenom PDF soubory³.

Všechny výše popsané změny budou platné až od čtvrté série, ale můžete se podle nich tréninkově řídit i v aktuální sérii třetí.

Aktuálně

Zdánlivě nedávno (15. prosince) skončila série přednášek k přípravě na fyzikální olympiádu. Zájemci však nemusí zoufat, v přednáškách se chystáme zjara pokračovat.

Slovy marketingových černokněžníků bychom řekli, že za účelem zkvalitnění služeb zákazníkům jsme pro vás připravili dotazník. Vyplnit jej můžete na internetu⁴ a šikovně strategii čeká i drobná výhra.

V budoucnu (2. února 2012) vás zveme na *Jeden den s fyzikou*. Jde o specializovaný den plný přednášek, exkurzí, experimentů – prostě neobvyklé setkání s fyzikou v historických budovách MFF na Karlově nebo v areálu MFF v Tróji. Podrobné informace jsou vyvěšeny na síti⁵.

Jak psát řešení na počítači

Rádi byste psali svá řešení na počítači, ale nevíte, jak si poradit s matematickými klikyháky? Či už je elektronicky píšete, ale nejste spokojeni s jejich vzhledem. Anebo se prostě chcete dozvědět, co je to ten \TeX . Pro všechny z vás jsme připravili stránku o psaní elektronických řešení⁶, kde najdete krátké seznámení s \TeX em, popis jeho instalace a balíček maker (*makra* urychlí práci, vy se můžete věnovat obsahu a starosti o formu přenechat \TeX u), který si též můžete stáhnout z našeho webu⁷.

¹Po registraci na adrese <http://fykos.cz/upload>.

²<http://fykos.cz/diskuse>

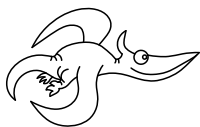
³Pokud píšete řešení na počítači, je obvykle triviální získat výstup i v PDF. Inspiraci hledejte na webu <http://vyfuk.fykos.cz/jak-psat-reseni/elektronicka>.

⁴<http://fykos.cz/dotaznik>

⁵<http://www.mff.cuni.cz/jdf>

⁶<http://fykos.cz/ulohy/elektronicka-reseni>

⁷<http://fykos.cz/doc/fkssolpub.zip>



Zadání III. série



Termín doručení: 18. ledna 2012 18.00

Úloha III.1 ... Wattův regulátor

2 body

Mějme dvě těžké kuličky. Každá z nich je připojena tyčkou do kloubu (z opačných stran). Obě koule se mohou vychylovat pouze v jedné svislé rovině. Celou soustavou začneme otáčet okolo svislé osy procházející kloubkem. Jak závisí odchylna tyček na úhlové rychlosti?

Úloha III.2 ... projížďka po řece

2 body

Představme si řeku přehrazenou hrází. Aby mohly lodě překonávat celý splavný vodní tok, jsou v rámci hráze umístěna zdymadla. Uvažujte, že na řece, která má průtok $Q = 200 \text{ m}^3/\text{s}$, je umístěné zdymadlo, které funguje mezi dvěma vodními hladinami před a za hrází s výškovým rozdílem $H = 4 \text{ m}$ a má rozměry $s = 100 \text{ m}$ a $d = 20 \text{ m}$. Kolik lodí denně může zdymadlo přepravit z nižší nádrže do vyšší (pokud je bere vždy po jedné), pokud maximální průtok vody do a ze zdymadla je $Q_z = 250 \text{ m}^3/\text{s}$?

Úloha III.3 ... train à grande vitesse

4 body

Trat má poloměr oblouku R , vlak má těžiště ve výšce H nad kolejemi s rozchodem D . Jakou maximální rychlostí může po takovéto trati jet vlak, pokud požadujeme, aby se mohl kdykoli zastavit, aniž by spadl na bok? Za jakých podmínek je maximální rychlost neomezená?

Poznámka Zanedbejte síly působící mezi jednotlivými vagony a šířku vagonu vzhledem k poloměru oblouku.

Úloha III.4 ... těžký úděl

4 body

Při řezání stromů musí zahradník počítat s lecjakými problémy. Uvažujme větev připojenou k nepružnému lanu (tj. tuhost roste nade všechny meze) přes kladku. Dole stojí dva brigádníci, kteří jistí větev, aby nespada do bazénu. Větev spadne volným pádem z výšky h , než se provaz napne. Za určitých okolností brigádníci držící druhý konec lana vyjedou tak vysoko, že narazí do kladky. Stanovte podmínky, za jakých bude řezání bezpečné.

Nápověda Uvažujte nejprve chování dvou hmotností na ledě, které jsou spojeny nepružným lanem a mají různé rychlosti.

Úloha III.5 ... zemní roviny

5 bodů

Mějme dvě nekonečně velké vodivé roviny, které jsou obě uzemněné a vzdálené od sebe l . Mezi nimi je umístěn bodový náboj velikosti q ve vzdálenosti x od horní roviny. Určete náboj indukovaný na spodní rovině.

Úloha III.P ... zkroťte Gaiu

5 bodů

Navrhněte způsob, jak přeměnit rotační energii Země na elektrickou energii. Fantazii se meze nekladou, konstruktéři jsou schopní a postaví všechno.

Úloha III.E ... hopík

8 bodů

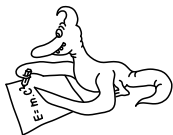
Kutálejte hopík po vodorovné podlaze kolmo proti stěně. Při odrazu od stěny hopík vyskočí. Jak závisí vzdálenost bodu dopadu od stěny na počáteční rychlosti hopíku, případně dalších parametrech?

Poznámka Užitečné informace k úloze naleznete ve studijním textu na internetu⁸.

Úloha III.S ... hvězdný zvěřinec

6 bodů

- Proč je třeba, aby byl molekulární mrak, ze kterého jsou tvořeny hvězdy, chladný? Zkuste odhadnout a zdůvodnit rozumnou teplotu.
- Podíváme-li se na HR diagram některé z hvězdokup, najdeme velký rozptyl okolo hlavní posloupnosti. Jaké jsou způsoby, jak takový rozptyl může vzniknout? Ilustrační obrázek pro hvězdokupu Plejády – M45 – najdete třeba tady⁹.
- Jak dlouho by žila hvězda, kdyby nebyla živena termonukleárními reakcemi, ale jen energií ze smršťování se?
- Planetární mlhovina Helix má průměr $16'$ a nachází se ve vzdálenosti cca 213 pc od Země. Jaký je její skutečný poloměr a jak je stará, pokud se její obálka rozpíná s rychlostí 20 km/s?



Řešení II. série

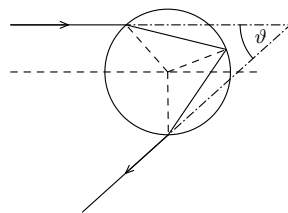
Úloha II.1 ... chromohrátky

2 body; průměr 0,64; řešilo 61 studentů

Jak by vypadala duha, kdyby místo deště ze sladké vody pršel třeba olej, kyselina sírová nebo sklo?

Dominika viděla duhu.

Nejdříve krátce popišme, jak duha vzniká. Většinou ji vidíme v dešti, na který svítí slunce. Za duhu je zodpovědná ta část světla, která se uvnitř kapky jednou odrazí zevnitř o stěnu a poté kapku opustí (viz obrázek 1). Budeme-li zkoumat úhel ϑ , který svírá paprsek vcházející do kapky a paprsek z ní vycházející, zjistíme, že nemůže překročit určitou hodnotu (ϑ_m) závislou na indexu lomu. Z každé kapky tedy vychází kužel takovýchto paprsků, který má vrcholový úhel ϑ_m . K pozorovateli pak tyto paprsky přicházejí pouze od kapek, které se nacházejí uvnitř kužele o vrcholovém úhlu ϑ_m odvráceného od slunce. Intenzita přicházejících paprsků závisí na úhlu, ze kterého přicházejí. Jak se úhel blíží k ϑ_m , roste intenzita k nekonečnu. Graf na obrázku 2 schematicky znázorňuje tuto závislost. Hranice tohoto kužele je tedy velice jasná. Jelikož je voda (jako v podstatě každý materiál) prostředí opticky disperzní, závisí index lomu na vlnové délce. Čím je vlnová délka větší, tím je menší index lomu. Duha vzniká proto, že kužel, ze kterého přichází odražené modré světlo, je menší než kužel, ze kterého přichází červené světlo. Výrazná hranice je jinde pro každou barvu, a proto vidíme duhu.



Obr. 1: Odraz a lom paprsku v kulové kapce

⁸http://fykos.cz/rocnik25/3-e_std-text.pdf

⁹<http://www.astrophysicspectator.com/images/diagrams/PleiadesHRDiagramSup2.jpg>

Protože vnější barva duhy je červená (s nejmenším indexem lomu), můžeme usoudit, že čím menší je index lomu, tím větší je kužel. Pokud by přšel materiál o jiném indexu lomu, byl by daný kužel a tedy úhlový poloměr duhy jiný. Pro vyšší index lomu by byla duha menší.

Vzorec pro ϑ_m není příliš složitý a nadšenci si jej mohou odvodit.

$$\vartheta_m = 4 \arcsin \sqrt{\frac{4 - n^2}{3n^2}} - 2 \arccos \sqrt{\frac{n^2 - 1}{3}},$$

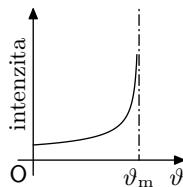
kde n je index lomu.

Pro vodu, která má index lomu 1,33, je $\vartheta_m \approx 42^\circ$. Šedesátiprocentní roztok kyseliny sírové má index lomu 1,41 a $\vartheta_m \approx 32^\circ$. Kdyby přšely kuličky běžného skla o indexu lomu 1,5, byla by duha téměř poloviční – $\vartheta_m \approx 23^\circ$.

Pro upřesnění dodejme, že vzorec výše udává úhel, ve kterém intenzita diverguje a tedy tam vzniká duha. Pro index lomu větší než 1,55 je kužel širší než ϑ_m a duha není na hranici.

Zajímavé je, že pro index lomu větší než 2 již maximum tohoto typu nenastává a duha nevzniká. Kdybychom tedy donutili diamant, aby se zformoval do kuliček a začal přšet, duhu bychom neviděli, protože diamant má index lomu 2,4.

V našem řešení se zabýváme pouze duhou prvního řádu, vznikající díky jednomu odrazu uvnitř kapky. Paprsky, které se uvnitř kapky odrazí vícekrát, dávají vzniknout duhám vyšších řádů, které jsou ale mnohem méně zřetelné. Pro zajímavost uvedeme, že duha druhého řádu (dva odrazy) vzniká pro materiály, jejichž index lomu je menší než 3, tedy i pro diamant.



Obr. 2: Závislost intenzity na úhlu pozorování

Jáchym Sýkora
jachym@fykos.cz

Úloha II.2 ... zelený skřítek

2 body; průměr 1,55; řešilo 64 studentů

Co uvidí člověk, když si stoupne na konec duhy?

Dominika se zadávala do duhy.

Říká se, že poklad; ale už z podstaty věci si člověk na konec duhy stoupnout nemůže. Podrobně je mechanismus vzniku duhy popsán v řešení předchozí úlohy.

Duha je tedy optický úkaz v atmosféře, který většinou vzniká, když na déšť svítí slunce. Dejme tomu, že člověk stojí na vhodném místě a vidí duhu. Pokud vykročí k jejímu konci, už uvidí jinou duhu (pokud budou stále správné podmínky – slunce a déšť ve správném úhlu). Z principu vzniku duhy si na konec své duhy stoupnout nemůže.

Trochu jiná situace by byla, pokud bychom měli zahradní hadici s rozprašovacím nástavcem, svítilo slunce a my kolem sebe vytvořili „déšť“ – viděli bychom duhu, opět o poloměru 42° , se středem ve špičce našeho stínu. Pak bychom duhu viděli jako celou kružnici, takže bychom její konec ani určit nemohli.

Komentář k došlým řešením

Většina z vás měla úlohu dobře. Někteří nás navíc potěšili nějakou legendou nebo pověstí. Veronika Dočkalová projevila realistický přístup: „Kdyby se poklad na tomto místě opravdu nacházel, lidé by se o něj chamtivě prali. Na konci duhy by vznikaly mohutné rvačky, o kterých by jistě referovala nejrůznější media. To, že se v novinách či televizi nic takového neprezentuje,

budíž dostatečným důkazem toho, že dostupné(!) zlato na konci duhy je přinejmenším velmi nereálné.“

Nebo uvidí zhruba půl metru vysokého skřítky, který jim poklad vydá za hádanku – ale protože ji neuhodnou, tak se tím nikde nechlubí a nikdo o tom neví. Podle Lukáše Timka zase na neexistenci možnosti stoupnout si na konec duhy poukazuje nestabilita irské ekonomiky. Nejpraktičtější byl Patrik Švančara: „Člověk 1, který kouká na duhu a na jejím konci vidí člověka 2, mu nemá co závidět, protože člověk 2 leda zmokne.“

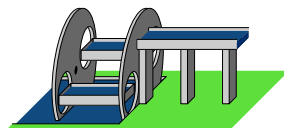
Dominika Kalasová
dominika@fykos.cz

Úloha II.3 ... výtah pro loď

4 body; průměr 2,42; řešilo 50 studentů

V jednom skotském městečku si postavili výtah pro loď. Jde o dvě velké vany plné vody na koncích dlouhého ramena, které je uprostřed zavěšeno. Do vany najede loď a pomocí motoru se začne s ramenem otáčet. Jaký výkon musí mít motor, aby takto loď zvedl?

Petr čtl Technet.



Obr. 3: Lodní výtah

Hneď na začiatku si premyslíme, na čo sa použije výkon v motore.

Trenie v ložiskách nebudeme nejako extra uvažovať, a teda práca, ktorú bude motor konať, bude čisto proti gravitačnej sile. Ak je ťažisko celého výťahu, zatiaľ bez lode, v nejakej vzdialenosti od osi otáčania, tak sa bude jeho výška meniť a bude treba konať prácu. Je teda celkom prirodzené postaviť výtah tak, aby aspoň v nezaťaženom stave bolo ťažisko presne na osi otáčania.

Teraz do komory vpláva plavidlo. Vráta sú pri tom samozrejme otvorené, a teda ostáva hĺbka vody v komore nemenná, len časť tejto vody vytlačí loď von. Vráta sa zavrú a motor ide zdvíhať rameno. Aby sme zistili, aký moment prekonáva, musíme vypočítať posun ťažiska celého výťahu od osi otáčania.

Nejakú masu vody nahradila loď. Potrebovali by sme zistiť hmotnosť tejto vody a polohu jej ťažiska. Stačí si spomenúť na Archimedov zákon v tom hovorenom tvare:

Vztlaková sila pôsobiaca na teleso ponorené v kvapaline je veľkosťou rovná tiaži vody s objemom rovným objemu ponorenej časti telesa.

My samozrejme vztlakovú silu pôsobiacu na teleso, teda loď, poznáme. Musí byť rovná gravitačnej sile, inak by nastalo zrýchlenie vo vertikálnom smere (a loď v záujme pasažierov ani nelieťa, ani sa nepotápa). Zisťujeme, že tiaž vytlačenej vody je rovná tiaži lode, a teda sa rovnajú ich hmotnosti.

Pozrime sa teraz na ťažisko nádrže s vodou a loďou. Lahko si premyslíme, že výslednica vztlakovej sily pôsobí do ťažiska tej časti vody, ktorú loď vytlačila (táto vztlaková sila totiž závisí rovnako ako gravitačná len na hmotnosti daného kúsku, no a výslednica gravitačnej sily pôsobí do ťažiska). Taktiež vidíme, že táto výslednica vztlakovej sily pôsobí na rovnakej priamke ako tiaž. Inak by tieto dve sily mali nejaký moment a to by spôsobilo, na veľké nepohodlie pasažierov, otáčanie lode okolo horizontálnej osi.

Celú situáciu si teraz môžeme predstaviť ako súčet (superpozíciu) troch objektov. Komory plnej vody a bez lode, potom lode a nakoniec toho kusu vody, ktorý loď vytlačila, so zápornou hmotnosťou (čo je pekný a často používaný trik). Rozdiel od situácie, keď v komore chýba loď, je súčet lode a záporne vážiaceho kusu vody. Hmotnosť majú dohromady nulovú, všetko teda

spolu váží rovnako, ako by tam loď nebola. Ťažisko sa však posunie, a to konkrétne trochu klesne (skúste si rozmyslieť prečo, súvisí to so stabilitou lode), ale len vo vertikálnom smere.

Ako sa posunie ťažisko celého výťahu? Ak sa pozrieme na jeho horizontálnu súradnicu, nič sa nezmení. Chýbajúci kus vody mal totiž pri pohľade zhora ťažisko na rovnakom mieste ako loď. Vo vertikálnom smere sa celkovo ťažisko teda trochu posunie, ale nič to. Gravitačná sila totiž bude pôsobiť na vertikále, ktorá prechádza osou otáčania, a jej moment bude nulový.

Môžeme teda bezpečne tvrdiť, že pri dobrom počiatočnom vyvážení výťahu motor nebude musieť prekonávať žiaden moment gravitačnej sily. Jediný výkon sa teda spotrebuje na uvedenie systému do chodu a boju proti treniu v ložiskách. Koho by zaujímalo viac, celý systém existuje a volá sa *Falkirk Wheel*.

Ján Pulmann
janci@fykos.cz

Úloha II.4 ... kulička ve vlaku

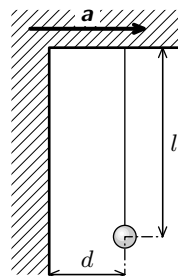
4 body; průměr 2,21; řešilo 52 studentů

Mějme vvislou desku a ve vzdálenosti d od ní kuličku o hmotnosti m na závěsu délky l . V určitém okamžiku se celá soustava začne pohybovat se zrychlením a ve směru kolmém na desku. Určete podmínku pro velikost zrychlení, aby se kulička desky dotkla, a za jak dlouho k tomu dojde, víte-li, že vzdálenost d není větší než jedna pětina l .

Petr si kýval s kyvadélkem osudu.

Díky zrychlení začne v inerciální soustavě spojené s deskou působit na všechny objekty setrvačná síla. Protože bude mít zrychlení stále stejnou velikost, bude v této soustavě na kuličku působit homogenní silové pole silou

$$F = m\sqrt{a^2 + g^2}.$$



Obr. 4

Kulička se tedy bude chovat podobně, jako by byla v gravitačním poli s tíhovým zrychlením o velikosti $\sqrt{a^2 + g^2}$ a sklonu

$$\alpha = \arctg\left(\frac{a}{g}\right)$$

vůči běžnému vvislému směru v tíhovém poli Země. Kulička se tedy začne chovat jako kyvadlo, podobně jako v tíhovém poli Země, pouze s jinými parametry.

Díky tomu, že l je několikrát větší než d , můžeme kyvadlo považovat přibližně za matematické. V okamžiku rozjetí se vlaku bude ve své krajní výchylce. Podmínku pro minimální přípustné zrychlení a_{\min} , aby se kulička dotkla desky, získáme tehdy, když druhá krajní poloha bude právě na desce, tj.

$$\beta = 2\alpha_{\min},$$

kde β je úhel svíraný tíhovým zrychlením g a závěsem kuličky v okamžiku dotyku stěny. Dosazením získáme

$$\arcsin\left(\frac{d}{l}\right) = 2 \arctg\left(\frac{a_{\min}}{g}\right) \Rightarrow a_{\min} = g \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{d}{l}\right)\right).$$

Kulička se dotkne pro jakékoliv zrychlení a větší než a_{\min} mířící od desky směrem ke kuličce.

Počáteční úhlová výchylka kyvadla je α . Pokud hledaný čas t dosadíme do rovnice vyjadřující úhlovou výchylku kyvadla, získáme úhel vyjadřující, o kolik se odchýlí kyvadlo od své klidové polohy. Tomu odpovídá úhlová výchylka

$$\alpha - \beta = \operatorname{arctg} \left(\frac{a}{g} \right) - \arcsin \left(\frac{d}{l} \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{a}{g} \right) \cos \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + g^2}}{l}} T \right).$$

Odtud jen vyjádříme požadovaný čas

$$T = \sqrt{\frac{l}{\sqrt{a^2 + g^2}}} \arccos \left(1 - \frac{\arcsin(d/l)}{\operatorname{arctg}(a/g)} \right).$$

Petr Ryšavý
petr@fykos.cz

Úloha II.5 ... Mikulášovy kučery

4 body; průměr 3,08; řešilo 25 studentů

Lidský vlas má u některých lidí tendenci zaujmout zakroucený tvar. Uvažujme vlas, který má v klidovém stavu dané parametry podobně jako stočená pružinka (poloměr, sklon, materiálové konstanty). Spočítejte, jak se vlas prodlouží, když ho nejprve položíme vodorovně na stůl a potom ho pověsíme svisle dolů. Uvažujte hodně stočený vlas, tj. s malým sklonem.

Jakub studoval vlasy kamaráda.

Protože, dle zadání, má lidský vlas parametry odpovídající pružince, budeme se dále zabývat pouze pružinkou. Naším úkolem je určit, o kolik se prodlouží pružinka vlastní vahou. Víme, že prodloužení pružinky je přímo úměrné jejímu zatížení (konstantu úměrnosti budeme standardně značit k). Abychom mohli vypočítat celkové prodloužení, tak pružinku rozdělíme na N kousků o klidové délce L/N , určíme prodloužení každého z nich a nakonec je všechny sečteme. Budeme předpokládat, že N je veliké.

Označme tuhost celé pružiny k , její délku L a její hmotnost M , pak každý z úseků má hmotnost M/N a k -tý úsek je napínán silou $F_i = Mg(1 - i/N)$, kde g je tíhové zrychlení. Nyní si rozmysleme, jaká je tuhost takového kousku pružiny. Odvodíme si nejprve vztah pro tuhost dvou pružin spojených „za sebou“. Platí

$$\begin{aligned} F_{12} &= F_1 = F_2, \\ \Delta x_{12} &= \Delta x_1 + \Delta x_2, \\ F_i &= k_i \Delta x_i \quad \text{pro } i \in \{1, 2, 12\}. \end{aligned}$$

Jednoduchými úpravami dostáváme $k_{12}^{-1} = k_1^{-1} + k_2^{-1}$, což v našem případě znamená, že tuhost jednotlivých částí pružinky $k_i = kN$. Tato veličina je pro velká N velká, ale to je očekávaný výsledek, protože jednotlivá prodloužení jsou velmi malá.

Nyní již můžeme přistoupit ke spočítání celkového prodloužení. Platí

$$\Delta x = \sum_{i=1}^N \Delta x_i = \sum_{i=1}^N k_i^{-1} Mg(1 - i/N) = \frac{Mg}{kN} \sum_{i=1}^N (1 - i/N). \quad (1)$$

Sumu můžeme upravit následovně

$$\sum_{i=1}^N (1 - i/N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (N - i) = \frac{1}{N} \cdot \frac{N}{2} ((N - 1) + 0) = \frac{N - 1}{2},$$

kde jsme použili vztah pro součet aritmetické posloupnosti. Nyní již stačí pouze dosadit do vztahu (1) a uvážit, že N je veliké, tj. $N - 1 \approx N$ a pro celkové prodloužení dostáváme

$$\Delta x = \frac{Mg}{kN} \frac{N - 1}{2} \approx \frac{Mg}{2k}.$$

Výše uvedený postup pouze obchází nutnost integrování prodloužení přes délku pružinky.

Lukáš Ledvína

lukasl@fykos.cz

Úloha II.P ... výtahová

5 bodů; průměr 2,93; řešilo 56 studentů

Je možné, že se při pádu výtahu člověk před jistou smrtí zachrání dobře časovaným výskokem? Zjistěte, při jaké největší rychlosti pádu by to bylo možné (rychlost výtahu těsně před dopadem, při které již cestující zahynou si vyhledejte nebo odhadněte). *Terka nechtěla zemřít.*

Při pádu ve výtahu se uplatní mnoho faktorů, které naše přežití ovlivňují. Například ve výtahu padajícím volným pádem budeme pocítovat stav beztlíže a odrazit se bude obtížné. Ale na skutečný výtah zase bude působit minimálně odpor vzduchu pod ním a beztlíž nebude tak markantní. Už jednoduchou úvahou je jasné, že abychom si pomohli za všech podmínek, musíme vyskočit těsně před koncem pádu tak, že naše celková rychlost bude nulová (když bereme v úvahu to, že naše hmotnost je srovnatelná s hmotností výtahu, musíme umět vyskočit ještě rychleji). To ale pro velké výšky není v lidských silách ani pro ustálenou rychlost pádu. Nechtědy padáme z menší výšky, kdy aproximace volným pádem nebude vadit. Uvažme také, že se nám podaří odrazit stejně jako na zemi – když pak za těchto lepších podmínek dojdeme k negativnímu výsledku, máme jisté, že při horších tomu bude také tak.

Pokud si nejsme jisti, kde vyskočit, síla našeho odrazu není jediný parametr, který naše eventuální přežití ve výtahu ovlivňuje. Také musíme vzít v úvahu to, kolik prostoru ještě máme pod sebou. Vyšetřujeme tedy závislost konečné rychlosti dopadu člověka na výšce h , ze které výtah začal padat, a bezrozměrném parametru ϱ , který vyjadřuje poměr výšky h_1 , kdy dojde k výskoku, a už definovaného h . Nechtě má výtah hmotnost M a my m .

Předpokládejme, že výtah se utrhł z klidu. Tíhovou silou začne být urychlován směrem dolů a v místě, kde bychom se rozhodli vyskočit, bude mít rychlost

$$v = -\sqrt{2g(h - h_1)} = -\sqrt{2gh(1 - \varrho)},$$

kteřou jsme nabrali i my jako pasažéři uvnitř. Mínus uvádíme proto, že jde o pohyb směrem dolů. V okamžiku průchodu výškou h_1 vyskočíme. Jak popíšeme tuto událost? Uvažme analogii s výskokem z klidu. Bez pomůcek tehdy vyskočíme nejvýše h_0 vysoko. Tedy naše svaly vykonaly práci rovnou potenciální energii v této výšce ($E = mgh_0$). Když teď budeme okamžik výskoku popisovat pomocí zákona zachování energie, můžeme ji přičíst k počáteční kinetické energii.

Když k tomu přidáme zákon zachování hybnosti, umíme vyjádřit rychlost člověka ve výtahu po výskoku (v_c). Vyjdeme tedy z

$$(m + M)v = mv_c + Mv_v \quad \text{a} \quad \frac{1}{2}(m + M)v^2 + mgh_0 = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}Mv_v^2.$$

Z první rovnice (ZZH) si nejdřív vyjádříme v_v (rychlost výtahu po výskoku) a dosadíme do zákona zachování energie. Po úpravách nám vyjde, že

$$v_c = v + \sqrt{\frac{2gh_0M}{m + M}} = \sqrt{2g} \left(\sqrt{\frac{Mh_0}{M + m}} - \sqrt{h - h_1} \right).$$

Ze dvou kořenů kvadratické rovnice jsme si vybrali ten, který odpovídá výskoku směrem nahoru. Druhý popisuje odraz dolů, který v této situaci nemá valného smyslu.

Teď už zbývá jen vypočítat, jakou rychlost budeme mít při dopadu na zem. Uvažujme, že jsme se při výskoku do výtahu stále vešli a dál padáme volným pádem. Už jde v principu jen o svislý vrh vzhůru (nebo dolů, podle toho, jak moc jsme se odrazili). Proto konečná rychlost v_d bude

$$v_d = v_c - gt,$$

kde t je doba, po kterou budeme padat. Tu zjistíme tak, že budeme zkoumat y -ovou souřadnici pohybu. Začínáme z výšky h_1 a padáme do $y = 0$:

$$0 = h_1 + v_c t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Z řešení této rovnice si vybereme kladný kořen, tj. $t = \frac{v_c + \sqrt{v_c^2 + 2gh_1}}{g}$, a po dosazení do rovnice pro rychlost zjišťujeme, že výsledek je

$$v_d = -\sqrt{v_c^2 + 2gh_1} = -\sqrt{2g} \sqrt{\varrho h + \left(\sqrt{\frac{Mh_0}{M + m}} - \sqrt{h(1 - \varrho)} \right)^2},$$

přičemž jsme vztah mezi h a h_1 vyjádřili pomocí ϱ .

Z výsledku vidíme, že nejmenší rychlost, kterou můžeme na zem dopadnout, je taková, kterou bychom nabrali při pádu z výšky výskoku. Docházíme k závěru, že nejhodnější výška pro výskok je 0 m pro libovolné počáteční h . Pokud bychom totiž vyskočili příliš brzo, dáváme volnému pádu možnost srovnat rozdíl rychlostí po poměrně dlouhou dobu. U malých h si tím dokonce pohoršíme, protože dohromady vyskočíme ještě výše, než odkud jsme začali padat. Nejvíce bychom si pomohli, kdyby výtah padal z výšky přibližně h_0 (přesně h_0 by to bylo, kdybychom nic nevážili). Pro $h > h_0$ se bude rozdíl mezi rychlostí dopadu blížít rychlosti výskoku. Když uvážíme, že člověk by mohl přežít pád ze třetího podlaží a že vyskočí asi do 60 cm, efektivně by si přidal necelé patro navíc. Pád z takto malých výšek navíc proběhne tak rychle, že by si padající ani nestihl uvědomit, že padá. Skákat ve výtahu tedy nemá smysl, lepší je zaujmout nějakou vhodnou polohu.

Aleš Podolník
ales@fykos.cz

Úloha II.E ... čočkování

8 bodů; průměr 5,46; řešilo 65 studentů

V obálce jste spolu se zadáním dostali i dvě čočky. Vaším úkolem je změřit jejich parametry – druh a ohniskovou vzdálenost.

Poznámka Pokud nejste stávající řešitelé FYKOSu, ale máte zájem se jimi stát, pak neváhejte a objednejte si čočky až domů. A to s dostatečným předstihem, aby vám stihly dojít včas. Objednávejte na emailu cocky@fykos.cz. *Karel vykradl katedru didaktiky fyziky.*

Každý řešitel obdržel pro změření jinou dvojici čoček, naměřené hodnoty tedy nebudou v tomto řešení uvedeným hodnotám odpovídat.

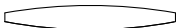
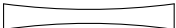
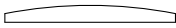



V této úloze budeme uvažovat pouze tenké čočky, tedy takové čočky, jejichž tloušťka je malá oproti křivosti lámavých ploch. Navíc zanedbáme vadu čoček (chromatickou vadu, sférické zkreslení, koma).

Druhy čoček

Existují dva druhy kulových čoček – spojky a rozptylky. Odlišit je od sebe na první pohled je jednoduché, spojky jsou ve středu tlustší než na kraji, rozptylky právě naopak. Další odlišnost získáme pohledem skrz čočku na blízký předmět. V případě spojky bude předmět zvětšen (spojky se používají jako lupy), skrz rozptylku uvidíme předmět naopak zmenšený. Třetí, na první pohled viditelný rozdíl, je v orientaci obrazu. Podíváme-li se skrz spojku na vzdálený předmět tak, abychom jej viděli ostře, budeme předmět vidět převrácený (a zmenšený), zatímco u rozptylky bude přímý (a též zmenšený).

Čočky dále diferencujeme podle jejich tvaru, viz tabulka 1.

Tabulka 1: Rozdělení čoček podle tvaru

Spojky		Rozptylky	
	dvojvypuklá (bikonvexní)		dvojdutá (bikonkávni)
	ploskovypuklá (plankonvexní)		ploskodutá (plankonkávni)
	dutovypuklá (konkávkonvexní)		vypuklodutá (konvexkonkávni)

Kromě kulových čoček existují i jiné druhy: asférické čočky (používané třeba v objektivěch fotoaparátů), Fresnelovy čočky (najdeme je třeba v reflektorech, zpětných projektorech, na majácích apod.) atd. Těmi se však dále nebudeme zabývat.

Výpočet ohniskové vzdálenosti z poloměrů křivosti

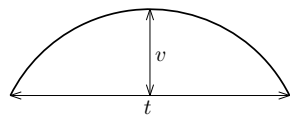
Podaří-li se nám změřit poloměry křivosti R_1 a R_2 obou ploch čočky (pro rovné plochy čoček je střed křivosti v nekonečnu, tedy např. $1/R_1 = 0$) a víme-li, z jakého materiálu je daná

čočka vyrobená (známe tedy index lomu n tohoto materiálu), můžeme ohniskovou vzdálenost f (resp. optickou mohutnost D) této čočky spočítat ze vztahu

$$D = \frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right).$$

Zjistit poloměry křivosti je možné přímo u vypuklých ploch čoček. Upevníme čočku kolmo nad milimetrový papír a čočku z větší vzdálenosti (kvůli omezení vlivu perspektivy) takto kolmo na milimetrový papír vyfotíme. Na fotografii určíme výšku v a délku tětiny t (viz obrázek 5) a poloměr plochy spočítáme jako

$$r = \frac{v^2 + \frac{t^2}{4}}{2v}.$$



Obr. 5: Výpočet poloměru křivosti

Je zřejmé, že tuto metodu můžeme použít pouze u vypuklých ploch čoček. U dutých zakřivených ploch budeme muset použít složitější metodu měření. Využijeme toho, že část světla se na této ploše odráží, a ta se tak chová jako duté zrcadlo. Umístíme-li před takovou čočku předmět, vznikne na téže straně čočky skutečný (tedy převrácený) obraz tohoto předmětu. Ze vzdálenosti předmětu a obrazu od zrcadla dokážeme určit jeho ohniskovou vzdálenost, a tedy i poloměr křivosti.

Nicméně stále neznáme index lomu materiálu, ze kterého je čočka vyrobená, tedy nemůžeme určit její ohniskovou vzdálenost. Tato metoda je tedy vhodná spíše pro určení indexu lomu po změření ohniskové vzdálenosti některou z dalších metod.

Teorie

Budeme používat následující znaménkovou konvenci:

- ohnisková vzdálenost (označovaná f) spojky je kladná, rozptylky záporná,
- předmětová vzdálenost a je vždy kladná,
- vzniká-li obraz na opačné straně čočky, než se nachází zobrazovaný předmět, je obrazová vzdálenost a' kladná,
- vzniká-li obraz na stejné straně čočky, na níž leží předmět, je obrazová vzdálenost a' záporná.

Pro zobrazování tenkými čočkami platí zobrazovací rovnice

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'},$$

kde f je ohnisková vzdálenost čočky, a je vzdálenost předmětu od středu čočky a a' je vzdálenost obrazu od středu čočky. Při použití výše zmiňované znaménkové konvence tato rovnice platí pro zobrazování tenkou spojkou i pro zobrazování tenkou rozptylkou.

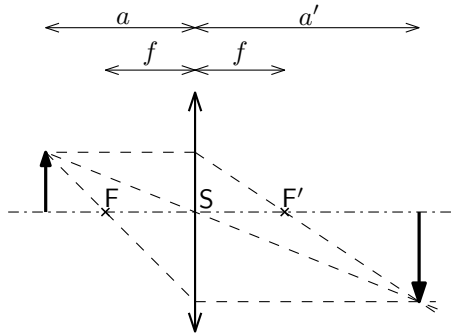
Je vidět, že a a a' můžeme zaměnit, platí tedy princip záměnnosti předmětu a jeho obrazu.

Měření ohniskové vzdálenosti spojky – teorie

Měření pomocí polohy předmětu a jeho obrazu

Po upravení zobrazovací rovnice dostáváme vztah pro ohniskovou vzdálenost (označení viz obrázek 6)

$$f = \frac{aa'}{a + a'},$$



Obr. 6: Měření polohy předmětu a jeho obrazu

tedy pro určení ohniskové vzdálenosti potřebujeme změřit vzdálenost předmětu od optického středu čočky a vzdálenost jeho obrazu od optického středu čočky. Jako předmět můžeme použít například svíčku, kterou umístíme do vzdálenosti a od optického středu čočky. Na opačné straně čočky pohybuje se stínítkem, dokud na něm nedostaneme ostrý obraz svíčky. Poté změříme vzdálenost a' stínítka od optického středu čočky. Pro větší přesnost je vhodné toto měření opakovat pro různé hodnoty vzdálenosti a .

Přímé měření ohniskové vzdálenosti

Ze zobrazovací rovnice je zřejmé, že je-li $a \gg a'$ (paprsky jdoucí od předmětu jsou téměř rovnoběžné), bude platit $f \approx a'$. Pokud jako předmět použijeme např. Slunce, paprsky se spojí přibližně přímo v ohnisku. V tomto případě navíc není třeba zobrazovat žádný předmět – posvítíme-li kolmo do čočky rovnoběžným svazkem dostatečného průměru (např. laserovým), spojí se také v ohnisku.

Besselova metoda

Besselova metoda měření ohniskové vzdálenosti spojky využívá principu záměnnosti chodu paprsků. Zvolíme při ní pevnou vzdálenost d (musí platit $d > 4f$, tedy d volíme dostatečně velké) předmětu a stínítka. Existují dvě polohy čočky mezi předmětem a stínítkem, při nichž se na stínítku zobrazí ostrý obraz předmětu. Vzdálenost s těchto poloh změříme. Všimněme si, že v tomto případě měříme jen změnu polohy čočky, nikoliv absolutně její polohu, čímž eliminujeme chybu určení optického středu čočky.

Zvolíme-li označení podle obrázku 7, platí $a_1 = -a'_2$ a $a'_1 = -a_2$. Dále s ohledem na znaménkovou konvenci platí

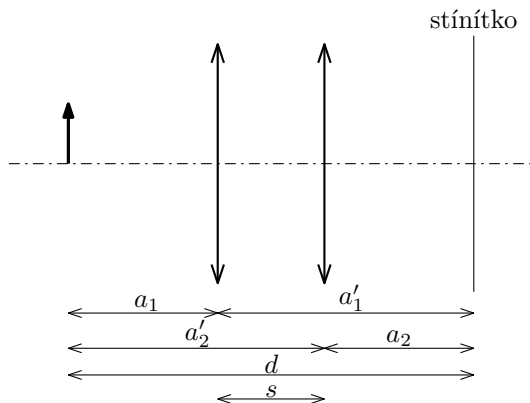
$$\begin{aligned} d &= a'_1 - a_1 = a'_2 - a_2, \\ s &= a'_1 - a'_2, \end{aligned}$$

odkud

$$a'_1 = -\frac{1}{2}(d + s), \quad a_1 = \frac{1}{2}(d - s),$$

z čehož již můžeme spočítat ohniskovou vzdálenost

$$f = \frac{d^2 - s^2}{4d}.$$



Obr. 7: Schématické znázornění Besselovy metody

Měření pomocí zvětšení

Změřit ohniskovou vzdálenost čočky je možné i pomocí určení jejího zvětšení. Pro zvětšení Z platí

$$Z = -\frac{a'}{a} = -\frac{f}{a-f},$$

odkud

$$f = \frac{a'}{1+Z} = \frac{aZ}{1+Z}.$$

Zvětšení zjistíme jako poměr velikostí předmětu a obrazu, tedy jako předmět zvolíme např. milimetrové měřítko a stínítko též opatříme milimetrovým měřítkem. Jestliže se n dílků stupnice na stínítku kryje s n' dílky zobrazované stupnice, zvětšení určíme jako $Z = n/n'$.

Měření ohniskové vzdálenosti spojky – experiment

Nyní k samotnému experimentu. Měřena byla ohnisková vzdálenost neznámé tenké spojky podobné těm, které byly rozesílány spolu se zadáním. Pro měření byla použita Besselova metoda. Pro několik různých vzdáleností d předmětu (čelovky) od stínítka (zdi) byly hledány takové polohy spojky, kdy se na zdi zobrazil ostrý obraz diod čelovky. Byly změřeny vzdálenosti a'_1 a a_2 (označení viz obrázek 7). Jelikož nás zajímá pouze rozdíl těchto vzdáleností, byly měřeny od okraje čočky, čímž jsme se vyhnuli chybě při určování optického středu čočky. Z naměřených hodnot pak byla určena ohnisková vzdálenost měřené čočky na $(28,1 \pm 0,6)$ cm.

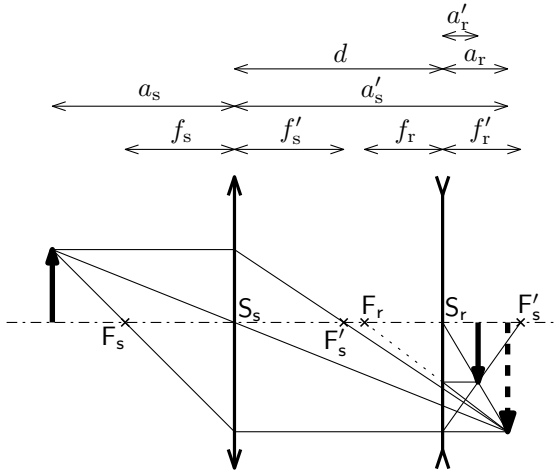
Měření ohniskové vzdálenosti rozptylky – teorie

Změřit ohniskovou vzdálenost rozptylky není možné pomocí vzdálenosti obrazů, jelikož obraz zobrazený rozptylkou není skutečný, nelze jej tedy zachytit na stínítku. Využijeme principu záměnnosti předmětu a jeho obrazu. Vytvoříme spojkou skutečný obraz, který bude sloužit jako zdánlivý předmět pro zobrazení rozptylkou. Ta pak vytvoří skutečný obraz, lze jej tedy zachytit na stínítku (chod paprsků viz obrázek 8).

Tabulka 2: Naměřená data pro určení ohniskové vzdálenosti spojky

n	$\frac{d}{\text{cm}}$	$\frac{ a'_1 }{\text{cm}}$	$\frac{ a_2 }{\text{cm}}$
1	230	197	33
2	220	187	34
3	210	177	34
4	200	166	34
5	190	156	34
6	180	145	35

n	$\frac{d}{\text{cm}}$	$\frac{ a'_1 }{\text{cm}}$	$\frac{ a_2 }{\text{cm}}$
7	170	134	35
8	160	123	36
9	150	112	37
10	140	102	38
11	130	89	41
12	120	76	44



Obr. 8: Schématické zobrazení soustavy spojky a rozptylky

Z obrázku je zřejmé, že platí $a_r = d - a'_s$ (vzdálenost a_r je dle zmiňované znaménkové konvence záporná). Dosadíme-li do zobrazovací rovnice, dostáváme vztah pro výpočet ohniskové vzdálenosti rozptylky

$$f_r = \frac{a'_r a_r}{a_r + a'_r} = \frac{a'_r (d - a'_s)}{d - a'_s + a'_r}.$$

Máme dvě možnosti, jak postupovat při měření. Můžeme změřit vzdálenost a'_s , tedy vzdálenost ostrého obrazu na stínítku od spojky. Poté mezi stínítko a spojku umístíme rozptylku. Dále pohybem rozptylky (ne ve všech polohách rozptylky vzniká obraz) a stínítkem nalezneme ostrý obraz a změříme vzdálenosti a'_r (vzdálenost obrazu od spojky) a d (vzdálenost spojky a rozptylky).

Druhou možností je změřit pouze vzdálenosti a_r a a'_r . Opět je vhodné měření opakovat pro různé a_s a d .

Měření ohniskové vzdálenosti rozptylky – experiment

Popisovanou metodou byla měřena ohnisková vzdálenost tenké rozptylky. Jako předmět byla opět použita čelovka a hledal se ostrý obraz diod. Všechny vzdálenosti byly měřeny právě od diod čelovky. Nejdříve byla do určité vzdálenosti a_s vložena spojka a změřena vzdálenost $a_s + a'_s$. Poté byla mezi spojkou a ostrý obraz vložena rozptylka do vzdálenosti $a_s + d$ a byla změřena vzdálenost $a_s + d + a'_r$ ostrého obrazu vytvořeného rozptylkou od předmětu. Z naměřených hodnot byla určena ohnisková vzdálenost měřené rozptylky na $(-12,0 \pm 1,1)$ cm. Je vidět, že chyba měření je v tomto případě velká, protože jsme měřili čtyři vzdálenosti, což bylo v podstatě zbytečné (stačilo změřit vzdálenosti a_r a a'_r), a všechny byly zaokrouhleny na centimetry.

Tabulka 3: Naměřená data pro určení ohniskové vzdálenosti rozptylky

n	$\frac{a_s}{\text{cm}}$	$\frac{a_s + a'_s}{\text{cm}}$	$\frac{a_s + d}{\text{cm}}$	$\frac{a_s + d + a'_r}{\text{cm}}$
1	50	89	80	113
2	50	89	82	99
3	50	89	84	93
4	60	94	87	105
5	60	94	90	96
6	60	94	91	95
7	70	102	92	137
8	70	102	94	116
9	70	102	95	111
10	80	110	100	153
11	80	110	102	126
12	80	110	105	114

Diskuse a chyby měření

Při měření ohniskové vzdálenosti čočky většinou měříme vzdálenosti, které při popisovaných měřeních nabývají hodnoty od několika centimetrů až po několik metrů. Je vidět, že zvolíme-li větší vzdálenosti, chyba měření bude menší.

Abychom měření zpřesnili, je třeba měření opakovat pro různé počáteční podmínky (např. pro různé vzdálenosti předmětu od čočky při měření ohniskové vzdálenosti spojky pomocí polohy předmětu a jeho obrazu). Z každého měření spočítáme ohniskovou vzdálenost, určíme aritmetický průměr a odchylku.

U některých popisovaných metod je třeba měřit vzdálenosti od optického středu čočky. Ten však nemusí být vždy jednoduše přesně určitelný. U měření ohniskové vzdálenosti spojné čočky tuto chybu eliminuje Besselova metoda, u níž měříme pouze změnu polohy čočky. V popisované metodě měření ohniskové vzdálenosti rozptylky je však třeba polohu optického středu odhadnout. Pro přesnější měření ohniskové vzdálenosti rozptylky je možné použít spojkou, jejíž ohniskovou vzdálenost známe nebo jsme ji změřili přesnější metodou.

Tomáš Pikálek
pikos@fykos.cz

Úloha II.S . . . vzdálenosti a černé těleso 6 bodů; průměr 2,41; řešilo 27 studentů

- a) Absolutně černé těleso z definice pohltí všechno světlo, co na něj dopadne, a ve všech vlnových délkách. Zároveň je to ideální zářič s charakteristickým spektrem. Můžeme si ho představit třeba jako temné okno domu. Slunce však na první pohled energii pouze vydává. Jak je tedy možné, že jeho záření lze v prvním přiblížení aproximovat absolutně černým tělesem?
- b) V textu jsme vyjádřili Planckovu funkci jako funkci vlnové délky a teploty. Zkuste ji vyjádřit v závislosti na teplotě a frekvenci. Dokažte, že pro velké vlnové délky a vysoké teploty Planckova funkce přechází v Rayleighův-Jeansův zákon $B_\lambda(T) = 2ckT/\lambda^4$ a naopak ve Wienův zákon $B_\lambda = 2hc^2/\lambda^5 \exp(-hc/\lambda kT)$ pro nízké teploty a malé vlnové délky.
- c) Kruh, který napozoroval Hubbleův vesmírný dalekohled v supernově SN1987A, má podél hlavní poloosy úhlový průměr $1,66''$. Má jít o cirkulární objekt, který je díky natočení vůči nám pozorován jako elipsa. Světlo ze vzdálenější části elipsy doletělo k Zemi o 340 dnů později než z bližšího konce. Proměřte fotografii¹⁰, určete úhel natočení vůči pozorovateli a zkuste spočítat poloměr kruhu. S pomocí trigonometrie určete vzdálenost objektu.
- d) Pro určení červeného posuvu se zpravidla používají spektrální čáry vodíku. Odhadněte, do jaké hodnoty červeného posuvu z se pomocí spekter můžeme dostat. Zkuste zjistit (nebo navrhnout), jak se měří z u vzdálenějších objektů.

Absolutně černou magii pěstuje Janap.

Černé těleso

Pro odpověď na tuto otázku se stačí zamyslet nad definicí absolutně černého tělesa (dále AČT) a nad tím, jak se asi sluneční záření od záření AČT liší. Podíváme-li se na spektrální distribuci slunečního záření, zjistíme, že křivka AČT je narušena pouze absorpčními čarami. Pokud Slunce vyzařuje jako AČT, musejí být procesy vyzařování a absorpce zcela v rovnováze. Když se podíváme na Slunce detailněji, zjistíme, že jeden foton, který unikne ze slunečního jádra, má před sebou dlouhou cestu, kdy je opakovaně pohlčen, vyzářen, rozptýlen, což mu prodlouží cestu na cca 40 000 let. Pokud je každý foton takto po cestě absorbován a vyzařován, ve velkém měřítku nakonec vidíme rovnováhu, tedy AČT. A kde se vezmou absorpční čáry (kupříkladu ty Fraunhoferovy)? Dokud je plyn ve Slunci dost teplý, rovnováha funguje, ale jakmile se dostaneme ke vnějšímu okraji Slunce, plyn už tak horký nebude a bude pouze absorbovat.

Chování Planckovy funkce

Pro vyřešení této úlohy se potřebujeme pouze pár matematických triků a dobrý úsudek. Základem bude napsat si Planckův vyzařovací zákon

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1}.$$

Pokud tento zákon chceme vyjádřit v závislosti na teplotě a frekvenci, musíme si uvědomit, že musí platit nejenom globálně, ale i lokálně. Lokální platnost nám napovídá, že bude třeba derivovat a využít pravidla derivace složené funkce, které říká

$$\frac{\partial B}{\partial \nu} = \frac{\partial B}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \nu}.$$

¹⁰http://www.stsci.edu/~inr/observ/dpics/SN1987A_Rings.gif

$$B_\lambda(T)|d\lambda| = B_\nu(T)|d\nu|,$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \Rightarrow d\lambda = -\frac{c}{\nu^2}d\nu,$$

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}.$$

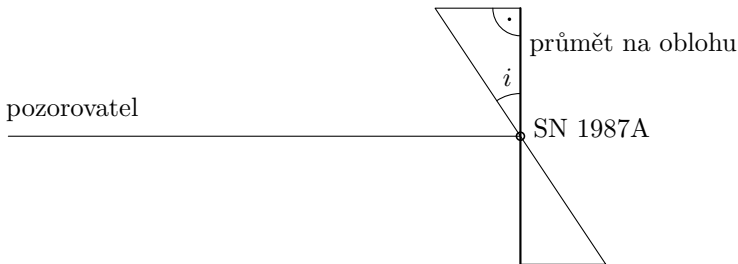
Splňuje Planckova funkce pro dlouhé vlnové délky Rayleighův-Jeansův zákon? Pro dlouhovělné záření platí $\lambda k_B T \gg hc$. Podíváme-li se výše na argument exponenciály, zjistíme, že je blízký nule. Zkusíme tedy provést Taylorův rozvoj okolo nuly

$$\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) \approx 1 + \frac{hc}{\lambda k_B T}.$$

Tento výraz dosadíme namísto exponenciály a po jednoduchých úpravách získáme tvar $B_\lambda(T) = 2ckT/\lambda^4$. Pro Wienův zákon je situace ještě jednodušší. λ je malé číslo, tudíž exponent je číslo velké. V tom případě tedy můžeme zanedbat odečítanou jedničku a výsledkem je Wienův zákon $B_\lambda = 2hc^2 \exp(-hc/\lambda kT)/\lambda^5$.

Hubbleův teleskop

Uvědomíme si, jaké informace jsou nám známé. Úhlový průměr a fakt, že se jedná o dokonalý kruh, který je díky geometrii pozorování zdeformovaný na elipsu. Bude se nám hodit hlavně informace, že jde o dokonalý kruh. Máme štěstí, neboť známe alespoň úhlový průměr hlavní poloosy. Vytiskneme si obrázek, proměříme hlavní poloosu, proměříme vedlejší poloosu a jednoduchou trojčlenkou určíme její úhlový průměr (spíše pro zajímavost, stačí nám poměr). Ted můžeme z jednoduché geometrické představy určit inklinanční úhel – úhel natočení.

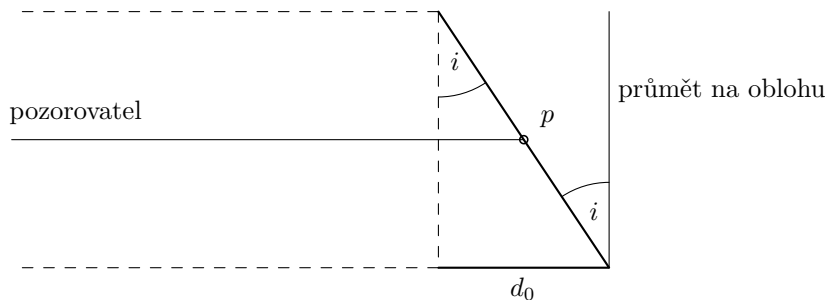


Obr. 9: Zkosení vlivem nepřímého pohledu

Dále se nám hodí znát skutečný průměr kruhu, jinak se nám vzdálenost bude počítat poměrně špatně. K tomu využijeme znalost rychlosti světla c a zpoždění detekce o 340 dnů, která je uvedena v zadání. Opět si pomůžeme jednoduchou trigonometrií.

Jakmile známe průměr kruhu, jsme za vodou a můžeme počítat vzdálenost.

A jak to vypadá číselně? Velikost obrázku samozřejmě závisí na tiskárně, popřípadě na zobrazení monitoru. Pro jeden konkrétní případ byla velká poloosa 51 mm, malá poloosa 37 mm.



Obr. 10: Zpoždění signálu z protějších konců disku

K určení inklinančního úhlu můžeme použít úhlový průměr nebo jen poměr naměřených velikostí. Můžeme napsat

$$\cos i = \frac{\text{malá poloosa}}{\text{velká poloosa}} = 43,49^\circ.$$

Zpoždění je $t = 340$ dnů, rychlost světla c , opožděnou vzdálenost označíme d_o , průměr p . Z geometrické představy vidíme, že

$$\begin{aligned} \sin i &= \frac{d_o}{p}, \\ d_o &= ct, \\ p &= \frac{ct}{\sin i}, \\ p &\approx 1,5 \cdot 10^{16} \text{ m}. \end{aligned}$$

Se znalostí průměru kruhu nakonec vypočítáme samotnou vzdálenost $d = p/\text{velká poloosa} = 61,7$ kpc. Vzdálenost můžeme zkusit porovnat se skutečnou naměřenou hodnotou. Podíváme-li se třeba na Wikipedii či do odborných článků, zjistíme, že skutečná vzdálenost je $(51,2 \pm 3,1)$ kpc (Panaglia et al. 1991 & erratum 1992). Metoda použitá v článku byla taktéž založena na geometrii, nicméně v jejich případě byly stanoveny přesnější parametry kruhu (už inklinanční úhel se liší, neboť správná hodnota je $(42,8 \pm 2,6)^\circ$).

Červený posuv

Úloha je zaměřená hlavně na vyhledání všemožných informací. Spíše než nad principem se musíme zamyslet nad limitem technologie. Oblíbená spektrální čára většiny astronomů je poměrně výrazná čára Balmerovy série vodíku H_α , která sama o sobě je poměrně červená (656,281 nm). Co když ji posuneme třeba na $z = 9$?

Z jednoduchého vztahu

$$1 + z = \frac{\lambda_{\text{pozorovaná}}}{\lambda_{\text{emitovaná}}},$$

zjistíme, že jsme desetkrát natáhli vlnovou délku, na které bychom takovou spektrální čáru pozorovali. Zkusme najít, jaké extrémní vlnové délky umějí pozorovat naše dalekohledy. Kupříkladu z Wikipedie zjistíme, že takové vlnové délky jsou považovány za střední infračervené (mid

IR). Takové vlnové délky by mohl pozorovat třeba Spitzerův vesmírný dalekohled. Kde je háček? Uvažovali jsme ideální případ. V reálném případě je mezi námi a naším zdrojem hromada vesmírného smetí a prachu, který rád zrovna infračervenému záření cloní. Připočtíme pak fakt, že intenzita záření klesá s druhou mocninou vzdálenosti. Objekty s takovým červeným posuvem se nám budou odhalovat hodně špatně.

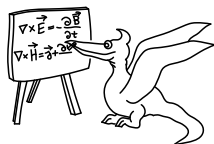
Pokud se poohlédneme po internetových vodách, zjistíme, že nejbližší objekt, který má spektroskopicky změřený červený posuv, má $z = 8,55$. V tomto případě se měření neprovádí pomocí H_α , ale pomocí vodíkové čáry Lymanovy série, Ly_α , která má laboratorní vlnovou délku 121,7 nm. Zatímco H_α je přechod ze 3. na 2. energiovou hladinu, Ly_α je přechod z 2. na 1. hladinu. Zmíněný objekt se jmenuje *UDFy-38135539* (Ultra Deep Field) a byl pozorován pomocí spektrografu SINFONI na Very Large Telescope (VLT) v Chile. Aby bylo spektrum takového objektu co k čemu, muselo se exponovat okolo 14 hodin, což není proveditelné pro každý objekt.

Řekněme tedy, že v ideálním případě jsme schopni pozorovat objekt do $z = 9$. Ve skutečnosti je takové pozorování zatíženo výraznou chybou. Objektů nad $z = 8$ je pomálu, nad $z = 7$ to také slavné není. Obtížné je získat i $z > 6$. Rozumným odhadem bude cca 50% nejvyššího naměřeného červeného posuvu.

A co se dá dělat, když spektrum nestačí? Nastoupí tzv. fotometrický červený posuv. Využijeme toho, že snímání oblohy v různých filtrech o známých vlnových délkách je vlastně vytváření spektra s velmi nízkým rozlišením. Pozorováním určitého typu objektu v různých funkcích můžeme zkusit odhadnout, jak se takový objekt bude chovat posunutý do červené části spektra. Tato metoda však obecně dává vyšší červené posuvy.

Všeobecná poznámka k řešení V případě, že jste si rozumně obhájili nějakou reálnou hodnotu červeného posuvu, body jste dostali.

Jana Poledníková
janap@fykos.cz

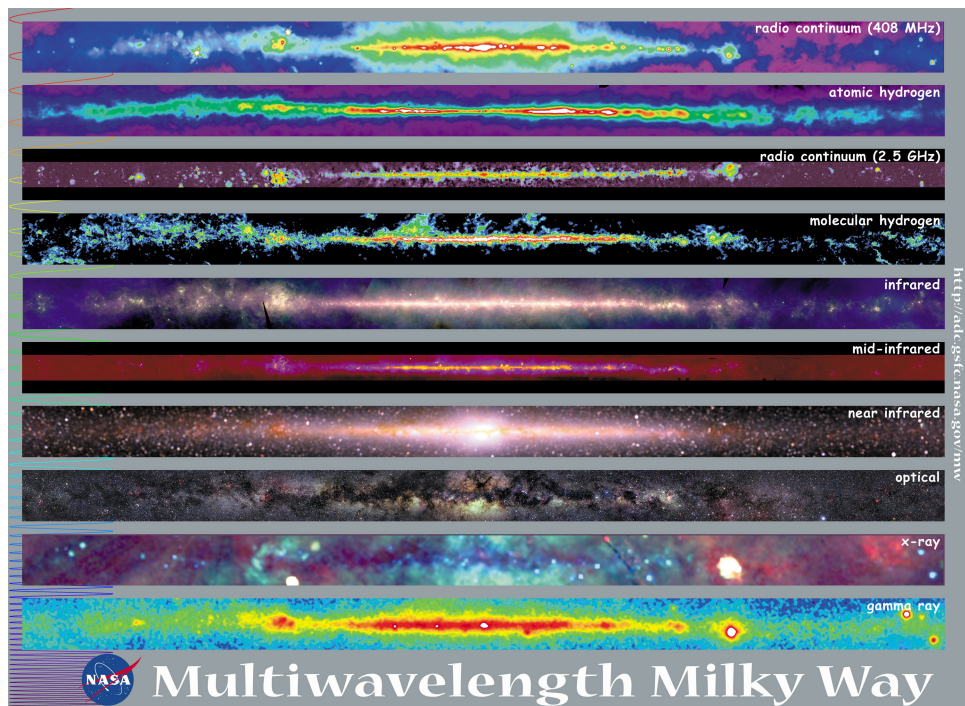


Seriál: Hvězdný zvěřinec

V minulých dílech jsme se dozvěděli, jak popsat polohu objektů na nebeské sféře, jejich jasnost a vzdálenost. Je načase se podívat na pozorovatelné objekty samotné. Pokud se nacházíme na ideálním pozorovacím místě, dominantou oblohy bude Mléčná dráha. Volnému oku se bude zdát mlhavá, vezmeme-li si na pomoc dalekohled, uvidíme, že mlhavost je ve skutečnosti způsobena tisíci hvězd. Taková situace je ale pouze ve viditelných vlnových délkách. Směrem k infračervené části spektra budeme pozorovat spíše molekuly a prach, směrem k rentgenové části budeme pozorovat záření, za nějž jsou zodpovědní bílí trpaslíci¹¹.

Nicméně zpátky ke hvězdám. Odpoutáme-li se od Mléčné dráhy, uvidíme více či méně rovnoměrně rozesté hvězdy. Všechny náležejí do naší galaxie (která je v anglofonní literatuře nazývána

¹¹Co se týče vysokoenergetického galaktického záření, jeho zdroj byl dlouho nejistý. V posledních letech se má za to, že rentgenové záření pochází ze zmíněných bílých trpaslíků, kteří jsou rozesteti podél galaktického rovníku.

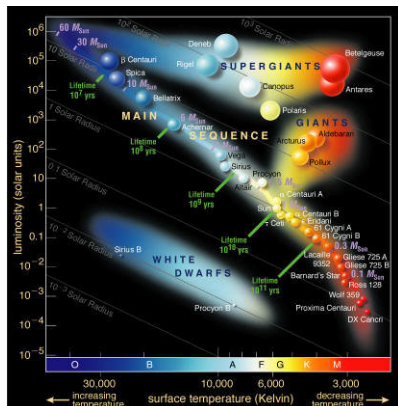


Obr. 11: Pohled na rovinu naší Galaxie v různých vlnových délkách. Obrázek byl převzat z stránek NASA.

Mléčná dráha – Milky Way, nicméně v česky psané literatuře se častěji setkáme s obecnějším označením Galaxie – s velkým písmenem). Pokud si na pomoc nevezmeme dalekohled, budou všechny hvězdy a další objekty, jež pozorujeme, náležet Galaxii, s třemi výjimkami. Okem lze spatřit mlhavou skvrnu v souhvězdí Andromeda, nazývanou Mlhovina v Andromedě. Ve skutečnosti se jedná o nejbližší spirální galaxii. Dalšími dvěma výjimkami jsou taktéž galaxie, konkrétně Velké a Malé Magellanovo mračno na jižní obloze. Jedná se o galaxie¹², které jsou souputníky galaxie naší. Budeme-li hvězdy pozorovat pozorně, zjistíme, že mají různou barvu. Podíváme-li se třeba na hvězdu Betelgeuze (α Ori, levé rameno Oriona), zjistíme, že je načervenalá, kdežto Vega (α Lyr) je spíše bílá. Není to dáno vzdáleností, nýbrž rozdílným stádiem vývoje. To, jak se hvězdy vyvíjejí, samozřejmě není pozorovatelné na časové škále lidského života. Znalosti o vývoji hvězd získáváme pozorováním hvězd v různém stádiu. Když si začnete zakreslovat hvězdy do grafu s osami označenými jako absolutní hvězdná velikost M a teplota (nebo, jak se dále dozvíme, barva), dostaneme nehomogenní diagram, který vešel ve známost jako *Hertzsprungův–Russellův diagram* (zkráceně HR diagram).

Dříve, než se pustíme do kvalitativního popisu hvězd na HR diagramu, dovolím si upozornit

¹²Pozor na terminologii, ve spoustě učebnic a knih (dokonce ne nutně starých), se setkáme s tím, že se jedná o nepravidelné galaxie. To je pravda pouze pro Malé Magellanovo mračno. Velké je ve skutečnosti stará galaxie s příčkou.



Obr. 12: HR–diagram

na seriál z desátého ročníku FYKOSu. Krom pěkného přehledu Keplerových zákonů je zde také pěkně vysvětlena fyzika hvězd a jejich stavba. Historii nebudeme opakovat, takže na podrobnější výklad stavby hvězd se podívejte tam.

Na diagramu najdeme dominantní uhlopříčku, kterou nazýváme *hlavní posloupnost* (HP, anglicky *main sequence*, MS). Pod hlavní posloupností nalezneme posloupnost bílých trpaslíků, nad ní posloupnosti obrů a veleobrů. Kde se hvězda bude nacházet a jakými vývojovými stádii projde, bude záviset na počátečních podmínkách. V našem případě bude stěžejní hmotnost hvězdy.

Život hvězdy

Hvězdy se rodí v mlhovinách. Taková nejbližší hvězdná porodnice mlhovina M42 v souhvězdí Oriona¹³, vzdálená cca 1800 ly. Mlhovina je v podstatě jakýsi oblak plynu. Aby se z něj mohla utvořit hvězda, musí splňovat několik kritérií. Musí být dostatečně chladný, hustý a velký. Dále potřebujeme vnější podnět, který nám vytvoří „zhustek“, jenž začne gravitačně kolabovat. Takový podnět je třeba šoková vlna od výbuchu blízké supernovy. Ne všechny takové vnější podněty uspějí. Proti gravitačnímu kolapsu působí mimo jiné tepelný pohyb molekul, který zvětšuje průměr oblaku plynu a tím znemožňuje kolaps. Navíc potřebujeme, aby měl oblak plynu určitou kritickou hmotnost. Tyto dvě veličiny lze vyjádřit jako Jeansovu délku λ_J a Jeansovu hmotnost M_J

$$\lambda_J \approx \sqrt{\frac{15k_B T}{4\pi G \rho \mu}}, \quad M_J = \frac{4}{3}\pi \rho \lambda_J^3,$$

kde k_B je Boltzmanova konstanta, T termodynamická teplota, G je gravitační konstanta, ρ je hustota mraku a μ je hmotnost na částici mraku. Typické rozměry a hustoty jsou $\lambda_J \sim 10^{15}$ m a $\rho_J \sim 10^{-16}$ kg·m⁻³. Cokoliv nad Jeansovu délku je nestabilní a začne se gravitačně hroutit. Gravitační volný pád samozřejmě nemůže pokračovat donekonečna. Jádro kolabujícího mraku se zahřívá a začíná vyzařovat. Nejdříve v infračervené části spektra. Překročí-li teplota 2000 K,

¹³Součást velkého molekulárního mraku v Orionu (Orion GMC).

disociují se molekuly H_2 a dostáváme atomární vodík – hlavní ingredienci pro stavbu hvězdy. Dosáhne-li teplota a hustota v jádru dostatečných hodnot, zažehnou se termonukleární reakce (prvně se spálí deuterium, poté lithium, dále bor a až pak vodík). Ve chvíli, kdy se hlavním zdrojem energie hvězdy stane fúze, hvězda vstoupí na zmiňovanou hlavní posloupnost. Hvězda na hlavní posloupnosti tráví přibližně 90 % svého života. Spokojeně přetváří vodík na helium, a to pomocí proton–protonového řetězce, nebo CNO cyklu (nutno podotknout, že CNO cyklus je také spalování vodíku na helium, ale za přítomnosti katalyzátorů, jakými jsou uhlík, kyslík a dusík). Mechanismus záleží na počáteční hmotnosti hvězdy. Obecně lze říci, že hvězdy lehčí než dvě hmotnosti slunce jsou poháněny proton–protonovým řetězcem a hvězdy hmotnější CNO cyklem. Počáteční hmotnost je v podstatě to, co nám určuje, jak se hvězda bude vyvíjet¹⁴. Hmotné hvězdy žijí rádově 10^7 let, kdežto ty nejméně hmotné i více než 10^{11} let. Hmotnost tedy hraje významnou roli. Hmotnost je důležitá nejenom pro rychlost vývoje hvězdy, ale i pro její osud. Málo hmotné hvězdy pomalu „vyhasnou“, kdežto ty největší čekají dynamické poslední fáze vývoje¹⁵.

Pro řádovou představu centrálních podmínek hvězdy: teploty zde dosahují $15,7 \cdot 10^6$ K, hustota $1,5 \cdot 10^5$ kg·m⁻³ a tlak $2,3 \cdot 10^{16}$ Pa. Hvězda si spokojeně spaluje vodík na helium, čímž stále udržuje rovnováhu ve svém nitru, které je v tomto procesu pořád přestavováno. Počet částic na 1 kg látky klesá. Tedy abychom udrželi ve hvězdě rovnováhu, když se nám jádro zahušťuje, musíme zvýšit její výkon, tedy nám narůstá potenciální energie hvězdy, která se nám začne pomalu nafukovat.

Pozdní stádia vývoje

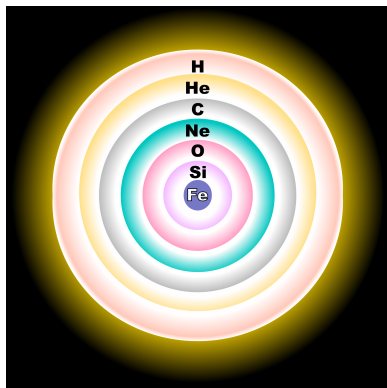
Co se stane ve chvíli, kdy jádro už hvězdu nezvládá energeticky držet? Dobrým přídatným zdrojem je smrštní hvězdy (jen do určitého poloměru, ne úplně). K jádru se tak strhne nový vodík, který hvězda může spalovat. Nicméně spalování vodíku se nebude dít přímo v jádru (to teď tvoří jaderný odpad – helium), ale ve slupce jádro obklopující. Slupka je výkonnější než původní jádro, část toku energie ze slupky se zadrží ve vnějších oblastech hvězdy a ta se opět začne nafukovat. Ve chvíli, kdy teplota v heliovém jádru vzroste na 10^7 K a hmotnost jádra dosáhne $0,4 M_{\odot}$, zažehnou se heliové reakce v jádru, jejichž produktem bude nakonec jádro uhlíkové. Heliové reakce nemohou energeticky dosáhnout výkonu vodíkových reakcí. Hvězda je stále poháněna vodíkovými reakcemi ve vnější slupce. Vodíková slupka se bude postupně ztenčovat, a to je okamžik, kdy hvězda bude opouštět hlavní posloupnost a dostane se do oblasti HR diagramu označované jako červení obří (Red Giants Branch, RGB).

Podobný mechanismus bude probíhat i pro uhlíkové jádro. To bude obklopotvat heliová, a tu vodíková slupka. Vývoj hvězdy probíhá v jakýchsi slupkách. Vždy nám naroste hmotnost jádra, ve kterém se hromadí produkty termonukleárních reakcí, zvýší se teplota a to nám umožní zažehnutí energeticky náročnějších reakcí. Tento vývoj se nám odrazí i na pozici hvězdy na HR diagramu. Ve chvíli, kdy se kolem uhlíkového jádra vytvoří heliová slupka, hvězda vstoupí na asymptotickou větev obrů – Asymptotic Giant Branch (AGB).

Řetězec prvků je $H \rightarrow He \rightarrow C \rightarrow Ne \rightarrow O \rightarrow Si \rightarrow Fe$. Hvězda v pozdním stádiu vývoje v jádru vypadá jako cibule. Zatímco spalováním vodíku v jádru hvězda tráví většinu svého života, spalování dalších prvků je mnohem rychlejší, v případě křemíku bychom mohli rádově

¹⁴Viděli nebo četli jste-li 2001: *Vesmírná odysea*, možná si pamatujete poznámku, že kdyby byl Jupiter větší, byl by hvězdou. To je hloupost, musel by být hmotnější.

¹⁵Následující popis vývoje hvězdy si rozhodně nedělá nárok na úplnost. Pokud chcete jít do detailů, sáhněte po literatuře.



Obr. 13: Složení hvězdy na konci jejího života. Obrázek pod licencí Wikimedia Common.

mluvit o dnech. Ne všechny hvězdy svůj jaderný vývoj dokončí celý, některé na to nejsou dost hmotné.

Řekni, kolik vážíš, a já ti řeknu, jak skončíš

Jak bylo několikrát zmíněno, vše závisí na hmotnosti hvězdy. Následující výčet je velmi hrubým rozdělením toho, jak bude vývoj hvězd pokračovat.

Hvězdy do hmotnosti 11 hmotností slunečních končí svůj vývoj maximálně u uhlíkového jádra. Ve chvíli, kdy je helium spalováno na uhlík a vnější obal hvězdy se rozpíná, rozepne se rychleji, než aby jej gravitace přitáhla zpět na hvězdu. V centru tak zůstane malý bílý trpaslík tvořený degenerovaným elektronovým plynem, který je vlastně obnaženým jádrem hvězdy, vyzařujícím v ultrafialové části spektra. Takové objekty jsou poměrně pěkné na pohled, neboť vysokoenergetické záření ionizuje okolní obal hvězdy a my pozorujeme planetární mlhovinu¹⁶. Bílý trpaslík bude mít hmotnost do $1,4 M_{\odot}$.

Vývoj hvězd vyšší hmotnosti bude rychlejší. Hvězda bude žít kratší dobu a v jádru dojde k syntéze prvků skupiny železa. Jádro se stále zmenšuje, ale zároveň roste jeho hmotnost. Ve chvíli kdy překročí tzv. *Chandasekharovu mez*, asi 1,4 sluneční hmotnosti, jádro se zhroutí a vznikne malá, velmi hmotná hvězda z degenerovaného neutronového plynu – *neutronová hvězda*. Průměr takového objektu dosahuje jednotek až desítek kilometrů při hmotnosti sluneční. Odhození okolohvězdné obálky je v takovém případě explozivního charakteru a my pozorujeme výbuch supernovy typu II, jejíž spektrum nám ukáže čáry vodíku¹⁷.

Extrémem jsou hvězdy hmotnější než 50 sluncí. Po nich nezůstane ani neutronová hvězda, ale rovnou černá díra stelárního typu, jakou je například objekt Cygnus X-1 v souhvězdí Labutě, který má hmotnost okolo 14 slunečních hmotností. Výbuch takové hvězdy pozorujeme jako výbuch supernovy typu Ib, bez čar vodíku, zato s absorpčními čarami těžších prvků. Takový objekt můžeme zachytit jen díky tomu, že svojí silnou gravitací ovlivňuje okolí.

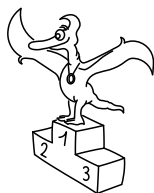
¹⁶Zkuste do Googlu zadat třeba M51, jedná se o Prstencovou mlhovinu pozorovatelnou na letní obloze v souhvězdí Lvy.

¹⁷Po takových supernovách můžeme pozorovat pěkné pozůstatky, zkuste si do prohlížeče zadat Krabí mlhovina nebo M1. Jedná se o pozůstatek ze supernovy, která vybuchla v roce 1054. Nalezneme ji v souhvězdí Býka, ale je velmi špatně pozorovatelná dalekohledem z města, neboť je to objekt docela nejasný.

A co takhle dvojhvězdy?

Samostatné hvězdy mohou vzniknout jen do hmotnosti cca 120 slunečních hmotností. Nicméně pokud se nám v zárodečném mraku povede vytvořit více „zhustků“, které začnou kolabovat, můžeme vytvořit hvězdy spolu sousedící – dvojhvězdy (nebo také celé skupiny hvězd, hvězdo-kupy). To je energeticky samozřejmě poměrně výhodné. Dvě hvězdy jsou zhruba stejně staré, mají totožné chemické složení a podobnou hmotnost. Právě ona podobnost je velmi důležitá. Nemají-li tyto hvězdy hmotnost stejnou, dříve nebo později hmotnější z hvězd urychlí svůj jaderný vývoj a opustí hlavní posloupnost. Může se stát, že hmotnější hvězda se dostane do stadia bílého trpaslíka, kdežto její souputnice je stále hvězdou hlavní posloupnosti. Bílý trpaslík je objekt hmotný a hustý, se silným gravitačním polem, díky kterému začne na sebe přetahovat vnější vrstvy hvězdy hlavní posloupnosti. Materiál z hvězdy bude dopadat na bílého trpaslíka, až opět dosáhneme Chandasekharovy meze. V tu chvíli už není možné hvězdu energeticky udržet a hvězda se hrouť jako supernova typu Ia, v jejímž spektru najdeme čáry vodíku, křemíku a železa. Supernovy typu Ia jsou důležité pro určení vzdálenosti, vizte minulý díl seriálu, jelikož každá taková supernova vybuchne stejným mechanismem a je jednoduché pak nakalibrovat vzdálenost.





Pořadí řešitelů po II. sérii



„Neobviňuj svět, zlepší ho. Jak? Neustálým zlepšováním sebe samého.“

Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	II	%	Σ
Student	MFF UK	4	4	4	4	4	5	8	6	39	100	78
1. Lucie Fořtová	G P. de Coubertina, Tábor	2	4	4	4	–	5	8	3	30	–	49
2. Eva Miklušová	G J. Škody, Přerov	2	4	2	2	2	4	9	0	25	–	42
3. Martin Kihoulou	G, Mikulášské nám. 23, Plzeň	0	4	4	2	3	3	4	–	20	–	40
4. Jozef Bucko	G, Námestie SNP, Piešťany	2	4	1	2	–	4	5	–	18	–	35
5. Jakub Dolejší	G B. Němcové, Hradec Králové	0	2	4	2	–	3	7	3	21	–	34
6. Dalimil Ševčík	G, Vyškov	2	4	2	2	–	2	6	–	18	–	33
7. Tomáš Zahradník	Gymnázium Oty Pavla, Praha	2	4	4	2	3	4	6	0	25	–	32
8. Andrej Fúsek	SPŠ Dubnica nad Váhom	2	4	1	2	–	2	6	–	17	–	30
9. Václav Kytka	Křesťanské G, Kozinova, Praha	0	4	4	2	–	2	5	–	17	–	29
10. Filip Ayazi	G Ludovíta Štúra, Trenčín	0	4	–	1	–	4	5	–	14	–	28
11. Martin Vančura	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	–	–	4	1	–	4	8	–	17	–	26
12. Pavel Blažek	G a ZUŠ, Šlapanice	0	2	4	1	–	1	5	–	13	–	24
13. Tomáš Kremel	G J. Škody, Přerov	–	–	–	2	–	–	5	–	7	–	20
14. Jan Marek	G Zábřeh	0	2	–	–	–	4	3	–	9	–	20
15. Petr Smíštel	G, Bučovice	2	4	–	–	–	–	8	–	14	–	20
16. Benedikt Petko	G Matyáše Lercha, Brno	0	2	1	1	2	3	1	–	10	–	19
17. Ondřej Poláček	ZŠ, Žerotínova	0	4	–	–	–	–	7	–	11	–	17
18. Zdeněk Turek	G a SOŠ, Rokycany	2	4	1	–	–	1	–	–	8	–	17
19. Jan Soukup	G J. Vrchlického, Klatovy	–	4	–	–	–	2	1	–	7	–	13
20. Eva Harlenderová	Slovanské G, Olomouc	–	–	–	–	–	–	–	–	0	–	12
21. Alena Pikousová	G, Jírovcova, České Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	–	0	–	12
22. Václav Steinhäuser	ZŠ, Vrané n. Vltavou	–	–	–	–	–	–	–	–	0	–	10
23. Štěpán Štěpán	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	0	–	10
24. Vojtěch Tázlar	G, Nová Paka	–	–	–	–	–	–	–	–	0	–	10
25. Petr Turnovec	SOŠ a SOU, Tábor	–	–	–	–	–	–	–	–	0	–	9
26. Vladislav Wohlrath	G a SOŠ, Rokycany	–	–	–	–	–	–	–	–	0	–	8
27. Jakub Doubrava	První české G, Karlovy Vary	–	–	–	–	–	–	–	–	0	–	7
28. Václav Skála	G J. Vrchlického, Klatovy	–	–	–	–	–	–	5	2	7	–	7
29. Tomáš Gajdůšek	G, Uherské Hradiště	–	–	–	–	–	–	–	–	0	–	6
30. Jaroslav Janoš	G, Lesní čtvrť, Zlín	–	–	–	–	–	–	–	–	0	–	4
31. Vjačeslav Horbač	G a SOSPg, Jeronýmova, Liberec	–	–	–	–	–	–	–	–	0	–	2
32. Zuzana Viceníková	G, Uherské Hradiště	–	2	–	–	–	–	–	–	2	–	2

Kategorie druhých ročníků

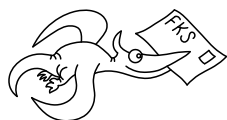
jméno <i>Student</i>	škola <i>Pilný</i> MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	II	%	Σ
		4	4	4	4	4	5	8	6	39	100	78
1. <i>Patrik Turzák</i>	G Poštová, Košice	4	2	–	5	4	4	8	4	31	–	55
2. <i>Jirka Guth</i>	G, Jírovcova, České Budějovice	6	4	2	2	–	2	6	–	22	–	53
3. <i>Matěj Bidlák</i>	G Ludka Pika, Plzeň	4	4	3	4	4	5	–	3	27	–	46
4. <i>Jakub Kvorka</i>	G, Školská, Dubnica nad Váhom	0	0	2	2	4	3	6	1	18	–	42
5. <i>Jaroslav Hofierka</i>	G J. A. Raymana, Prešov	4	2	1	–	–	4	2	–	13	–	35
6. <i>Matěj Tomešek</i>	G J. Škody, Přerov	2	2	4	2	–	1	6	2	19	–	33
7. <i>Markéta Vohníková</i>	PORG, Praha	0	0	4	2	–	–	8	0	14	–	33
8. <i>Adam Práda</i>	G, Ostrov	0	4	3	–	–	–	6	2	15	–	32
9. <i>Viktor Skoupý</i>	G, Moravská Třebová	4	4	4	1	–	–	–	4	17	–	31
10. <i>Emil Skříšovský</i>	G, Česká, České Budějovice	0	2	–	2	–	1	8	2	15	–	31
11. <i>Josef Koláčný</i>	G, Nymburk	–	–	–	–	–	3	8	–	11	–	27
12. <i>Jenda Studený</i>	G J. Škody, Přerov	2	4	1	2	–	2	6	2	19	–	27
13. <i>Martin Raszyk</i>	G, Karviná	–	–	–	–	–	–	–	–	0	–	25
14. <i>Patrik Štefek</i>	Matiční G, Ostrava	0	4	–	–	–	–	4	–	8	–	25
15. <i>Tomáš Kořínek</i>	G, Žamberk	0	–	–	2	–	–	3	–	5	–	24
16. <i>Petr Kovář</i>	Matiční G, Ostrava	0	2	1	2	–	–	6	–	11	–	22
17. <i>Martin Klíma</i>	G Ludka Pika, Plzeň	0	2	0	1	4	2	0	–	9	–	21
18. <i>Radka Štefaníková</i>	G O. Havlové, Ostrava - Poruba	2	–	1	2	2	–	–	–	7	–	21
19. <i>Soňa Ondrušová</i>	G, Ostrov	0	4	1	–	–	1	–	–	6	–	20
20. <i>Jan Bukáček</i>	Matiční G, Ostrava	0	–	–	2	–	3	6	–	11	–	19
21. <i>Daniél Čejchan</i>	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	0	–	19
22. <i>Vendula Kotyzová</i>	Wichterlovo G, Ostrava	0	4	–	–	–	3	–	–	7	–	19
23. <i>Lucie Valentová</i>	G, Boskovice	–	–	–	2	–	–	6	–	8	–	19
24. <i>Daniél Slezák</i>	Svobodná chebská škola, Cheb	2	4	1	1	2	3	0	3	16	–	16
25. <i>Kryštof Kadlec</i>	G J. Heyrovského, Praha	0	2	–	2	–	–	4	–	8	–	14
26. <i>Michal Schnürch</i>	Matiční G, Ostrava	0	0	1	–	–	–	4	–	5	–	14
27. <i>Matouš Zavřel</i>	Křesťanské G, Kozinova, Praha	0	4	1	–	–	2	5	–	12	–	14
28. <i>Martin Wirth</i>	První české G, Karlovy Vary	–	4	–	–	–	–	8	–	12	–	12
29. <i>Jiří Souček</i>	G, Nymburk	–	–	1	–	–	–	4	–	5	–	11
30. <i>Martin Jurček</i>	G, Studentská, Havířov	–	2	–	1	–	–	–	–	3	–	10
31. <i>Daniela Prokešová</i>	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	0	–	10
32. <i>Tomáš Jirman</i>	G, Nad Alejí, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	0	–	9
33. <i>Berenika Součková</i>	G P. de Coubertina, Tábor	–	–	–	–	–	–	–	–	0	–	6
34. <i>Jan Palounek</i>	G Christiana Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	1	–	–	1	–	5
35. <i>Tomáš Herman</i>	Gymnázium, Brno-Řečkovice	–	–	–	–	–	–	–	–	0	–	4

Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	II	%	Σ
<i>Student</i> <i>Pilný</i>	MFF UK	2	2	4	4	4	5	8	6	35	100	70
1. <i>Lukáš Tímko</i>	G P. de Coubertina, Tábor	2	2	1	2	4	4	6	5	26	–	56
2. <i>Miroslav Hanzelka</i>	G, Česká Lípa	1	2	4	3	2	5	8	4	29	–	54
3. <i>Filip Murár</i>	G, Masarykovo nám., Třebíč	2	2	–	4	4	4	8	5	29	–	47
4. <i>Jozef Kaščák</i>	–	1	2	1	1	2	4	6	2	19	–	37
5. <i>Jaroslav Průcha</i>	G, Strakonice	1	2	2	2	4	5	–	3	19	–	37
6. <i>Kristýna Kohoutová</i>	G, Žamberk	–	2	–	2	4	5	5	–	18	–	32
7. <i>Veronika Dočkalová</i>	G, Elgartova, Brno	1	2	3	2	–	3	8	–	19	–	31
8. <i>Michal Červeňák</i>	G Púchov	–	–	4	–	–	3	6	–	13	–	29
9. <i>David Hruška</i>	G, Mikulášské nám. 23, Plzeň	1	2	4	–	4	4	–	–	15	–	29
10. <i>Michal Nožička</i>	G, Mikulášské nám. 23, Plzeň	1	2	4	3	–	3	–	–	13	–	28
11. <i>Vít Nosek</i>	G a SOŠ, Hořice	1	0	4	2	–	2	3	–	12	–	24
12. <i>Tereza Uhlířová</i>	G, Omská, Praha	0	0	4	–	–	–	7	–	11	–	22
13. <i>Jakub Doležal</i>	G, Špitálská, Praha	0	2	1	3	3	2	7	–	18	–	20
14. <i>Lukáš Fúsek</i>	G, Uherské Hradiště	0	–	–	–	–	3	2	–	5	–	18
15. <i>Lubomír Grund</i>	G Zábřeh	0	1	4	4	4	3	–	2	18	–	18
16. <i>Albert Štěrba</i>	G P. Bezruč, Frýdek-Místek	0	2	1	2	2	1	–	–	8	–	18
17. <i>Ondřej Kořístka</i>	G, Volgogradská, Ostrava	–	1	–	–	–	–	–	–	1	–	17
18. <i>Erik Hendrych</i>	G J. Heyrovského, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	0	–	14
19. <i>Jan Rain</i>	G, Trutnov	–	–	–	–	–	–	–	–	0	–	11
20. <i>Petr Zakopal</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše 14	–	–	–	–	–	–	–	–	0	–	11
21. <i>Michal Choma</i>	G bl. P. P. Gojdiča, Prešov	0	0	1	–	–	–	–	–	1	–	9
22. <i>Tomáš Axman</i>	G, Boskovice	–	–	–	–	–	–	–	–	0	–	8
23. <i>Samuel Puček</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	0	2	–	–	–	0	–	–	2	–	8
24. <i>Ota Kunt</i>	G F. X. Šaldy, Liberec	–	–	–	–	–	–	–	–	0	–	7
25. <i>Thai Le Hong</i>	G, Děčín	–	–	–	–	–	–	–	–	0	–	7
26. <i>Zsóka Varga</i>	G Imre Madácha, Šamorín	–	–	–	–	–	–	–	–	0	–	7
27. <i>Alžběta Korábková</i>	Církevní G, Kutná Hora	–	–	–	–	–	–	–	–	0	–	6
28. <i>Vladan Glončák</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	0	–	0	–	5
29. <i>Jan Povolný</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše 14	–	–	–	–	–	–	–	–	0	–	3
30. <i>Martina Müllerová</i>	G Z. Wintra, Rakovník	–	–	–	–	–	–	–	–	0	–	1

Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	II	%	Σ
Student	MFF UK	2	2	4	4	4	5	8	6	35	100	70
1. Patrik Švančara	G Ludovíta Štúra, Trenčín	1	2	4	5	–	5	8	4	29	–	60
2. Tomáš Bárta	G, Nad Štolou Praha	1	2	4	4	4	4	7	4	30	–	44
3. Jakub Kubečka	G, Nymburk	1	2	1	3	2	4	3	4	20	–	43
4. Radomír Gajdošoci	G, P. Horova, Michalovce	–	2	3	3	4	5	6	1	24	–	34
5. Daniel Hnyk	První české G, Karlovy Vary	0	2	3	–	2	4	8	0	19	–	33
6. Jiří Záhora	G B. Němcové, Hradec Králové	–	–	1	2	–	–	7	–	10	–	26
7. Ivo Vinklárek	G, Rožnov p. Radhoštěm	–	1	–	1	–	1	2	0	5	–	25
8. Tomáš Hadámek	Mendlovo G, Opava	–	–	–	–	–	–	–	–	0	–	20
9. Milan Mikuš	G Ludovíta Štúra, Trenčín	1	–	–	2	–	–	8	–	11	–	16
10. Petr Dobiáš	G Jana Nerudy, Praha	–	–	–	–	–	–	8	–	8	–	14
11. Daniela Fecková	G, Pankúchova, SR	–	–	–	–	–	–	1	4	5	–	14
12. Stanislav Fořt	G P. de Coubertina, Tábor	–	–	–	–	–	–	–	–	0	–	13
13. Alena Harlenderová	Slovanské G, Olomouc	–	–	–	–	–	–	–	–	0	–	11
14. Kristína Nešporová	G, Boskovice	–	–	–	–	–	–	8	–	8	–	10
15. Jan Tofel	Mendlovo G, Opava	–	–	–	–	–	–	–	–	0	–	10
16. Katya Berestneva	–	1	1	–	2	2	1	2	–	9	–	9
17. Lucia Filová	Hotelová akadémia, Brezno	–	–	–	–	–	–	–	–	0	–	1


**FYKOS**

UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta

Ústav teoretické fyziky

V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

www: <http://fykos.cz>e-mail: fykos@fykos.czFYKOS je také na Facebooku 
<http://www.facebook.com/Fykos>

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.