

Úloha III.3 ... train à grande vitesse

4 body; průměr 3,11; řešilo 37 studentů

Trat' má poloměr oblouku R , vlak má těžiště ve výšce H nad kolejemi s rozchodem D . Jakou maximální rychlostí může po takovéto trati jet vlak, pokud požadujeme, aby se mohl kdykoli zastavit, aniž by spadl na bok? Za jakých podmínek je maximální rychlost neomezená?

Poznámka Zanedbejte síly působící mezi jednotlivými vagony a šířku vagonu vzhledem k poloměru oblouku. Napadla Lukáše během návratu z org. výletu od Berouna.

Jak všichni víme, tratě a silnice mívají klopené zatáčky. Maximální klopení zatáčky určíme jednoduše z podmínky stability při zastavení vlaku. Pokud vlak stojí, tak musí tíhová síla směřovat mezi kolejnice, viz obrázek 1 (v opačném případě by došlo k převrácení a to nechceme). Proto pro úhel sklonu trati vůči vodorovné rovině platí

$$\alpha \leq \alpha_{\max} = \operatorname{arctg} \frac{D}{2H}. \quad (1)$$

Dále budeme uvažovat hodnotu α_{\max} , protože tato umožňuje nejvyšší maximální rychlost.

Nyní musíme vyšetřit, kam bude působit výsledná (tíhová a odstředivá) síla, pokud bude vlak projíždět zatáčku o poloměru R rychlostí v . Podrobnější rozkreslení sil a použitých veličin je na obrázku 2.

Z tohoto obrázku je vidět, že maximální velikost odstředivé síly je

$$F_o \leq F_G \operatorname{tg} 2\alpha \leq F_G \operatorname{tg} 2\alpha_{\max}.$$

Nyní použijeme vzorec pro tangens dvojnásobného úhlu¹ $\operatorname{tg} 2\alpha = 2 \operatorname{tg} \alpha / (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)$. Proto platí

$$F_o \leq F_G \frac{2 \operatorname{tg} \alpha_{\max}}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha_{\max}}.$$

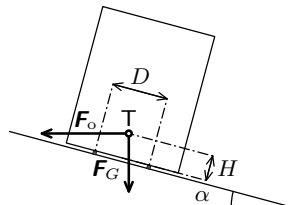
Nyní dosadíme ze vztahu (1), $F_o = Mv^2/R$ a $F_G = Mg$, kde M je hmotnost vagonu.

$$\frac{Mv^2}{R} \leq Mg \frac{D/H}{1 - \frac{1}{4}(D/H)^2},$$

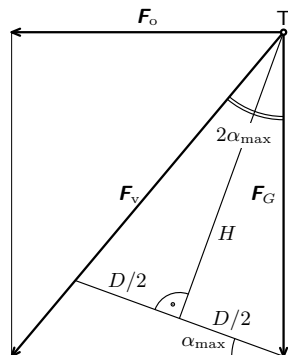
$$v \leq \sqrt{4gR \frac{DH}{4H^2 - D^2}}.$$

Vidíme, že pokud není splněna podmínka $D < 2H$, nebude takto vypočtená rychlost existovat. Zamysleme-li se podrobněji, zjistíme, že tento výsledek odpovídá případu, kdy i nekonečná odstředivá síla nezpůsobí převrnutí vlaku. Tedy pokud platí $2H < D$, tak pro sklon kolejí $\alpha' = \operatorname{arctg}(D/2H) > 45^\circ$ může vlak projíždět zatáčku libovolnou rychlostí.

¹Můžeme si jej odvodit ze součtových vzorců pro sinus a cosinus $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ vzájemným vydělením a rozšířením zlomku výrazem $1/\cos^2 \alpha$.



Obr. 1: Nákres sil působících na vlak v zatáčce



Obr. 2: K diskusi stability v zatáčce

Ještě osvětleme, proč byla v zadání poznámka o zanedbání sil mezi vagony a rozměrů vagonu oproti poloměru oblouku. Důvod pro první poznámku je zřejmý – můžeme dosti těžko určit, jakým způsobem na sebe vzájemně působí vagony. Druhá poznámka souvisí s tím, že na vnitřní stranu vlaku působí kvůli menšímu poloměru zatáčení menší dostředivá síla než na vnější stranu a takto můžeme uvažovat pouze jednu působící odstředivou sílu v těžišti.

Poznámky k došlým řešením

Značná část z vás si neuvědomila, že trať může být nakloněná, proto také byla v zadání podmínka, která říkala, že se vlak při zastavení (nikoli zastavování!) nesmí převrátit na bok.

Za řešení, které neuvažovalo sklonění trati, jsme dávali dva body, za úplné řešení body čtyři. Pokud bylo správně diskutováno, za jakých podmínek je rychlost vlaku neomezená, tak jste se dočkali bodu navíc.

Lukáš Ledvina
lukas1@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.