

Úloha III.5 ... zemnicí roviny

5 bodů; průměr 2,07; řešilo 15 studentů

Mějme dvě nekonečně velké vodivé roviny, které jsou obě uzemněné a vzdálené od sebe l . Mezi nimi je umístěn bodový náboj velikosti q ve vzdálenosti x od horní roviny. Určete náboj indukovaný na spodní rovině. Karel vykradl cosi, co se odkazuje na Stony Brook University.

Úlohu vyřešíme pomocou dvoch mocných nástrojov elektrostatiky, Gaussovhovho zákona a superpozície. Začneme však pekným trikom, ktorý je kľúčom ku celému riešeniu. Predstavme si myslennú rovinu rovnobežnú s oboma vodivými rovinami tak, aby v nej ležal náboj q . Ak sa v situácii zo zadania naindukujú na spodnej rovine celkovo náboj Q , tak z princípu superpozície vieme, že pri pridaní druhého náboja na myslennú rovinu sa naindukujú znova taký istý náboj, teda spolu $2Q$.

Teraz pridáme na túto rovinu N nábojov, pričom N je veľmi veľa. Dokonca tak veľa, že sa z nej stane celkom homogénne nabitá rovina s plošnou hustotou náboja rovnou

$$\sigma = q \frac{N}{S},$$

pričom N aj S rastú nad všetky medze.

Keďže je plošná hustota takmer konštantná, môžeme situáciu považovať za symetrickú voči posunutiu v rovine, a elektrické pole za homogénne (pretože siločiarly nemajú kam, zo symetrie, ujsť).

Situácia sa teraz veľmi zjednodušila. Máme tri nekonečné roviny, pričom jedna je rovnomerne nabitá. Označme hornú rovinu 1 a dolnú rovinu 2 a ku nim prislúchajúcej indukované plošné hustoty σ_1 a σ_2 .

Malo by byť jasné, aké pole je vonku z týchto dvoch rovín, v priestore naokolo. Roviny sú uzemnené, čo znamená, že pri prenášaní náboja z ich povrchu do nekonečna sa nevykoná žiadna práca. Ak by teda bolo mimo týchto rovín nejaké pole, tak by sme pri pohybe náboja od nich konali prácu. Mimo rovín je teda pole nulové, a nenulová elektrická intenzita sa nachádza len medzi týmito rovinami.

Taktiež vieme, že na oboch rovinách je rovnaký potenciál. Ak označíme intenzity medzi doskami číslami prislúchajúcimi ich rovinám, kladný smer od strednej dosky, tak pri posúvaní náboja z tejto dosky na rovinu 1 pole vykoná prácu

$$W = xE_1.$$

Rovnakú prácu ale musí pole vykonať aj pri prechode na druhú rovinu, nakoľko na nich je rovnaký potenciál, a to potenciál zeme

$$xE_1 = (l - x)E_2 \quad \Rightarrow \quad E_1 = \frac{l - x}{x} E_2.$$

Teraz už len použijeme Gaussov zákon. Ako plochu uvažujeme valec s obsahom podstavy S , ktorá bude vždy rovnobežná s rovinami. Jeho stenami žiaden tok netečie, intenzita je s nimi vždy rovnobežná (kolmá na normálu). Pre valec, ktorý pretína len strednú rovinu, platí

$$E_1 S + E_2 S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0},$$

$$E_2 = \frac{l\sigma}{x\epsilon_0}.$$

A pre valec prechádzajúci len spodnou rovinou platí

$$-E_2 S = \frac{\sigma_2 S}{\varepsilon_0}.$$

Pri pridaní N nábojov je na spodnej rovine celkový náboj NQ , a voči plošnej hustote je vo vzťahu

$$\sigma_2 = Q \frac{N}{S} = \frac{Q}{q} \sigma \quad \Rightarrow \quad Q = q \frac{\sigma_2}{\sigma}.$$

Plošnú hustotu σ_2 ale už vyjadrenú máme

$$\frac{l\sigma}{x\varepsilon_0} = -\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0},$$
$$\frac{\sigma_2}{\sigma} = -\frac{l}{x}.$$

Takže po dosadení dostávame

$$Q = -\frac{l}{x}q.$$

Ján Pulmann
janci@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.