

Úloha III.4 ... těžký úděl

4 body; průměr 1,90; řešilo 29 studentů

Při řezání stromů musí zahradník počítat s lecjakými problémy. Uvažujme větev připojenou k nepružnému lanu (tj. tuhost roste nade všechny meze) přes kladku. Dole stojí dva brigádníci, kteří jistí větev, aby nespadla do bazénu. Větev spadne volným pádem z výšky h , než se provaz napne. Za určitých okolností brigádníci držící druhý konec lana vyjedou tak vysoko, že narazí do kladky. Stanovte podmínky, za jakých bude řezání bezpečné.

Nápověda Uvažujte nejprve chování dvou hmotností na ledě, které jsou spojeny nepružným lanem a mají různé rychlosti. Mikuláš vyprávěl Jakobovi, jak na něj spadla větev.

Rychlost větve v momentě, kdy se lano napne, je $v_0 = \sqrt{2hg}$.

V momentě napnutí se musí vyrovnat rychlosti větve a brigádníků. Jak naznačuje nápověda, jde o zachování hybnosti a nikoliv energie. Tedy brigádníci získají směrem nahoru rychlost $v_1 = m_v v_0 / (m_b + m_v)$, kde m_v a m_b označují hmotnosti větve a brigádníků.

Dále předpokládejme, že větev je lehčí než brigádníci (zajišťovat těžší větev by bylo hloupé). Brigádníci mají tedy směrem dolů zrychlení (je to i zrychlení větve směrem nahoru)

$$a = g \frac{m_b - m_v}{m_b + m_v}.$$

Nechť H_v je výška větve nad zemí, když se napne lano, a H_b je vzdálenost brigádníků od kladky.

Nejprve předpokládejme $H_v > H_b$ (větev je nad hlubokým bazénem), a tak nehrozí, že větev spadne na zem dřív, než si brigádníci „rozbijí držky“ nebo než se jejich výstup zastaví. Čas, který potřebují do zastavení, je $t = v_1/a$. Za tento čas se dostanou do výšky

$$v_1 t - \frac{at^2}{2} = \frac{m_v^2 h}{m_b^2 - m_v^2}$$

a musí platit

$$H_b > \frac{m_v^2 h}{m_b^2 - m_v^2},$$

aby brigádníci nenarazili do kladky.

Za předpokladu $H_b \geq H_v$ může větev narazit do země ještě během výstupu brigádníků a to, když platí

$$H_v < \frac{m_v^2 h}{m_b^2 - m_v^2}.$$

Za takového předpokladu je čas do nárazu větve

$$t_n = \frac{v_1 - \sqrt{v_1^2 - 2aH_v}}{a}.$$

Rychlost brigádníků je pak $v_2 = v_1 - at_n = \sqrt{v_1^2 - 2aH_v}$ a jejich vzdálenost od kladky $H_b - H_v$. Jejich zrychlení je teď g . Analogicky, aby nenarazili, musí platit

$$H_b - H_v > \frac{v_2^2}{2g} = \frac{v_1^2 - 2aH_v}{2g} = \frac{m_v^2 h}{(m_b + m_v)^2} - H_v \frac{m_b - m_v}{m_b + m_v}.$$

V případě, že $m_v > m_b$, platí tytéž vzorce. Tak však pro a dostaneme záporné číslo, a proto v případě $H_v > H_b$ brigádníci určitě narazí.

Dávid Hvizdoš
david@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.