

Milé FYKOSačky a FYKOSáci,

držíte v rukou brožurku páté série, jež se dá nazvat první jarní sérií. Většina¹ rostlin brzy začne v masovém množství syntetizovat svá polysacharidová těla, podobně autoři úloh aktuální série zatopili pod svými kotli na přípravu vět, a tak délka zadání mírně narostla. Aktuální úlohy začínají na písčité pláži, kde se utkávají slabší a nejslabší. Mimochodem odehrává se to v Egyptě. „Jen počkej, zajíci!“ prohlašuje znalec etologie. Nakonec přichází padavan programující v Javě a pijící mléko. No, raději bude lepší si úlohy přečíst celé a nejenom tento surreálný výtah.

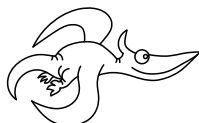
Organizátoři

Aktuálně

Opět vás zveme na sérii přednášek s fyzikální tematikou, které pořádáme na MFF UK v Praze Troji každých čtrnáct dní od 18.00. Témata přednášek jsou následující:

- **29. 3.** – elektrostatika,
- **12. 4.** – Keplerovy zákony a jejich aplikace,
- **26. 4.** – kmitání,
- **10. 5.** – statistika.

Podrobnosti o přednáškách najdete na webu². Též upozorňujeme, že dvě přednášky z cyklu již proběhly (na téma vyšší matematika) a jejich záznam naleznete na stránkách Talnetu³.



Zadání V. série



Termín uploadu: 17. dubna 2012 20.00

Termín odeslání: 16. dubna 2012

Úloha V.1 ... šumivý prášek

2 body

Hodíme-li do sklenice s vodou šumivý prášek, tak nejprve leží na dně a potom se zvedne. Proč?

Úloha V.2 ... elektrická rovnováha

2 body

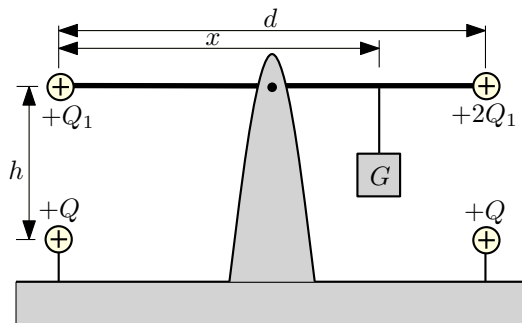
Na obrázku 1 je nevodivá tyč délky d zanedbatelné hmotnosti, otočná kolem svého středu. Na obou koncích tyče jsou připevněny malé vodivé koule zanedbatelných hmotností s kladnými náboji Q_1 a $2Q_1$. Tyč je vyvážena závažím o tíze G podle obrázku. Ve vzdálenosti h přímo pod každou z koulí je pevně umístěna koule s kladným nábojem Q .

- a) Určete vzdálenost x , pro niž je tyč vodorovná a je v rovnováze.
- b) Pro jakou hodnotu h bude tyč v rovnováze a nebude přitom vůbec zatěžovat čep, na němž je upevněna?

¹Hyperbola.

²<http://fykos.cz/akce/prednasky>

³<http://www.talnet.cz/cafe-talnet> – označení Přednáška FYKOSu.

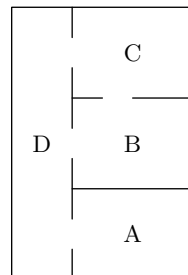


Obr. 1

Úloha V.3 ... putování faraonů

3 body

Aleš bydlí ve čtyřpokojovém bytě, jehož půdorys si můžete prohlédnout na obrázku. Mára se ale rozhodl, že Alešův byt zamóří nepříjemnými mravenci faraony. Faraoni po bytu šíleně rychle pobíhají a to ještě navíc šíleným způsobem – můžete uvažovat, že jednou za pět minut se 60% mravenců přesune do sousedních místností a jenom 40% jich zůstává pobíhat ve stejné místnosti, co předtím. Přitom se rovnoměrně rozbíhají do sousedních místností (když má místnost dvoje dveře, tak 30% jich přeběhne do jedné a 30% do druhé, když má troje dveře, tak se rozdělí po 20%). A to se opakuje každých pět minut (uvažujte jenom kroky přesně po pěti minutách). Faraonům se v bytě líbí, a tak neutíkají ven. Na druhou stranu se faraoni nemají šanci jinak dostat do bytu než propašováním, a to dělá jenom Mára, takže jinak ani faraoni v bytu nepřibývají.



- a) Když Mára zlomyslně umístí 1000 faraonů do předsíně (D), kolik faraonů bude v jednotlivých místnostech po pěti minutách? Kolik jich bude po deseti minutách a po patnácti minutách? (2 body)
- b) Pokud jsme našli v místnostech počty mravenců $N_A = 12$, $N_B = 25$, $N_C = 25$ a $N_D = 37$, jak byli mravenci rozmístění před pěti minutami? (1 bod)

Bonus Kolik mravenců by bylo v místnostech po hodně dlouhé (prakticky nekonečné) době, když by Mára rozmístil faraony jako v bodu a)? Závisejí to na tom, jak Mára mravence rozmístil? A nejrafinovanější otázka – ustálí se počet mravenců na jedné hodnotě, nebo bude oscilovat? (bod/y navíc)

Úloha V.4 ... maminka a kočárek

5 bodů

Maminka má kočárek o hmotnosti m a je s ním pevně spojena vláknem délky l , které je na počátku natažené. Mezi maminkou i kočárkem a podlahou, na které oba stojí, je nenulový koeficient smykového tření f . Maminka začne kočárek táhnout po přímce konstantní rychlostí v , která je kolmá na počáteční polohu vlákna. Popište trajektorii kočárku v závislosti na parametrech úlohy. Maminku i kočárek považujte za hmotné body. Doporučujeme úlohu numericky simulovat.

Úloha V.5 ... lovec v2

4 body

O kolik musíme zvýšit výkon motoru na jednoho chyceného ptáka za sekundu, pokud nad vagonem vztyčíme síť, do níž chytáme nebohé ptáky? Vlak jede rychlostí v , pták váží m , jeho rychlost je w , úhel nalétnutí do sítě je φ a síť má plochu S . Předpokládejte, že mezi jednotlivými záchyty se síť vrátí vždy do klidové polohy.

Úloha V.P ... světelný meč

5 bodů

Navrhněte konstrukci světelného meče, aby byl sestrojitelný za současného poznání vědy a techniky a přitom vypadal i fungoval podobně jako ten autentický ze Star Wars.

Úloha V.E ... kávu si osladím

8 bodů

V obálce vám spolu se zadáním došel i plastový sáček s podezřelým obsahem, je to cukr nebo sladidlo.

Pokuste se co nejlépe experimentálně srovnat „sladkost“ (sladivost) dodaného vzorku a několika dalších různých cukrů a sladidel. Pro odměření množství použijte přiloženou lžičku. „Sladkost“ testovaného vzorku určujte pro koncentraci jedné zarovnané lžičky cukru/sladidla v 1 dl vody. Jako jednotkovou „sladkost“ můžete brát např. rafinovaný řepný cukr (o koncentraci jedné zarovnané lžičky na 1 dl vody). Porovnávat pak můžete tak, že si připravíte roztoky o různé koncentraci známého cukru/sladidla a budete srovnávat chuť těchto roztoků s připraveným roztokem testovaného vzorku. Pro zpřesnění určení „sladkosti“ se domluvte s nějakými dalšími lidmi, kteří se do srovnávání sladkosti zapojí (ale ne s ostatními řešiteli, ať má každý svoje vlastní řešení). U každého cukru zjistěte co nejpřesněji složení a výsledky vhodně zpracujte.

Nápověda Cukr se dá sehnat řepný rafinovaný (normální bílý cukr, co se obvykle u nás používá), ale je také k sehnání např. třtinový cukr (chemicky téměř jako řepný), hroznový cukr (dextróza; v Glukopuru) a ovocný cukr (fruktóza). Ze sladidel můžeme jmenovat sorbit, huxol, sukralózu (v Cukrenu, Cukravitu), aspartam (v Irbis big sweet). Ke slazení se také používá med. Doporučujeme použít sladidla s řádově podobnou sladivostí (u některých čistých sladidel, co sladí i 600 krát tolik, co obyčejný cukr, narazíte na problémy s odvažováním).

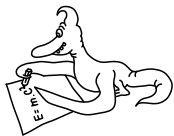
Pokud FYKOS řešíte poprvé a měli byste zájem o vzorek, stačí o něj napsat na emailovou adresu podezrelyprasek@fykos.cz.

Varování Každá látka může být při zvýšené spotřebě nebezpečná. I destilovaná voda je jed. Snažte se tedy dodržovat doporučené denní dávky.

Úloha V.S ... seriálová

6 bodů

- Aktivní galaxie se na obloze stejně jako hvězdy jeví jako bodové zdroje. Zkuste navrhnout co nejlépe způsobů, jak rozlišit hvězdu a aktivní galaxii.
- Z rádiového pozorování kvasaru 3C 273 se zjistilo, že shluk hmoty v jetu se pohybuje od aktivního jádra s úhlovou rychlostí $\mu = 0,0008 \text{ rok}^{-1}$. Předpokládejte, že shluk se pohybuje v rovině oblohy kolmo na linii pozorování, vzdálenost je $d = 440/h \text{ Mpc}$, h je Hubbleova konstanta. Vyjádřete zdánlivou rychlost v_{zd} .
- Odvoďte, pro jakou hodnotu úhlu φ bude β_{zd} maximální?
- Předpokládejme, že supermasivní černá díra v centru galaxie má účinnost 30%. Kolik energie vyzáří, pohltí-li objekt o hmotnosti Země?



Řešení IV. série

Úloha IV.1 ... schody z Chrudimi

2 body; průměr 1,83; řešilo 46 studentů

Eskaletory v metru na náměstí Míru mají n schodů a pohybují se rychlostí v . Spočítejte, kolik schodů ve skutečnosti vyšlapete, pokud po nich jdete rychlostí v_1 : a) po směru jízdy, b) proti směru jízdy. Při pohybu proti směru uvažujte, že $v_1 > v$. Aleš po cestě do otevřených dveří.

Označme d délku jednoho schodu a $V = v/d$ rychlost eskaletorů ve schodech za sekundu. Podobně označme $V_1 = v_1/d$. Pokud se pohybujeme po směru jízdy, je naše výsledná rychlost vůči vnějšímu pozorovateli rovna $V_a = V_1 + V$, pohybujeme-li se proti směru, je $V_b = V_1 - V$. Čas, za který pak projdeme n schodů, je

$$t_a = \frac{n}{V_1 + V}, \quad \text{resp.} \quad t_b = \frac{n}{V_1 - V}.$$

Kolik ujdeme schodů je pak dáno součinem tohoto času a naší rychlosti vzhledem k schodům, tedy

$$N_a = V_1 \frac{n}{V_1 + V} = n \frac{v_1}{v_1 + v}, \quad \text{resp.} \quad N_b = V_1 \frac{n}{V_1 - V} = n \frac{v_1}{v_1 - v}.$$

Petr Ryšavý
petr@fykos.cz

Úloha IV.2 ... Gatling

2 body; průměr 1,68; řešilo 25 studentů

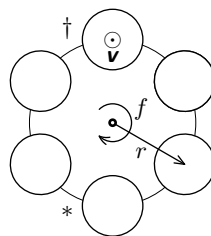
Stroj byl původně navržen pro distribuci semen do země, ale ukázal se jako mnohem užitečnější pro distribuci olova do nepřátel (rotační kulomet). Spočítejte, kde vzhledem k hlavní Gatlingu hrozí nebezpečí zasažení kulkou. Ráže je d , počet hlavní n , vzdálenost osy hlavně od osy hřídele je r , otáčky všech hlavní jsou f , kadence výstřelů je F a ústová rychlost střel v . Napadlo Michala při čtení tajného časopisu.

Podívejme se, jakým směrem se pohybuje kulka těsně po opuštění hlavně. Směrem vpřed se pohybuje rychlostí v , ale zároveň se pohybuje malou rychlostí do strany, protože hlavně, ze které vyletěla, se otáčela. Ve vodorovném směru tedy bude mít obvodovou rychlost hlavně a vyletí ve směru odchýleném o úhel α od osy hlavně.

Obvodová rychlost hlavně je $v_o = 2\pi r f$, kde f jsou otáčky hlavní za sekundu. Abychom dostali výsledek ve snáze zjištělných veličinách, dosadíme $F = n f$, kde F jsou výstřely za sekundu. Pro odchylku od osy dostáváme $\text{tg } \alpha = v_o/v$, tedy

$$\alpha = \text{arctg} \frac{2\pi r F}{n v}.$$

Pro představu dosadíme přibližné hodnoty reálného Gatlingu: $F = 300 \text{ min}^{-1} = 5 \text{ s}^{-1}$, $r = 6 \text{ cm}$, $n = 6$, $v = 180 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Získáme $\alpha \approx 0,1^\circ$, což na vzdálenosti sta metrů činí odchylku



Obr. 2: Gatling
zepředu, * nabíjení,
† výstřel

pouhých 17,5 cm. Vzhledem k tomu, že Gatling byl spíše používán stylem „namiřme to tam, kde je jich nejvíc“, nikoho to asi příliš netrápilo.

Mimo odchylky do strany je zde i vliv gravitace, která kulku urychluje směrem dolů. Budeme-li dostatečně daleko, stroj na nás nedostřelí.

Jáchym Sýkora
jachym@fykos.cz

Úloha IV.3 ... kámen letí

3 body; průměr 1,86; řešilo 35 studentů

Hodíme kulatý kámen o hmotnosti m z výšky h nad hladinou do rybníka o hloubce d . Přibližně za jak dlouho spadne na dno (od okamžiku puštění)? Jak se výsledek změní, když kámen nebude kulatý, ale placatý?

Dominika házela šutry.

Na kámen působí během pádu tíhová síla $F_G = mg$, vztlaková síla $F_{vz} = V\rho g$ a odporová síla $F_o = C_x \rho S v^2 / 2$, kde g je tíhové zrychlení, ρ hustota prostředí, ve kterém se kámen pohybuje, C_x součinitel odporu závisující na tvaru kamene a m , V , S a v po řadě hmotnost, objem, průřez a rychlost kamene.

Nejprve zkusíme výsledek odhadnout – víme, že když bude kámen padat, tak se rychle dostane na rychlost, při které bude výslednice na něj působících sil nulová. Budeme tedy mít rovnici $F_G - F_{vz} - F_o = 0$, odkud po dosazení můžeme počítat mezní rychlost jako

$$v_m = \sqrt{\frac{2g(m - V\rho)}{C_x S \rho}}.$$

Pro orientaci, dosadíme-li hodnoty veličin $g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, $\rho_{vz} = 1,29 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $\rho_{vo} = 1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ a odhadneme-li $h = 10 \text{ m}$, $d = 10 \text{ m}$, $m = 0,1 \text{ kg}$, $S = 20 \text{ cm}^2$, $V = 65 \text{ cm}^3$ a $C_x = 0,5$ pro kulatý kámen, tak mezní rychlost ve vzduchu je $v_{mvz} = 40 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ a ve vodě $v_{mvo} = 0,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Hustota vzduchu je tak malá, že tíhová síla je mnohem větší než vztlaková a odporová. Kamenu bude kvůli tomu trvat docela dlouho, než dosáhne mezní rychlosti – proto pro rozumné výšky je vhodné pád aproximovat jako volný pád v neodporujícím prostředí – čas se potom spočítá jako $t_{vz} = \sqrt{2h/g}$.

Naopak hustota vody je řádově větší než vzduchu a rychlost kamenu se dostane na konstantní velikost poměrně rychle – můžeme tedy čas odhadnout jako

$$t_{vo} = d \sqrt{\frac{C_x S \rho}{2g(m - V\rho)}}.$$

Zanedbáme-li okamžiky, kdy kámen zrychluje a ponořuje se do vody, můžeme celkový čas odhadnout jako

$$t_{odh} = t_{vz} + t_{vo} = \sqrt{\frac{2h}{g}} + d \sqrt{\frac{C_x S \rho_{vo}}{2mg - 2V\rho_{vo}g}}.$$

Dosadíme-li výše uvedené hodnoty, dostaneme $t_{odh} = 13,4 \text{ s}$.

Nyní zkusme uvažovat přesněji. Pohybovou rovnicí již máme téměř vyjádřenu, napišme ji ve tvaru

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \frac{1}{2} C_x \rho S v^2 - V \rho g.$$

Označíme-li $B \stackrel{\text{def}}{=} g - V \varrho g / m$ a $A \stackrel{\text{def}}{=} C_x \varrho S / (2m)$, pak ji můžeme napsat po separaci proměnných

$$\frac{dv}{B - Av^2} = dt$$

a následně vyřešit integrací s použitím rozkladu na parciální zlomky (pro jednoduchost zápisu označme $\sqrt{B/A} = v_m$ jako mezní rychlost)

$$\frac{1}{2\sqrt{AB}} \ln \frac{v_m + v}{v_m - v} = t$$

$$v = v_m \frac{e^{2t\sqrt{AB}} - 1}{e^{2t\sqrt{AB}} + 1}.$$

Další integrací odvodíme rovnici pro výpočet dráhy

$$s = \int_0^t v dt = \frac{v_m}{\sqrt{AB}} \ln \frac{e^{t\sqrt{AB}} + e^{-t\sqrt{AB}}}{2}.$$

Pro velké časy můžeme z poslední rovnice vyjádřit čas jako

$$t = \frac{As + \ln 2}{\sqrt{AB}}.$$

Upravíme-li, máme

$$t_{\text{vyp}} = \sqrt{2m} \left(\frac{\frac{hC_x \varrho_{\text{vz}} S}{2m} + \ln 2}{\sqrt{C_x \varrho_{\text{vz}} S g(1 - V \varrho_{\text{vz}} / m)}} + \frac{\frac{dC_x \varrho_{\text{vo}} S}{2m} + \ln 2}{\sqrt{C_x \varrho_{\text{vo}} S g(1 - V \varrho_{\text{vo}} / m)}} \right).$$

Po dosazení dostaneme $t_{\text{vyp}} = 15,1$ s.

Nebude-li kámen kulatý, ale placatý, změní se jeho součinitel odporu – C_x pak bude 1,2 a časy $t_{\text{odh}} = 19,9$ s a vypočtený $t_{\text{vyp}} = 20,8$ s, tedy bude padat déle.

Zájemci si mohou vykreslit graf závislosti rychlosti na čase, aby viděli, jak moc rychle se rychlost blíží mezní rychlosti.

Poznámky k došlým řešením

Řešitelé celkem často neměli pořádek v silách, které na kámen působí, a kdy jdou které zanedbat. Tedy ještě jednou – uplatní se tam tíhová, odporová a vztlaková, a to ve vzduchu i ve vodě! A pak také v tom, jak se kámen pohybuje – nebude zrychlovat donekonečna, po nějaké době se jeho rychlost ustálí. Jak bylo řečeno ve vzoráku, ve vodě to bude mnohem dřív, z toho plynou prvotní přiblížení. Pokud zapomínali některou sílu zmínit nebo jim kámen neustále zrychloval, řešitelé přicházeli o body.

Stokes vs. Newton Mnoho řešitelů počítalo se Stokesovou odporovou silou $F = 6\pi\eta r v$, kde η je kinematická viskozita a r je poloměr kamene. Tento vzorec platí, když obtékání kamene v tekutině je laminární, ne turbulentní. Pro rozlišení typu proudění se používá Reynoldsovo číslo definované jako $\text{Re} \stackrel{\text{def}}{=} vr/\eta$. Hranice mezi turbulentním a laminárním prouděním se pohybuje v intervalu 2000–4000 (je-li Re větší, je proudění turbulentní). Zkusíme-li Re vyčíslit (jako rychlost bereme ustálenou), dostaneme hodnoty řádově 10^6 , takže počítat musíme s odporem Newtonovým, který závisí na druhé mocnině rychlosti.

Dominika Kalasová
dominika@fykos.cz

Úloha IV.4 ... Stavinoha

4 body; průměr 2,40; řešilo 35 studentů

Model rakety má motůrek, jenž dává konstantní tah, dokud má palivo o počáteční hmotnosti m_p . Prázdná raketa váží m_0 a motor palivo spaluje lineárně s časem. Do jaké výšky může raketa vylétnout, letí-li v homogenním gravitačním poli a zanedbáme-li odpor vzduchu?

Michal odpaloval rakety.

Hledáme-li maximální výšku, určitě poletí raketa svisle vzhůru. Řešíme tedy jednorozměrný pohyb, který se skládá z části, kdy raketu pohání motor, a z vrhu vzhůru, kdy raketa letí setrvačností.

Označme T tahovou sílu motorku a I impuls síly, na nějž stačí palivo v něm. Dokud motor spaluje, hmotnost rakety se bude měnit lineárně s časem podle

$$m = m_0 + m_p \frac{I - tT}{I}.$$

Z druhého Newtonova zákona vyjádříme okamžité zrychlení

$$a(t) = \frac{TI}{Im_r - m_p Tt} - g. \quad (1)$$

Aby se raketa alespoň ke konci vznesla, musí platit $T > m_0 g$. Časovou závislost rychlosti i výšky dostaneme, když vztah (1) dvakrát zintegrujeme. Integrační konstanty volíme tak, aby platilo $v(0) = 0$ m/s, $y(0) = 0$ m.

Při integrování použijeme lineární substituci a získáme vztahy

$$v(t) = \frac{I}{m_p} \left(\ln(Im_r) - \ln(Im_r - Tm_p t) \right) - gt,$$

$$y(t) = \frac{I}{m_p} \left(t \ln(Im_r) + \frac{1}{Tm_p} \left(Im_r \ln \left(\frac{Im_r - m_p Tt}{Im_r} \right) - m_p Tt \left(\ln(Im_r - m_p Tt) - 1 \right) \right) \right) - \frac{1}{2}gt^2,$$

kde $m_r = m_0 + m_p$ značí vzletovou hmotnost rakety. Zajímají nás tyto hodnoty v čase I/T , kdy motor zhasne

$$v(I/T) = v_k = \frac{I}{m_p} \ln \frac{m_r}{m_0} - g \frac{I}{T},$$

$$y(I/T) = y_k = \frac{I^2}{m_p^2 T} \left(m_p + m_0 \ln \frac{m_0}{m_r} \right) - \frac{1}{2}g \left(\frac{I}{T} \right)^2.$$

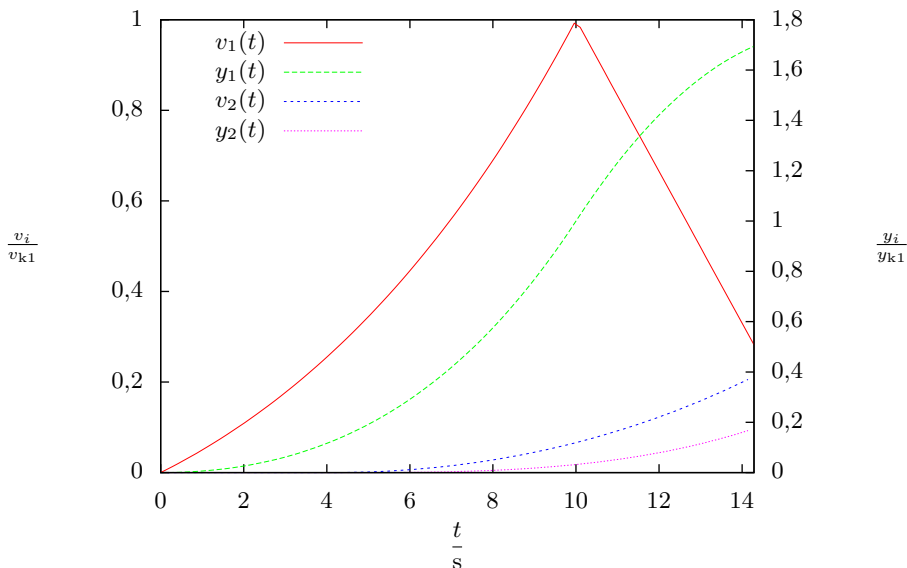
Výšku nastoupanou setrvačností vypočítáme ze zákona zachování energie, celkem tedy raketa vystoupá do výšky $y_k + v_k^2/(2g)$.

Poznámky k došlým řešením

Velká část řešitelů si lineární změnou hmotnosti zdůvodnila i lineární změnu zrychlení a následně počítala s aritmetickým průměrem jako formou středního zrychlení. Tato úvaha však není na místě, jelikož zrychlení při konstantní síle je nepřímě úměrné hmotnosti (zde s jistým posunem

způsobeným tíhovou silou). Pro představu uvádíme obrázek 3, z nějž je patrná odlišnost od lineárního růstu rychlosti.

Během výpočtů vycházely vzorce se spoustou zanořených závorek, zlomků a sčítanců – pro zajímavost uvedme jejich označení jako *tasemnicovitých vzorců*, jehož autorem je Martin Kihoulu.



Obr. 3: Průběh letu rakety: $m_0 = 50$ g, $m_p = 30$ g, $I = 10$ N·s, $T_1 = 1$ N, $T_2 = 0,7$ N.

Michal Koutný
michal@fykos.cz

Úloha IV.5 ... únik plynu

4 body; průměr 1,60; řešilo 15 studentů

Spočtete, kolik procent své hmotnosti za rok ztratí zemská atmosféra, pokud uvážíte, že končí 10 km nad zemí, po celé své výšce má konstantní tlak (stejný jako u hladiny moře), je tvořena ideálním plynem o teplotě 300 K, splňuje Maxwellovo rychlostní rozdělení a gravitace se v jejím objemu nijak neprojevuje. Aleše napadlo při úniku.

Tato úloha byla zaměřena mimo jiné na to, jak si dokážete najít správný vztah na internetu, protože většina jich nemusí být středoškolskou fyzikou odvoditelných.

Popište nejdřív model, který jsme si představovali, že použijete. Máme Zemi, která je dokonalá koule o známém poloměru, nerotuje, atmosféra se vyskytuje jen v mezikouli o výšce 10 km. To, kolik částic uteče, zjistíme tak, že vezmeme všechny ty, které narazí na horní okraj atmosféry a z nich vybereme ty, které mají rychlost větší než únikovou, a ostatní necháme odrazit zpátky. Teplota budiž 300 K a tlak 101,3 kPa.

Začneme od únikové rychlosti. Aby těleso uniklo z dosahu centrálního gravitačního pole, musíme mu udělit takovou rychlost, že v žádné konečné vzdálenosti od středu nezastaví, resp. že se zastaví až v nekonečné vzdálenosti. Známe předpis pro gravitační potenciál $V = -GM/r$ a kinetickou energii $E_k = mv^2/2$. Tedy chceme, aby součet potenciální a kinetické energie na určitém poloměru R byl nula. Energetický příspěvek od potenciálu je v nekonečnu nulový z definice, kinetickou energii tam chceme mít nulovou, jinak bychom nenašli minimální takovou rychlost. Zapišeme-li tuto úvahu, dostaneme

$$-\frac{GMm}{R} + \frac{1}{2}mv_u^2 = 0,$$

z čehož plyne, že rychlost potřebná k opuštění gravitačního pole je

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

Což pro zadanou hodnotu 6388 km je přibližně $v_u = 11,2 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$.

Druhá věc je určit, kolik částic vzduchu dopadne za jednotku času na povrch vymezený koulí o poloměru 6388 km. Odvozením se tady zdržovat nebudeme, ale v literatuře⁴ zjistíme, že počet dopadů na jednotku plochy za jednotku času je

$$f = \frac{1}{4}n\bar{v},$$

kde n je hustota plynu v částicích na m^3 a \bar{v} střední rychlost molekul plynu definovaná jako $\bar{v} = \sqrt{8k_B T / (\pi m_m)}$ (k_B je tzv. Boltzmannova konstanta, T termodynamická teplota plynu) a m_m v obou případech hmotnost molekuly plynu, kterou pro vzduch spočteme, jako průměr hmotností jednotlivých složek vážený jejich zastoupením, tj. $m_m = 28,97m_u$, přičemž m_u je atomová hmotnostní jednotka. Ze stavové rovnice víme, že

$$p = nk_B T,$$

takže budeme umět dosadit za n , tedy frekvence nárazů je pro určitou teplotu T a tlak p rovna

$$f = \frac{p}{\sqrt{2\pi m_m k_B T}}.$$

Nakonec potřebujeme zjistit, kolik molekul ve vzduchu má rychlost větší než ona úniková rychlost v_u . Pro tento účel si najdeme tzv. *kumulativní distribuční funkci* Maxwellova rozdělení (erf), kterému, jak bylo v zadání uvedeno, podléhají molekuly plynu. Tato funkce určuje, kolik molekul plynu má rychlost nižší než zkoumaná rychlost.

$$c(v) = \text{erf}\left(v\sqrt{\frac{2}{A}}\right) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{v \exp(-v^2/(2A))}{\sqrt{A}},$$

kde $A = k_B T / m_m$, další konstanty a parametry popsané v tomto vzorci známe již z dřívějšíka. Poměrný počet částic, které mají rychlost větší než úniková rychlost v_u , pak zjistíme jednoduše jako $\eta = 1 - c(v_u)$.

⁴<http://www.chem.arizona.edu/~salzmanr/480a/480ants/collsurf/collsurf.html>

Ted už jen musíme dát výsledky dohromady. Stačí, když frekvenci srážek s horním okrajem modelové atmosféry přenásobíme jeho plochou S a dobou t , po kterou je tam necháme dopadat. Nakonec vezmeme v úvahu podmínku na únik z atmosféry. Protože počítáme v jednotkách částic, musíme pak výsledek přenásobit hmotností molekuly. Výsledek tedy bude

$$m = m_m ftS\eta.$$

A co číselně? Dá se tušit, že částic, které budou rychlejší než úniková rychlost, bude poměrně málo a proto bude dobré využít např. Wolfram Alpha⁵, který umí počítat s libovolnou přesností. I tak je dobré si jednotlivé části vzorce spočítat zvlášť. Tak třeba zjistíme, že na horní okraj atmosféry dopadne $6,6 \cdot 10^{49}$ částic za rok. Nicméně koeficient η , který udává poměr prošlých a odražených zpátky, se od nuly liší až na 318. desetinném místě. V rámci tohoto modelu tedy z atmosféry neuniká nic.

Aleš Podolník
ales@fykos.cz

Úloha IV.P ... účet za topení

5 bodů; průměr 3,00; řešilo 26 studentů

V některých bytovkách se teplá voda ohřívá centrálně pro všechny její obyvatele. V zásobníku je během dne udržována konstantní teplota vody. Šetřiví obyvatelé však ohřev na noc vypínají, voda tedy do rána vystydně a poté se opět musí ohřát. Odhadněte (na základě vyhledaných údajů), kolik energie se tímto ušetří, a navrhněte obyvatelům lepší způsoby, jak ušetřit při zachování komfortu.

Pikoš platil účet za plyn.

Pre dobrou predstavu je najlepšie začať na jednoduchom modeli a získané poznatky skúsiť zovšeobecniť. Predstavme si teda napríklad taký byt, ktorý má vlastný ohrievač a sústavu radiátorov. Ústredným kúrením sa to nazýva kvôli ústrednej roli ohrievača, teda sa líši napríklad od situácie kde je každá izba vykurovaná vlastným telesom, napríklad elektrickým ohrievačom.

V takomto byte pre jednoduchosť kotol preháňa vodu systémom a súčasne ju ohrieva. Pracuje teda nejakým konštantným výkonom P_k . Takýto výkon sa dá odhadnúť rôznymi spôsobmi. Vieme napríklad že bude rádovo rovný, ale nižší ako príkon prietokových kotlov, ktoré môžeme na internete nájsť ponúkať veľké množstvo predajcov. Po chvíli hľadania si všimnete, že sa pohybujú okolo hodnoty 2 kW. Kotol ale väčšinu času nekúri úplne naplno, takže skutočný výkon bude nižší.

V dome je vhodné mať istý tepelný komfort, teda by nemalo byť v chladničke teplejšie ako v kuchyni. To, ako ťažko musí kotol pracovať, závisí od teploty vonkajšieho prostredia a izolácie domu. Výkon prechádzajúci stenami von môžeme napísať ako

$$P_s = \frac{\Delta TS}{R} = P_k$$

Poznávame rozdiel teplôt a plochu vonkajších stien. Často udávaná hodnota R je tepelný odpor. Pre starý panelák bude jeho priemerná hodnota okolo $0,5 \text{ K}\cdot\text{m}^2\cdot\text{W}^{-1}$, pre dobre postavený nízkoenergetický dom s poriadnym zateplením sa môže vyšplhať na desaťnásobok. Pre plochu stien 100 m^2 a teplotný rozdiel, ktorý teraz možno práve zažívate, $20 \text{ }^\circ\text{C}$, dostávame hodnoty unikajúceho výkonu v rozmedzí od 400 W až do 4 kW.

⁵<http://www.wolframalpha.com/>

Ak sa kúrenie na noc vypína, môžeme zo skúsenosti očakávať že ráno už radiátory nájdeme studené. Na to, aby sme ich udržali cez noc teplé, potrebovali by sme vykonať prácu $P_k \cdot 8$ hod, čo s predchádzajúcimi odhadmi dáva rádovo 10 kWh. Za kilowatthodinu zaplatíme 1 až 2 koruny.

Na druhú stranu, môžeme skúsiť šetriť a nechať radiátory chladnúť. Zobudíme sa do studenejšieho, no cez noc steny izolujú dostatočne dobre na to, aby sme nezmrzli. Ráno ale treba okrem naštartovania obvyklého výkonu kotla rozohriať aj vodu v systéme, aj vzduch. 1000 m³ vzduchu potrebuje na zohriatie o jeden kelvin okolo tretiny kilowatthodiny (spočítame jednoducho pomocou hustoty a hmotnostného tepla vzduchu). Väčší problém môže pôsobiť voda, ktorej hustota a tepelná kapacita sú oveľa vyššie ako tie u vzduchu. Objem vody v systéme vykurovania môžeme odhadnúť tak 50 litrami. Radiátor bude mať od 2 litrov pre tie nové tenké až do 10 litrov, ak sa jedná o starý, obrovský liatinový model. V rozvodoch bude tiež približne toľko isto vody. Zohriatie takejto vody z teploty bytu 20 °C na bežnú teplotu pri kúrení 60 °C bude vyžadovať

$$W_v = mc\Delta T = 50 \text{ kg} \cdot 4200 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \cdot 40 \text{ K} \approx 2 \text{ kWh}$$

Teraz vidíme, že pre takto zvolené parametre sa nám hoc aj podarí ušetriť nočnou zimou, no celú štvrtinu noci budeme šetriť len na opätovné zohriatie celého systému.

Náš skúmaný prípad bol špeciálny. Dá sa vo všeobecnosti ukázať, že vypínať kúrenie na noc je výhodnejšie. To, že kúrime celú noc je energeticky ekvivalentné tomu, že by sme nechali vodu v systéme chladnúť rovnakým tepelným tokom, akým ona vyhrieva byt, celú noc a potom ju naraz nahriala. Ale vieme, že tepelný tok medzi dvoma telesami rastie s rozdielom teplôt. Preto keď tak v polke noci voda v radiátoroch trochu ochladla, je tepelný tok menší ako na začiatku, a celkovo teda nestratí systém toľko tepla, ako by strácalo ak by sme ho udržovali na konštantnej teplote.

A čo odporúčiť ľuďom platiacim účty za plyn? Napríklad výmenu radiátorov. Novšie typy majú teraz menší objem vo vode, a aj potrubie sa robí tenké, takže v celom systéme bude menej vody, a ráno stačí ohrievať menej vody.

Ján Pulmann
janci@fykos.cz

Úloha IV.E ... už to bublá!

8 bodů; průměr 5,55; řešilo 42 studentů

Změřte účinnost rychlovarné konvice. Údaj o příkonu naleznete obvykle na samolepce zesponu konvice. Výkon určte tak, že zjistíte, o kolik stupňů Celsia se zahřál daný objem vody za jednotku času. Pokuste s se minimalizovat chybu měření a popište, jak jste se toho snažili dosáhnout.

Varování Rozhodně sami nepoužívejte voltmetr a ampérmetr u tak vysokého napětí a proudu.

Karel si vzpomněl na středoškolská léta.

Teorie

Účinnost je definována jako podíl výkonu a příkonu. Po rozšíření časem můžeme účinnost spočítat také jako podíl práce vykonané a energie, kterou stroj na vykonání této práce spotřeboval.

V našem případě rychlovarná konvice ohřívá vodu, musí tedy vykonať práci na její ohřátí z teploty T_0 na teplotu varu $T = 100$ °C (budeme předpokládat, že právě při dosažení této

teploty se konvice vypne). Práce potřebná k ohřátí vody o hmotnosti m (předpokládáme, že je během ohřevu konstantní, tj. žádná se nevypaří) o teplotu $T - T_0$ je rovna $W = cm(T - T_0)$, kde $c = 4180 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ je měrná tepelná kapacita vody.

Budeme dále uvažovat, že je příkon P konvice konstantní. To ve skutečnosti není pravda, jelikož příkon bude záviset např. na teplotě topného tělesa (respektive na jeho odporu, který je na teplotě závislý). Jelikož však podle zadání nemáme k dispozici ampérmetr, který by nám tento průběh ukázal, musí nám tento předpoklad stačit.

Trvá-li konvici ohřátí vody čas t , pak je za uvedených předpokladů její účinnost

$$\eta = \frac{cm(T - T_0)}{Pt}.$$

Pro zjištění účinnosti konvice tedy musíme znát příkon konvice P a změřit hmotnost vody m , její počáteční teplotu T_0 a čas t , za který se voda ohřeje na teplotu varu. Budeme tedy potřebovat váhy (případně odměrku pro změření objemu, z kterého je možné hmotnost za znalosti hustoty spočítat), teploměr a stopky.

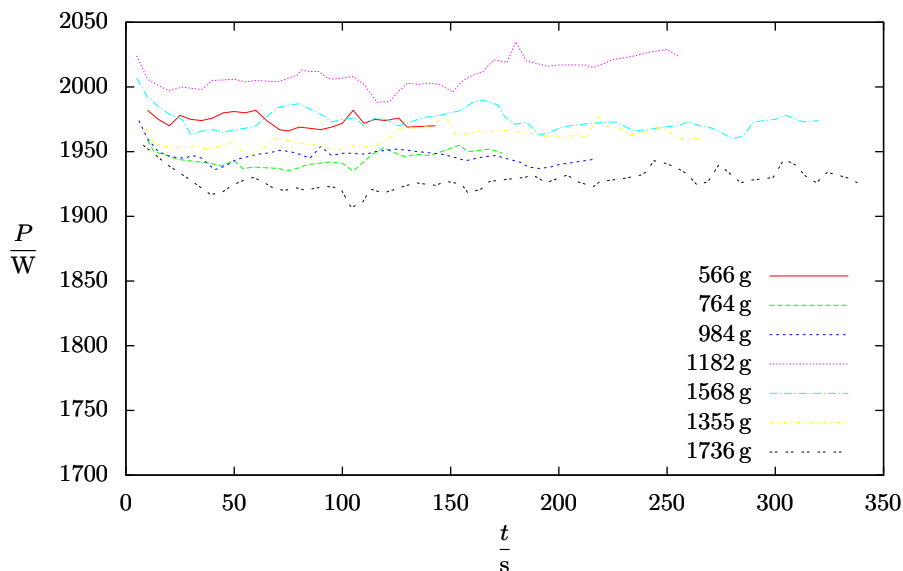
Zamysleme se nyní nad tím, jaké počáteční podmínky mohou účinnost konvice ovlivnit. Teplotu varu vody, výkon konvice, měrnou tepelnou kapacitu vody a čas potřebný k ohřevu ovlivnit nemůžeme. Můžeme však ovlivnit počáteční teplotu vody, její hmotnost a počáteční teplotu konvice. Řekněme, že experiment budeme provádět za stále pokojové teploty a konvici necháme před každým měřením vytemperovat. Počáteční teplotu vody ovlivnit můžeme, nicméně rychlovarné konvice se většinou používají pro ohřev pitné vody z vodovodu, jejíž teplota je při dané venkovní teplotě přibližně stálá. Nyní musíme zjistit, zda účinnost může záviset na hmotnosti vody, kterou konvice ohřívá. Je zřejmé, že tomu tak je. Při ohřevu vody se totiž spotřebovává energie i na ohřev samotné konvice. Teplu, které je potřebné k jejímu ohřevu, není zřejmě závislé na hmotnosti vody, z toho důvodu by měla účinnost konvice růst se zvyšující se hmotností vody v ní.

Měření

Pro měření hmotnosti vody byla použita digitální kuchyňská váha. Na ni byla prázdná konvice postavena a váha byla vynulována. Po nalití vody se tedy zobrazila přímo její hmotnost. Teplota byla měřena digitálním teploměrem připojeným k počítači. Snímač teploty byl upevněn tak, aby snímal teplotu přibližně ve středu vodou zaplněné části konvice během celého ohřevu, a tak bylo možné určit přibližně i závislost výkonu v čase. Teplota se měřila automaticky každou sekundu a byla zapsána do souboru. Příkon konvice byl měřen digitálním měřičem spotřeby. Ten zobrazuje průměrný příkon vždy za časový interval 5 s. Tato hodnota byla vždy po změně přepsána do počítače včetně aktuálního času od zapnutí konvice.

Jak je vidět z grafu 4, příkon konvice je po celou dobu ohřevu přibližně konstantní, při výpočtu účinnosti se tedy pro každou hmotnost vody počítalo vždy s jeho průměrnou hodnotou. Z grafu 5 vidíme, že i výkon je během ohřevu přibližně konstantní, tedy i účinnost bude během ohřevu přibližně konstantní.

Naměřené hodnoty a z nich spočítané hodnoty účinnosti konvice uvádíme v tabulce 1 a grafu 6. Je vidět, že účinnost konvice opravdu roste se zvyšující se teplotou vody v ní, jak jsme předpověděli v teoretické části.



Obr. 4: Graf příkonu konvice v závislosti na čase pro různé hmotnosti vody

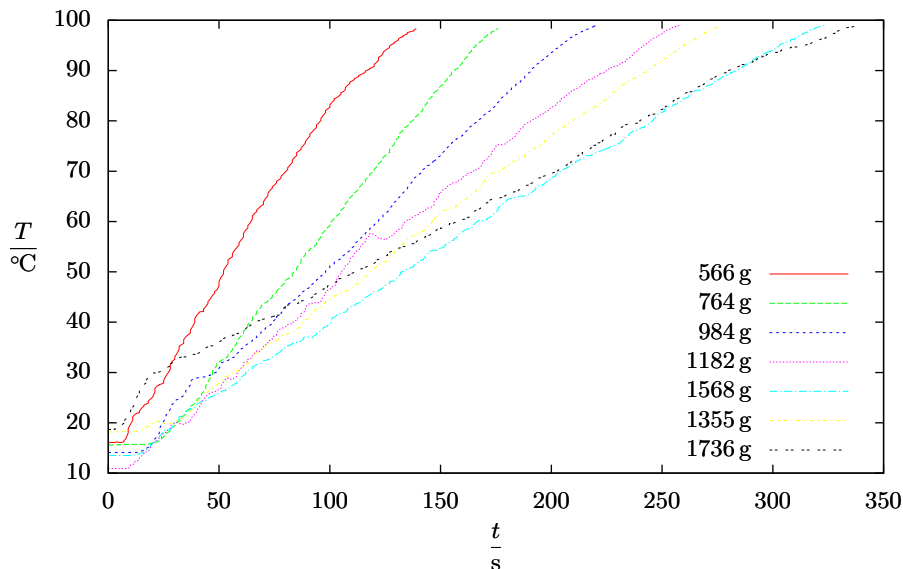
Tabulka 1: Naměřené hodnoty a spočítané účinnosti konvice

$\frac{m}{\text{g}}$	$\frac{T_0}{^\circ\text{C}}$	$\frac{P}{\text{W}}$	$\frac{t}{\text{s}}$	$\frac{\eta}{\%}$
1736 ± 2	$18,7 \pm 0,5$	1928 ± 16	340 ± 1	90 ± 2
1568 ± 2	$13,4 \pm 0,5$	1974 ± 13	323 ± 1	89 ± 2
1355 ± 2	$18,2 \pm 0,5$	1960 ± 14	280 ± 1	82 ± 2
1182 ± 2	$10,9 \pm 0,5$	2009 ± 18	258 ± 1	85 ± 2
984 ± 2	$14,1 \pm 0,5$	1947 ± 14	221 ± 1	79 ± 2
764 ± 2	$15,6 \pm 0,5$	1945 ± 11	176 ± 1	79 ± 2
566 ± 2	$16,1 \pm 0,5$	1974 ± 10	143 ± 1	70 ± 2

Nejistoty měření a diskuse výsledků

Jako u každého měření, i zde musíme určit, s jakou přesností jsme měření provedli, a diskutovat zjištěné výsledky.

Nejprve k měření teploty. V našem případě měříme pouze počáteční teplotu vody a předpokládáme, že konvice se vypne právě v okamžiku dosažení teploty varu vody v celém jejím objemu. Teploměr je před odečtením teploty již nějakou dobu ponořen ve vodě, je digitální a poměrně přesný (odchytky byly určeny podle informací výrobce), měření počáteční teploty by tedy mělo být poměrně přesné. Uvažujme nyní, jak by se změnil výsledek, kdyby se konvice nevypnula právě v okamžiku dosažení teploty varu v celém objemu. Vypnula-li by při nižší teplotě, voda v konvici by nevřela, což se ovšem děje, takže tuto možnost můžeme vyloučit. Pokud



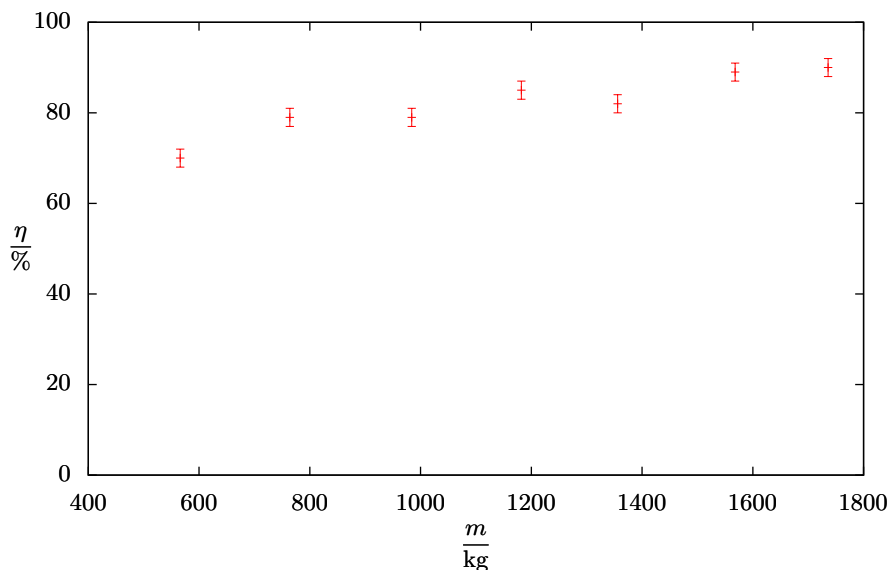
Obr. 5: Graf teploty vody v závislosti na čase pro různé hmotnosti vody

by vypnula později, odpařilo by se více vody. To však není účel konvice, tedy teplo potřebné pro odpaření části vody nemůžeme přičíst k užitečnému výkonu. Odpařením části vody se však změní hmotnost kapalné vody v konvici a pouze voda o této hmotnosti nám bude užitečná. Do výpočtu účinnosti bychom tedy měli dosazovat konečnou hmotnost vody v konvici. Bylo zjištěno, že se během ohřevu odpaří maximálně jednotky gramů vody, což výsledek ovlivní minimálně.

V zadání tohoto příkladu bylo řečeno, že údaj o příkonu se nachází zespondu konvice. Bohužel na všech konvicích, které jsem měl k dispozici, byl údaj o příkonu uveden jako interval o šířce několika set wattů. Konkrétně u použité konvice to bylo $(1850 \div 2200)$ W. Pokud bychom počítali s takto velkou nejistotou určení příkonu, dostali bychom nejistotu účinnosti asi 0,14, tedy relativní nejistotu asi 18 %, šlo by tedy o mnohem méně přesné měření (u námi provedeného měření je relativní nejistota asi 3 %). Z toho důvodu byl zvolen již uvedený měřič spotřeby elektrické energie. Výrobce tohoto zařízení bohužel v dokumentech neuvádí jeho přesnost (byla tedy spočítána a odhadnuta podle naměřených dat). Nicméně i tak je měření jistě mnohem přesnější, než kdybychom uvažovali zmiňovaný interval.

Závěr

Účinnost rychlovarné konvice roste se zvyšující se hmotností vody v ní a pohybuje se od asi 70 % do asi 90 %.



Obr. 6: Graf účinnosti konvice v závislosti na hmotnosti vody

Poznámky k došlým řešením

Většina řešitelů došla přibližně ke stejnému výsledku, jako uvádíme ve vzorovém řešení. Někteří však zapomněli zohlednit vliv hmotnosti, tedy nejjednodušeji ovlivnitelné počáteční podmínky, a měřili (i když několikrát) stále se stejnou hmotností vody.

Několik z vás měřilo účinnost jen za omezených podmínek, např. pouze v krátkém časovém intervalu, někteří se dokonce snažili konvici tepelně izolovat od okolí nebo předehtřívát. Výsledek, který se tímto postupem dostane, však není vypovídající o funkci konvice. Vhodnější je provést měření tak, jak je popsáno výše. Z účinnosti, kterou takto naměříme, poté můžeme určit, kolik elektrické energie za normálních podmínek spotřebujeme (a tedy kolik zaplatíme) na ohřátí daného množství vody na teplotu varu, budeme-li konvici používat v souladu s návodem, což běžně děláme.

Tomáš Pikálek
pikos@fykos.cz

Úloha IV.S ... seriálová

6 bodů; průměr 1,88; řešilo 8 studentů

a) *Spirální galaxie můžeme velmi hrubě popsat logaritmickou spirálou*

$$r(\varphi) = r(0) \exp(\varphi \operatorname{tg} \Phi),$$

kde r a φ jsou polární souřadnice a Φ je úhel otevření odpovídající úhlu, který svírá kolmice k průvodiči s tečnou ke spirále (úhel otevření roste ve směru hodinových ručiček, vyjadřujeme jej v radiánech, přičemž hodnota může nabývat více než 2π). Zvažme $\Phi = 10^\circ$. Odvodte

vztah pro poměr vzdáleností dvou sousedních závitů téhož spirálního ramene od centra galaxie. Jak by se poměr změnil, kdyby ramena byla čtyři (rovnoměrně rozložená). Vyjádřete vzdálenost pro sousední ramena v $r(0) = 8 \text{ kpc}$.

- b) Uvažujte nekonečný vesmír s konstantní hustotou hvězd a bez extinkce. Vyjádřete vztahy pro integrální a diferenciální počet hvězd v závislosti na zdánlivé hvězdné velikosti. Co se stane, bude-li zdánlivá hvězdná velikost velká?

Bonus Jaká je pravděpodobnost, že dvě hvězdy se nám v galaxii promítnou za sebe? Uvažujte osamocené hvězdy, ne dvojhvězdy.

Janapka.

Spirální galaxie

V prvé řadě chceme odvodit vztah pro poměr vzdáleností dvou sousedních závitů. Jedná se o jedno a to samé rameno, takže musíme uvažovat, co se bude měnit podle čeho. Vzdálenost od středu galaxie se zjevně bude měnit s úhlem φ . Změny nejsou skokové, ale naopak docela malé, a pořád musí platit, že jde o logaritmickou spirálu. Chceme-li malé změny vzdálenosti od středu, budeme derivovat podle φ (ostatně na ničem jiném r závislé není).

$$r(\varphi) = r(0) \exp(\varphi \operatorname{tg} \Phi)$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = r(0) \exp(\varphi \operatorname{tg} \Phi) \operatorname{tg} \Phi,$$

kde $r(0)$ je konstanta. Podíváme-li se pozorně na vztah, zjistíme, že se nám v derivované spirále opět objevilo $r(\varphi)$. Můžeme ji přepsat

$$\frac{dr}{d\varphi} = r(\varphi) \operatorname{tg} \Phi,$$

což je velmi jednoduchá diferenciální rovnice, kterou lze vyřešit metodou separace proměnných.

$$\frac{dr}{r} = \operatorname{tg} \Phi d\varphi$$

$$\int_0^\varphi \frac{dr}{r} = \int_0^\varphi \operatorname{tg} \Phi d\varphi$$

$$[\ln r]_0^\varphi = [\varphi \operatorname{tg} \Phi]_0^\varphi$$

$$\ln \frac{r(\varphi)}{r(0)} = \varphi \operatorname{tg} \Phi,$$

což je obecný vztah. Nás zajímá, jak je tomu po jednom zákrutu. Jeden zákrut je de facto opsání kruhu, což je 2π . Zároveň vztah zlogaritmujeme

$$\frac{r(2\pi)}{r(0)} = \exp(2\pi \operatorname{tg} \Phi),$$

což je vztah, který jsme chtěli. Dosadíme-li $\Phi = 10^\circ$, dostaneme poměr 1 : 3,03.

V případě, že budou spirální ramena čtyři, musíme se zamyslet nad tím, jak vlastně bude vypadat obrázek galaxie. Mezi každé dva závity jednoramenné galaxie musíme vměstnat tři další. Spirála bude zdánlivě pouze čtyřikrát hustěji namotaná. V praxi to znamená, že vztah

pro logaritmickou spirálu změněme na $r(\varphi) = r(0) \exp(4\varphi \operatorname{tg} \Phi)$. Počítáme úplně stejně jako v předešlém případě.

$$\ln \frac{r(\varphi)}{r(0)} = 4\varphi \operatorname{tg} \Phi$$

$$\frac{1}{4} \ln \frac{r(\varphi)}{r(0)} = \varphi \operatorname{tg} \Phi,$$

což je po úpravě $\sqrt[4]{r(2\pi)/r(0)} = \exp(2\pi \operatorname{tg} \Phi)$. Po dosazení $\sqrt[4]{1 : 3,03}$.

Nakonec se ptáme, jaká je vzdálenost pro sousední ramena Slunce. Předpokládejme, že Slunce leží někde mezi rameny. Prostor mezi rameny má stejný tvar jako ramena samotná, nicméně vzhledem k tomu, že hustota hmoty je zde výrazně menší, tvoří jen jakási virtuální ramena, která nám pomohou ve výpočtu. Předpokládejme, že Slunce se nachází v jednom takovém virtuálním rameni (což je předpoklad nutný, abychom zkoumali jeho vzdálenost od dvou ramen skutečných). Ramen virtuálních i skutečných máme dohromady osm. Budeme počítat úplně stejně jako v předešlém případě, ale započítáme i virtuální ramena. Poměr se tak změní na

$$\sqrt[8]{\frac{r(2\pi)}{r(0)}} = \exp(2\pi \operatorname{tg} \Phi).$$

Pro sousední ramena poměr máme vyčíslený jako $\sqrt[8]{1 : 3,03}$, spočítáme vzdálenosti a dosadíme vzdálenost Slunce $r(0)$ ze zadání

$$\sqrt[8]{3,03} - \sqrt[8]{1/3,03} = 0,28r(0) = 2,2 \text{ kpc}.$$

Vzdálenost mezi dvěma rameny, mezi kterými se nachází Slunce, je 2,2 kpc.

Počítáme hvězdy

V textu seriálu je uveden vzorec pro počet hvězd mezi námi a daným objektem

$$N_M(M, S, \Omega, d) dM = \left(\int_0^d n_M(M, S, \Omega, r) \Omega r^2 dr \right) dM.$$

Zamyslíme se nad tím, jaké jsou v zadání předpoklady. Konstantní hustota nám říká, že nám zmizí závislost na prostorovém úhlu a vzdálenosti od pozorovatele $n_M(M, S, \Omega, r) = n_M(M, S) = \text{konst.}$ Vzhledem k tomu, že nezapočítáváme mezihvězdné zčervenání, tedy extinkci, nebude se nám měnit ani absolutní hvězdná velikost hvězd, tzn. zmizí faktor dM . Zahrneme-li tyto předpoklady, můžeme tento vztah přepsat jako

$$N_M(M, S, \Omega, d) = n_M(M, S) \Omega \int_0^d r^2 dr = \frac{\Omega d^3}{3} n_M(M, S).$$

Pro vyjádření ve zdánlivých hvězdných velikostech si vzpomeneme na starou dobrou Pogsonovu rovnici ve tvaru $m = M + 5 \log_{10} d - 5$. Odtud si můžeme vyjádřit d a výše uvedený vztah napíšeme ve tvaru

$$\begin{aligned}\bar{N}_M(M, S, \Omega, m) &= \frac{\Omega}{3} n_M(M, S) 10^{3(m-M+5)/5} = \\ &= \frac{\Omega}{3} n_M(M, S) \exp(\ln 10^{3(m-M+5)/5}) = \\ &= \frac{\Omega}{3} n_M(M, S) \exp\left(\frac{3(m-M+5)}{5} \ln 10\right).\end{aligned}$$

V textu seriálu je uveden i vztah pro diferenciální počet počet hvězd

$$A_M(M, S, \Omega, m) dM dm = \frac{\bar{N}_M(M, S, \Omega, m)}{dm} dM dm,$$

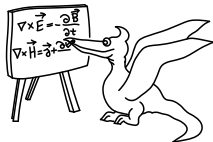
který můžeme přepsat podle našich úvah jako

$$\begin{aligned}A_M(M, S, \Omega, m) &= \frac{\bar{N}_M(M, S, \Omega, m)}{dm} \\ &= \frac{\ln 10}{5} \Omega n_M(M, S) 10^{3(m-M+5)/5} \\ &= \frac{3 \ln 10}{5} \bar{N}_M(M, S, \Omega, m),\end{aligned}$$

což je výsledný vztah. Zkusme se zamyslet nad tím, co se stane, když bude velmi velké m . Abychom zachovali konstantní počet hvězd, úhel Ω bude velmi rychle divergovat s tím, jak m poroste. Dojdeme k tomu, že v nekonečné vzdálenosti by k nám mělo docházet nekonečné množství světla. Jedná se o tzv. *Olberův paradox*.

Olberův paradox je známý také jako paradox tmavé noci. Za našich předpokladů by obloha v noci totiž měla být spíše jasná. Představme si jakési slupky o určité tloušťce. V jedné slupce je určitý počet hvězd, ale v těch následujících, které jsou větší a vzdálenější počet hvězd roste. Nicméně jelikož jsou vzdálenější, klesá intenzita světla, které k pozorovateli doputuje. Nakonec každá slupka bude v součtu zářit stejně. Máme-li nekonečný vesmír, slupek je nekonečně mnoho a obloha v noci musí být jasná, k čemuž jsme došli i naším výpočtem. Kde je chyba v předpokladech? Prvním chybným předpokladem je nekonečnost vesmíru, ten má totiž konečné stáří. Hvězdy se navíc netvořily od prvopočátku vesmíru. Existuje tedy pouze konečný počet hvězd, který můžeme spatřit. Také jsme zanedbali extinkci, což v realitě nelze udělat. A nakonec červený posuv (diskutovaný ve druhém díle seriálu), díky němuž se záření posune do okem nespátřitelných vlnových délek.

Jana Poledniková
janap@fykos.cz



Seriál: Aktivní galaxie

V minulém díle jsme si představili základní morfologii galaxií, které běžně pozorujeme na obloze, máme-li k dispozici dalekohled. Krom morfologie kterou jsme si představili, můžeme galaxie rozdělit na aktivní a neaktivní. Za aktivitu považujeme výtrysk (dále budeme používat anglický název *jet*) z centrální supermasivní černé díry, která se nachází v jádru každé galaxie.

Je tam černá díra nebo ne?

Postulovat, že uprostřed každé aktivní galaxie je černá díra je poněkud odvážné, neboť jako sám název napovídá, černou díru nemůžeme jednoduše pozorovat, neboť její gravitace je natolik silná, že z ní neuniká ani světlo. Musíme se zamyslet nad tím, co v případě takové aktivní galaxie vidíme⁶. Aktivní galaxie se vyznačují tím, že je vidíme na velké vzdálenosti, což naznačuje, že mají vysokou luminositu L . Pro výpočet provedeme několik zjednodušení. Zdroj budeme považovat za stabilní a izotropní, budeme také uvažovat o tom, že centrum naší aktivní galaxie je tvořeno ionizovaným vodíkem. Aby nebylo dezintegrováno, musí gravitační síla vyrovnávat tlak záření. Vyjádříme si tok záření F , což je energie, která za jednotku času proce slupkou o poloměru r .

$$F = \frac{L}{4\pi r^2}.$$

Zamysleme se na chvíli nad hybností. Pro foton hybnost vyjádříme $p = E/c$ a pro tok záření to bude obdobné. Hybnost toku záření je v podstatě to, co nazveme tlakem záření

$$P_{\text{rad}} = \frac{F}{c} = \frac{L}{4\pi r^2 c}.$$

Pokud nás zajímá zářivá síla, tak se musíme zajímat ještě o účinný průřez jednoho elektronu σ_e . Vztáhneme-li sílu na jednotkový vektor v radiálním směru \mathbf{r} , můžeme napsat

$$\mathbf{F}_{\text{rad}} = \sigma_e \frac{L}{4\pi r^2 c} \mathbf{r}.$$

To bychom měli záření, teď přijde na řadu gravitace. Vzhledem k tomu, že máme ionizovaný vodík, můžeme gravitační sílu mezi částicemi napsat jako

$$\mathbf{F}_{\text{grav}} = -\frac{GM(m_p + m_e)}{r^2} \mathbf{r} \approx -\frac{GMm_p}{r^2} \mathbf{r},$$

jelikož hmotnost elektronu je zanedbatelná. Galaktické jádro se pomalu nerozpíná, takže je zřejmé, že gravitační síla, směřující dovnitř musí být větší nebo rovna zářivé síle

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{rad}} &\leq \mathbf{F}_{\text{grav}} \\ \sigma_e \frac{L}{4\pi r^2 c} &\leq \frac{GMm_p}{r^2} \\ L &\leq \frac{4\pi Gcm_p}{\sigma_e} M. \end{aligned}$$

⁶Lze dokázat, že černá díra se nachází i uprostřed neaktivních galaxií, ale tím se zde zabývat nebudeme.

Po vyčíslení dostaneme $6,31 \cdot 10^4 \text{ erg}\cdot\text{s}^{-1} \approx 1,26 \cdot 10^{38} (M/M_{\odot}) \text{ erg}\cdot\text{s}^{-1}$. Výše uvedený vztah pro luminositu se nazývá *Eddingtonův limit*. Určuje nám minimální hmotnost, kterou může mít zdroj o luminositě L . Vztah pro hmotnost můžeme přepsat jako

$$M_E = 8 \cdot 10^5 L(10^{44}) M_{\odot},$$

kde $L(10^{44})$ znamená luminositu v jednotkách $10^{44} \text{ erg}\cdot\text{s}^{-1}$. Pro takovou aktivní galaxii je typická hodnota $L \approx 10^{46} \text{ erg}\cdot\text{s}^{-1}$, což odpovídá hmotnostem okolo 10^8 hmotností slunečních. Vzhledem k tomu, že pozorovaný objekt je bodový, jako hvězda, musí být poměrně malý a velmi hmotný. Takové kritérium nesplňuje nic jiného než právě černé díry.

Kde se bere jet aneb kouzlo akrece

Už jsme zmínili, že za aktivitou galaxie je jakýsi jet a černá díra. Tyto dva fenomény můžeme spojit. Materiál na černou díru nepadá přímo, ale po spirále⁷, což formuje tzv. *akreční disk*. Ten černou díru v podstatě krmí. Materiál který na ní dopadne pak „exploduje“ a vytvoří jet⁸. Můžeme si zkusit odvodit, kolik hmoty černá díra musí sežrat, aby si udržela aktivitu. Předpokládejme, že černá díra není dokonalá a existuje nějaký koeficient efektivity μ . Celkovou vyčerpateľnou energii můžeme vyjádřit jako $E = \mu M c^2$. Vyzářená energie se dá napsat jako $L = dE/dt$. Ve vztahu pro energii je jediný v čase měnitelný faktor hmotnost černé díry samotné, můžeme tedy napsat (tečka značí časovou derivaci)

$$L = \mu \dot{M} c^2,$$

kde časová derivace hmotnosti je tempo akrece na centrální objekt. Z empirických závěrů víme, že

$$\dot{M} = \frac{L}{\mu c^2} \approx 1,8 \cdot 10^{-3} \left(\frac{L(10^{44})}{\mu} \right) M_{\odot} \text{ rok}^{-1}.$$

To jak moc bude akrece účinná závisí na faktoru μ , který nám vlastně popisuje úspěšnost přeměny gravitační energie na záření. Potenciální energie černé díry samotné je $U = GMm/r$, kde m je hmotný element ve vzdálenosti r od černé díry, provedeme-li jeho časovou derivaci, výsledkem bude pozorovaná luminosita

$$L \approx \frac{dU}{dt} = \frac{GM}{r} \frac{dm}{dt} = \frac{GM\dot{m}}{r}.$$

Z uvedených rovnic můžeme uhadnout, že $\mu \propto M/r$. To nám definuje jakousi kompaktnost objektu samotného. Můžeme si zadefinovat i poloměr objektu, jelikož jde o černou díru, použijeme poloměr⁹,

$$R_S = \frac{2GM}{c^2} \approx 3 \cdot 10^{13} M(10^8) \text{ cm} \approx 10^{-2} \text{ světelných dní}.$$

Odhlédneme-li od relativistických efektů a určíme, že náš testovací hmotnostní bod je ve vzdálenosti $5R_S$ od centra černé díry, můžeme zjednodušeně napsat

$$U = \frac{GMm}{5R_S} = \frac{GMm c^2}{10GM},$$

⁷Lze pěkně demonstrovat na gumové bláně na kterou položíme těžkou kuličku. Pustíme-li k ní kuličku lehčí, nespustí se přímo doprostřed, ale bude kroužit po spirále.

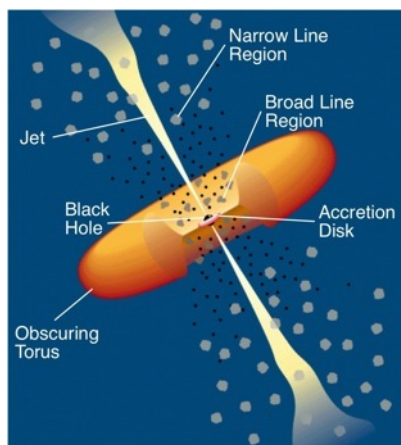
⁸Samotný mechanismus vzniku jetu je neznámý, proto uvozovky.

⁹Poloměr okolo hmotného objektu, jehož úniková rychlost je rovna rychlosti světla, jinak řečeno.

což po vyčíslení vychází cca $0,1mc^2$, kde 0,1 je faktor μ . Pro srovnání, fúze vodíku na hélium má $\mu = 0,007$. Co to znamená? Že pro vyzaření obrovské energie, kterou pozorujeme ve skutečnosti stačí neuvěřitelně málo hmoty, konkrétně $\dot{M} \approx 2M_{\odot} \text{rok}^{-1}$. Zakomponujeme-li do výpočtu Eddingtonův limit, dostaneme maximální tempo akrece, což je $2,2M(10^8)M_{\odot} \text{rok}^{-1}$. Náš model je samozřejmě výrazně zjednodušený, neboť jsme celou dobu počítali se sférickým systémem (už při odvození Eddingtonova limitu). Ve vesmíru často narazíme na tzv. super Eddingtonovské luminosity. Ty vznikají, je-li systém nikoliv sférický, ale diskový. Akrece pak probíhá zejména v ekvatoriálním disku, kde ji nejčastěji také pozorujeme. Kolem černé díry pak vzniká charakteristický torus akrečního disku, který je obklopen prachovým materiálem, který se neúčastní akrece.

Všechny aktivní galaxie rovny jsou

Aktivitu galaxií pozorujeme různou. Někdy velmi silnou, někdy slabší a hlavně u takových zdrojů pozorujeme různá spektra, která má na svědomí toroidální disk tvořený různými lehkými prvky v různém stavu. V první polovině devadesátých let byla vyslovena teorie, že všechny aktivní galaxie jsou vlastně jeden druh objektu, pozorovaný z různého úhlu. Vzniklo tzv. *unifikované schéma aktivních galaxií* (pro jednoduchost budeme dále pro ono aktivní jádro galaxie používat zkratku AGN – z anglického active galactic nucleus).



Obr. 7: Náčrtek AGN

Pozorované objekty dostaly z historického důvodu různá označení (teorie bohužel přišla až po pozorování), neboť se vyznačují různými vlastnostmi.

Seyfertovy galaxie (Sy)

První objevené aktivní galaxie, rozdělují se na několik podtříd podle vzhledu spektra. Základním dělením je Sy 1 a Sy 2. V případě Sy 2 se díváme do roviny prachového a akrečního disku a vidíme pouze úzké spektrální čáry, kdežto na Sy 1 se koukáme z většího úhlu (dle

obrázku cca úhel kde se objeví broad line region, BLR) a pozorujeme i oblast se širokými spektrálními čarami. Mezi těmito dvěma třídami ještě existuje jemnější dělení jako Sy 1,5, Sy 1,8 podle inkлинаčního úhlu. Ačkoliv mluvíme o úzkých a širokých spektrálních čarách, ve srovnání s obyčejnými galaxiemi jsou obojí velmi široké, což je způsobeno Dopplerovým efektem. To naznačuje, že pozorovaný materiál velmi rychle rotuje.

Kvasary (QSO)

Kvasar je zkratkové slovo, které vzniklo z anglického *quasi stellar object*. S hvězdou takový objekt samozřejmě nemá nic společného, ale při objevu bylo konstatováno, že se jedná o hvězde podobný objekt s neobvyklým spektrem s velmi širokými spektrálními čarami. Jedná se o jedny z nejvzdálenějších objektů, které umíme pozorovat, neboť jsou extrémně jasné (nejvzdálenější kvasary mají červený posun cca 7). Jsou pozorovatelné z podobného úhlu jako Sy 1, ale liší se tím, že jsou o něco jasnější (můžeme to srovnat tak, že jasnost jádra v případě Sy je srovnatelná s jasností všech hvězd v galaxii, která objekt obklopuje, kdežto kvasary jsou asi stokrát jasnější). Hranice mezi Seyfertovými galaxiemi a kvasary je poměrně nejasná a velmi často záleží jen na autorech článků/učebnic. Kvasary navíc narozdíl od Seyfertových galaxií můžeme pozorovat i v rádiové oblasti, ale ne všechny. To implikuje dělení na tzv. rádiové – *radio loud* (QSR) a obyčejné (QSO).

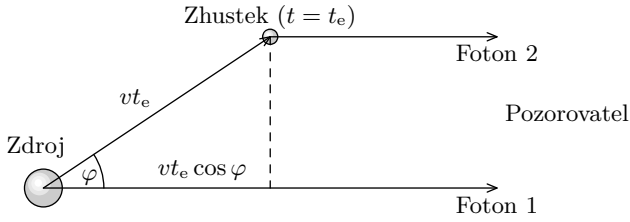
Rádiové galaxie

Narozdíl od kvasarů jsou rádiové galaxie pozorovány hlavně v dlouhovlnné části spektra a naopak třeba v rentgenu jsou poměrně slabé. Na takové galaxie nahlížíme z ještě většího úhlu. V rádiové oblasti začínáme pozorovat hlavně materiál jetu. Stále však pozorujeme i okolní plyn, který se projevuje ve spektrech objektů. Rádiové galaxie opět můžeme rozdělit podle přítomnosti širokých čar na tzv. BLRG – *broad line radio galaxy*, která ve spektru obsahuje rozšířené čáry, stejně jako úzké, a NLRG – *narrow line radio galaxy*, kde jsou pozorovatelné jen úzké spektrální čáry.

Blazary

Název blazar vzniknul z pojmenování *blazing quasi stellar object*. Jakýmsi hlavním zástupcem (po kterém se zároveň jmenuje podtřída těchto objektů) je objekt BL Lac. Kapitálky jsou tradiční označení proměnných hvězd, takže je konkrétně v souhvězdí Lacerta (Ještěrka). Než se zjistil galaktický původ, mělo se za to, že jde o poměrně záhadnou hvězdu, která svoji jasnost zvládne změnit až o 30 % za 24 hodin a za delší čas až o faktor 100. Vedle třídy BL Lac sem patří i tzv. OVV – *optically violently variable quasars*, které jsou jasnější než třída BL Lac. OVV mají ve spektru detekovatelné široké a úzké čáry a jsou silně polarizovány. Spektru BL Lac dominuje kontinuum, spektrální čáry tu nejsou časté. Je to dáno tím, že pozorujeme-li blazar, koukáme se téměř přímo do jetu vycházejícího z centrálního objektu. Při pozorování blazarů se přišlo na to, že podle rádiového pozorování vykazují nadvětelný pohyb. Podle základního principu teorie relativity něco takového nemohlo být možné. Ukazuje se, že nadvětelné rychlosti jsou u blazarů běžné, neboť za ně může geometrie pozorování.

Představme si objekt, který se pohybuje rychlostí v (skutečná rychlost, ne zdánlivá) a od linie pozorování je jeho jet odkloněn o úhel φ (obrázek 8). Objekt emituje foton podél linie pozorování v čase $t = 0$, zdroj je v tu chvíli od pozorovatele vzdálen na vzdálenost d . Představme si druhý



Obr. 8: K výkladu zdánlivé nadsvětelné rychlosti

foton, emitovaný v čase t_e , vzdálenost objektu od Země je v tu chvíli $d - vt_e \cos \varphi$. Vyjádříme si časy, ve kterých oba fotony dorazí k pozorovateli

$$t_1 = \frac{d}{c},$$

$$t_2 = t_e + \frac{d - vt_e \cos \varphi}{c}.$$

Z toho můžeme spočítat časový rozdíl mezi dvěma detekcemi na Zemi

$$\Delta = t_2 - t_1 = t_e \left(1 - \frac{v}{c} \cos \varphi \right),$$

což je čas *kratší* než t_e . Zdánlivá rychlost naměřená pozorovatelem je

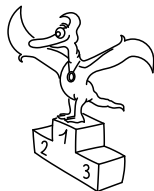
$$v_{zd} = \frac{vt_e \sin \varphi}{\Delta t} = \frac{v \sin \varphi}{1 - (v/c) \cos \varphi}.$$

Z výše uvedené rovnice můžeme vyjádřit poměr v/c

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{v_{zd}/c}{\sin \varphi + (v_{zd}/c) \cos \varphi}.$$

Nadsvětelné rychlosti lze pozorovat zejména v dlouhovlnné části elektromagnetického spektra, ve které vidíme samotný jet¹⁰.

¹⁰Pěkně je to znázorněno pro příklad galaxie M87 z kupy galaxií v Panně kupříkladu zde <http://www.stsci.edu/ftp/science/m87/color3.gif>.



Pořadí řešitelů po IV. sérii



Z technických důvodů nejsou součty za celý rok násobené dvěma u prvních ani druhých ročníků. Směrodatné jsou výsledky na webu.

Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	IV	%	Σ
Student	MFF UK	2	2	3	4	4	5	8	6	34	100	140
1. Lucie Fořtová	G P. de Coubertina, Tábor	2	2	3	–	–	3	6	3	19	73	77
2. Martin Kihoulou	G, Mikulášské nám. 23, Plzeň	2	1	1	2	0	4	8	–	18	61	70
3.–4. Jozef Bucko	G, Námestie SNP, Piešťany	2	2	1	2	1	3	6	1	18	58	64
3.–4. Eva Miklušová	G J. Škody, Přešov	1	2	2	1	–	4	5	–	15	59	64
5. Dalimil Ševčík	G, Vyškov	1	2	2	2	2	4	5	–	18	58	61
6. Jakub Dolejší	G B. Němcové, Hradec Králové	2	2	1	2	–	–	8	–	15	58	60
7. Filip Ayazi	G Ludovíta Štúra, Trenčín	2	–	3	2	2	2	6	–	17	57	55
8. Pavel Blažek	G a ZUŠ, Šlapanice	1	–	1	–	–	5	–	–	7	46	33
9. Tomáš Kremel	G J. Škody, Přešov	–	–	2	2	–	–	6	–	10	52	32
10.–11. Andrej Fúsek	SPŠ Dubnica nad Váhom	2	–	–	2	–	–	2	–	6	50	30
10.–11. Jan Marek	G Zábřeh	–	–	–	–	–	3	5	–	8	50	30
12. Václav Kytko	Křeř. G, Kozinova, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	44	28
13. Martin Vancúra	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	77	23
14. Petr Smíštil	G, Bučovice	–	2	–	–	–	–	–	–	2	91	20
15.–17. Ondřej Poláček	ZŠ, Žerotínova	–	–	–	–	–	–	–	–	–	75	15
15.–17. Benedikt Petko	G Matyáše Lercha, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	–	36	15
15.–17. Zdeněk Turek	G a SOŠ, Rokycany	2	–	–	–	–	1	–	–	3	44	15
18. Václav Skála	G J. Vrchlického, Klatovy	–	–	–	–	–	–	–	–	–	42	14
19. Petr Turnovec	SOŠ a SOU, Tábor	2	–	2	–	–	–	–	–	4	46	11
20.–21. Eva Harlenderová	Slovanské G, Olomouc	–	–	–	–	–	–	–	–	–	43	10
20.–21. Jan Soukup	G J. Vrchlického, Klatovy	–	–	–	–	–	–	–	–	–	38	10
22.–23. Alena Píkousová	G, Jírovцова, České Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	33	9
22.–23. Václav Steinhäuser	ZŠ, Vrané n. Vltavou	–	–	–	–	–	–	–	–	–	60	9
24. Vojtěch Tázlar	G, Nová Paka	–	–	–	–	–	–	–	–	–	62	8
25. Štěpán Štěpán	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	78	7
26. Tomáš Gajdůšek	G, Uherské Hradiště	–	–	–	–	–	–	–	–	–	36	5
27.–28. Jakub Doubrava	První české G, Karlovy Vary	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	4
27.–28. Vladislav Wohltrath	G a SOŠ, Rokycany	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	4
29. Jaroslav Janoš	G, Lesní čtvrť, Zlín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	2
30.–31. Vjačeslav Horbač	G a SOŠPg, Jeroným., Liberec	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	1
30.–31. Zuzana Viceníková	G, Uherské Hradiště	–	–	–	–	–	–	–	–	–	25	1
32.–33. Filip Šmejkal	G, Uherské Hradiště	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0	0
32.–33. Gabriela Šmejkalová	G, Uherské Hradiště	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0	0

Kategorie druhých ročníků

jméno <i>Student</i>	škola <i>Pilný</i> MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	IV	%	Σ
		2	2	3	4	4	5	8	6	34	100	140
1. Patrik Turzák	G Poštová, Košice	2	2	3	4	3	4	7	3	28	81	101
2. Tomáš Zahradník	Gymnázium Oty Pavla, Praha	2	1	4	3	2	4	8	0	24	64	76
3. Jakub Kvorka	G, Školská, Dubnica n/Váhom	2	2	2	4	1	3	5	-	19	60	75
4. Markéta Vohníková	PORG, Praha	1	2	-	1	-	3	5	-	12	62	56
5. Jirka Guth	G, Jírovce, České Budějovice	2	-	-	3	-	3	2	-	10	68	54
6.-7. Matěj Bidlák	G Lučka Píka, Plzeň	-	-	2	-	-	4	-	-	6	86	44
6.-7. Viktor Skoupý	G, Moravská Třebová	2	1	2	4	-	-	8	3	20	71	44
8. Jaroslav Hofierka	G J. A. Raymana, Prešov	-	-	-	-	-	-	5	-	5	62	37
9. Josef Koláčný	G, Nymburk	-	-	-	-	-	-	5	-	5	65	34
10. Daniel Slezák	Svobodná chebská škola, Cheb	2	2	3	1	2	-	0	-	10	37	33
11.-13. Jan Studený	G J. Škody, Přerov	2	0	-	-	-	2	6	-	10	46	32
11.-13. Radka Štefaničková	G O. Havlové, Ostrava-Poruba	2	-	1	-	-	-	5	-	8	68	32
11.-13. Lucie Valentová	G, Boskovice	1	-	1	1	-	6	-	-	9	46	32
14. Matěj Tomešek	G J. Škody, Přerov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	50	30
15. Matouš Zavřel	Křesť. G, Kozinova, Praha	1	2	-	2	-	2	4	-	11	48	29
16.-17. Petr Kovář	Matiční G, Ostrava	0	-	0	0	0	1	-	-	1	28	27
16.-17. Emil Skříšovský	G, Česká, České Budějovice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	59	27
18. Adam Přáda	G, Ostrov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	63	26
19. Martin Raszyk	G, Karviná	-	-	-	-	-	-	-	-	-	63	22
20.-21. Tomáš Kořínek	G, Žamberk	-	-	-	-	-	-	-	-	-	60	21
20.-21. Patrik Štefek	Matiční G, Ostrava	-	-	-	-	-	-	-	-	-	47	21
22.-23. Jan Bukáček	Matiční G, Ostrava	-	-	-	-	-	-	-	-	-	53	17
22.-23. Martin Wirth	První české G, Karlovy Vary	2	-	-	-	-	-	5	-	7	85	17
24. Vendula Kotyzová	Wichterlovo G, Ostrava	-	-	-	-	-	-	-	-	-	44	16
25.-27. Martin Klíma	G Lučka Píka, Plzeň	-	-	-	-	-	-	-	-	-	25	15
25.-27. Daniel Čejchan	Jiráskovo G, Náchod	-	-	-	-	-	-	-	-	-	79	15
25.-27. Soňa Ondrušová	G, Ostrov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	47	15
28. Michal Schnürch	Matiční G, Ostrava	-	-	-	-	-	-	-	-	-	34	14
29. Kryštof Kadlec	G J. Heyrovského, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	50	10
30. Jiří Souček	G, Nymburk	-	-	-	-	-	-	-	-	-	38	9
31. Tomáš Jirman	G, Nad Alejí, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	23	8
32.-33. Martin Jurček	G, Studentská, Havířov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	39	7
32.-33. Daniela Prokešová	Jiráskovo G, Náchod	-	-	-	-	-	-	-	-	-	88	7
34. Berenika Součková	G P. de Coubertina, Tábor	-	-	-	-	-	-	-	-	-	45	5
35.-36. Tomáš Herman	Gymnázium, Brno-Řečkovice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	50	4
35.-36. Jan Palounek	G Christiana Dopplera, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	33	4

Kategorie třetích ročníků

jméno <i>Student</i> <i>Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	IV	%	Σ
		2	2	3	4	4	5	8	6	34	100	140
1. <i>Lukáš Tímko</i>	G P. de Coubertina, Tábor	2	2	–	–	–	–	–	–	4	82	87
2. <i>Filip Murár</i>	G, Masarykovo nám., Třebíč	2	2	3	2	–	–	6	3	18	78	79
3. <i>Míroslav Hanzelka</i>	G, Česká Lípa	2	2	3	3	2	2	7	–	21	77	75
4.–5. <i>Kristýna Kohoutová</i>	G, Žamberk	2	–	2	3	–	5	8	–	20	76	70
4.–5. <i>Jaroslav Průcha</i>	G, Strakonice	2	0	2	2	2	5	6	–	19	56	70
6. <i>Jozef Kaščák</i>	G dukl. hrdinov, Svidník	2	–	1	–	–	1	4	–	8	51	59
7. <i>Jakub Doležal</i>	G, Špitálská, Praha	2	1	1	3	–	–	8	–	15	68	56
8. <i>Veronika Dočkalová</i>	G, Elgartova, Brno	2	–	–	–	–	–	7	–	9	74	55
9.–10. <i>Michal Červeňák</i>	G Púchov	2	–	–	2	–	–	3	–	7	65	46
9.–10. <i>David Hruška</i>	G, Mikulášské nám. 23, Plzeň	2	–	1	4	–	–	–	–	7	84	46
11. <i>Michal Nožička</i>	G, Mikulášské nám. 23, Plzeň	2	2	–	2	–	–	–	–	6	80	43
12. <i>Albert Štěrba</i>	G P. Bezruč, Frýdek-Místek	2	2	3	–	1	–	–	–	8	46	39
13. <i>Jakub Čimerman</i>	G Tajovského, B. Bystrica	2	2	2	2	–	2	5	1	16	56	37
14. <i>Martin Adamec</i>	G Tajovského, B. Bystrica	2	2	1	2	–	3	5	1	16	55	36
15. <i>Lukáš Fusek</i>	G, Uherské Hradiště	–	–	1	2	–	3	6	–	12	54	34
16. <i>Lubomír Grund</i>	G Christiana Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	72	28
17. <i>Vít Nosek</i>	G a SOŠ, Hořice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	24
18. <i>Tereza Uhlířová</i>	G, Omská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	54	22
19. <i>Ondřej Kořistka</i>	G, Volgogradská, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	63	17
20. <i>Erik Hendrych</i>	G J. Heyrovského, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	82	14
21.–23. <i>Michal Choma</i>	G bl. P. P. Gojdiča, Prešov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	35	11
21.–23. <i>Jan Rain</i>	G, Trutnov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	92	11
21.–23. <i>Petr Zakopal</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše 14	–	–	–	–	–	–	–	–	–	92	11
24. <i>Vladan Glončák</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	2	–	–	–	–	–	–	–	2	42	10
25. <i>Samuel Puček</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	35	9
26. <i>Tomáš Axman</i>	G, Boskovice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	80	8
27.–30. <i>Ota Kunt</i>	G F. X. Šaldy, Liberec	–	–	–	–	–	–	–	–	–	88	7
27.–30. <i>Thai Le Hong</i>	G, Děčín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	47	7
27.–30. <i>Klaudia Mráziková</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	2	–	–	–	–	–	5	–	7	70	7
27.–30. <i>Zsóka Varga</i>	G Imre Madácha, Šamorín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	88	7
31. <i>Alžběta Korábková</i>	Církevní G, Kutná Hora	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	6
32. <i>Jan Povolný</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše 14	–	–	–	–	–	–	–	–	–	75	3
33. <i>Tomáš Kello</i>	G J. A. Raymana, Prešov	2	–	–	–	–	–	–	–	2	100	2
34. <i>Martina Müllerová</i>	G Z. Wintra, Rakovník	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	1

Kategorie čtvrtých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	IV	%	Σ
		2	2	3	4	4	5	8	6	34	100	140
1. Patrik Švančara	G Ludovíta Štúra, Trenčín	2	–	3	4	3	3	8	–	23	91	113
2. Jakub Kubečka	G, Nymburk	2	–	1	2	–	–	5	–	10	61	63
3.–4. Tomáš Bárta	G, Nad Štolou Praha	2	2	–	3	–	–	–	–	7	72	61
3.–4. Radomír Gajdošoci	G, P. Horova, Michalovce	2	–	3	4	–	4	6	–	19	75	61
5. Daniel Hnyk	První české G, Karlovy Vary	–	–	–	–	–	–	–	–	–	55	40
6. Kristína Nešporová	G, Boskovice	–	–	1	4	2	–	6	–	13	68	39
7.–9. Ivo Vinklárěk	G, Rožnov p. Radhoštěm	–	–	–	–	–	–	–	–	–	48	26
7.–9. Katya Berestneva	–	2	–	1	2	1	–	5	–	11	42	26
7.–9. Jiří Záhora	G B. Němcové, Hradec Králové	–	–	–	–	–	–	–	–	–	65	26
10. Tomáš Hadáček	Mendlovo G, Opava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	57	20
11. Petr Dobiáš	G Jana Nerudy, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	69	18
12. Milan Mikuš	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	16
13. Daniela Fecková	G, Pankúchova, SR	–	–	–	–	–	–	–	–	–	56	14
14. Stanislav Fořt	G P. de Coubertina, Tábor	–	–	–	–	–	–	–	–	–	93	13
15. Alena Harlenderová	Slovanské G, Olomouc	–	–	–	–	–	–	–	–	–	69	11
16. Jan Tofel	Mendlovo G, Opava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	83	10
17. Lucia Filová	Hotelová akadémia, Brezno	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	1
18. Pham The Huynh Duc	G, Šumperk	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0	0




FYKOS

UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta

Ústav teoretické fyziky

V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

www: <http://fykos.cz>e-mail: fykos@fykos.czFYKOS je také na Facebooku <http://www.facebook.com/Fykos>

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.