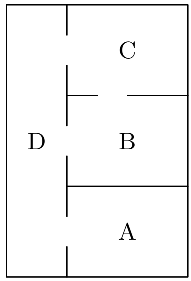
Úloha V.3 ... putování faraonů
3 body; průměr 3,26; řešilo 42 studentů



Aleš bydlí ve čtyřpokojovém bytě, jehož půdorys si můžete prohlédnout na obrázku. Mára se ale rozhodl, že Alešův byt zamoří nepříjemnými mravenci faraony. Faraoni po bytu šíleně rychle pobíhají a to ještě navíc šíleným způsobem – můžete uvažovat, že jednou za pět minut se 60% mravenců přesune do sousedních místností a jenom 40% jich zůstává pobíhat ve stejné místnosti, co předtím. Přitom se rovnoměrně rozbíhají do sousedních místností (když má místnost dvoje dveře, tak 30% jich přeběhne do jedné a 30% do druhé, když má troje dveře, tak se rozdělí po 20%). A to se opakuje každých pět minut (uvažujte jenom kroky přesně po pěti minutách). Faraonům se v bytě líbí, a tak neutíkají ven. Na druhou stranu se faraoni nemají šanci jinak dostat do bytu než propašováním, a to dělá jenom Mára, takže jinak ani faraoni v bytu nepřibývají.

a) Když Mára zlomyslně umístí 1000 faraonů do předsíně (D), kolik faraonů bude v jednotlivých místnostech po pěti minutách? Kolik jich bude po deseti minutách a po patnácti minutách? (2 body)

b) Pokud jsme našli v místnostech počty mravenců $N_A = 12$, $N_B = 25$, $N_C = 25$ a $N_D = 37$, jak byli mravenci rozmístění před pěti minutami? (1 bod)

Bonus Kolik mravenců by bylo v místnostech po hodně dlouhé (prakticky nekonečné) době, když by Mára rozmístil faraony jako v bodu a)? Závisí to na tom, jak Mára mravence rozmístil? A nejrafinovanější otázka – ustálí se počet mravenců na jedné hodnotě, nebo bude oscilovat? (bod/y navíc)

Karel si vzpomněl na Jordanův tvar matice při prohledávání literatury.

Předpokládejme, že počty mravenců v jednotlivých místnostech jsou na začátku A_0, B_0, C_0 a D_0. Naším cílem je vyjádřit rozložení mravenců do místností po pěti minutách jako funkci těchto hodnot. Označme počty mravenců v jednotlivých místnostech po pěti minutách A_1, B_1, C_1 a D_1. Mravenci neumírají ani nepřibývají, takže pro každou místnost musí platit, že

$$\#\text{ mravenců po 5 minutách} = \#\text{ mravenců, kteří neodejdou} + \#\text{ mravenců, kteří přijdou.}$$

Počet mravenců, kteří z místnosti neodejdou, je vždy 40 % současného počtu. Počet mravenců, kteří přijdou, také známe. Například o předsíni D víme, že do ní přijde 60 % mravenců z místnosti A, ale jenom 30 % mravenců z místností B a C, protože ty mají dvoje dveře. Napíšeme-li si stejným způsobem procenta pro každou místnost, dostáváme

$$\begin{aligned}
A_1 &= 0{,}4A_0 + 0{,}2D_0\,,\\
B_1 &= 0{,}4B_0 + 0{,}3C_0 + 0{,}2D_0\,,\\
C_1 &= 0{,}4C_0 + 0{,}3B_0 + 0{,}2D_0\,,\\
D_1 &= 0{,}4D_0 + 0{,}6A_0 + 0{,}3B_0 + 0{,}3C_0\,.
\end{aligned}$$

Začínali jsme s mravenci pouze v předsíni, neboli platí $A_0 = 0$, $B_0 = 0$, $C_0 = 0$ a $D_0 = 1000$. Dosazením těchto hodnot zjistíme, že po pěti minutách je rozložení mravenců $A_1 = 200$, $B_1 = 200$, $C_1 = 200$ a $D_1 = 400$. Pokud tyto hodnoty dosadíme do naší rovnice jako hodnoty s indexem 0, získané hodnoty s indexem 1 budou hledané rozložení mravenců po

10 minutách (označme ho indexem 2). To samé pak zopakujeme ještě jednou a získáme rozložení po 15 minutách. Výsledné hodnoty jsou

$$A_2 = 160,\ B_2 = 220,\ C_2 = 220,\ D_2 = 400\,,$$
$$A_3 = 144,\ B_3 = 234,\ C_3 = 234,\ D_3 = 388\,.$$

V úkolu *b* máme vlastně zadány hodnoty A_1, B_1, C_1 a D_1 a zajímají nás odpovídající hodnoty A_0, B_0, C_0 a D_0, které však pro přehlednost označíme indexem b. Problém se tedy redukuje na to, vyřešit tuto soustavu čtyř lineárních rovnic o čtyřech neznámých

$$\begin{aligned}
12 &= 0{,}4A_\mathrm{b} + 0{,}2D_\mathrm{b}\,,\\
25 &= 0{,}4B_\mathrm{b} + 0{,}3C_\mathrm{b} + 0{,}2D_\mathrm{b}\,,\\
25 &= 0{,}4C_\mathrm{b} + 0{,}3B_\mathrm{b} + 0{,}2D_\mathrm{b}\,,\\
37 &= 0{,}4D_\mathrm{b} + 0{,}6A_\mathrm{b} + 0{,}3B_\mathrm{b} + 0{,}3C_\mathrm{b}\,.
\end{aligned}$$

Ve škole vás možná učili metody jako Gaussova eliminace, kterými se takové soustavy řeší. Je však dobré si nejdříve ušetřit práci a využít vlastností problému, který popisujeme. V našem případě jsou místnosti B a C naprosto ekvivalentní a tedy lze očekávat, že pokud je v nich stejný počet mravenců, byl v nich stejný počet mravenců i před 5 minutami, neboli $B_\mathrm{b} = C_\mathrm{b}$. To si můžete ověřit i odečtením druhé a třetí rovnice. Tím jsme zredukovali jak počet proměnných, tak počet rovnic na 3. Dále už můžete například vyjádřit A_b z první rovnice, dosadit do poslední rovnice, následně z ní vyjádřit B_b a dosadit do druhé rovnice a již můžete vypočítat D_b a zpětným dosazováním i ostatní hodnoty. Výsledek je

$$A_\mathrm{b} = 13,\ B_\mathrm{b} = 26,\ C_\mathrm{b} = 26,\ D_\mathrm{b} = 34\,.$$

Metodu, kterou jsme použili v bodu *a* pro výpočet rozdělení po 5, 10 a 15 minutách můžeme iterovat libovolně dlouho. Předpokládejme, že postupnou iterací se budeme blížit nějakému konstantnímu rozdělení. Konstantním rozdělením máme na mysli to, že když na něj znovu provedeme jeden krok této iterace, dostaneme zase to samé rozdělení. Tato podmínka nám stačí na to, aby jsme takové rovnovážné rozdělení našli, protože jí můžeme přepsat jako

$$\begin{aligned}
A_\mathrm{eq} &= 0{,}4A_\mathrm{eq} + 0{,}2D_\mathrm{eq}\,,\\
B_\mathrm{eq} &= 0{,}4B_\mathrm{eq} + 0{,}3C_\mathrm{eq} + 0{,}2D_\mathrm{eq}\,,\\
C_\mathrm{eq} &= 0{,}4C_\mathrm{eq} + 0{,}3B_\mathrm{eq} + 0{,}2D_\mathrm{eq}\,,\\
D_\mathrm{eq} &= 0{,}4D_\mathrm{eq} + 0{,}6A_\mathrm{eq} + 0{,}3B_\mathrm{eq} + 0{,}3C_\mathrm{eq}\,.
\end{aligned}$$

Řešením této soustavy, které splňuje podmínku na zachování mravenců

$$A_\mathrm{eq} + B_\mathrm{eq} + C_\mathrm{eq} + D_\mathrm{eq} = 1000\,,$$

jsou hodnoty

$$A_\mathrm{eq} = 125,\ B_\mathrm{eq} = 250,\ C_\mathrm{eq} = 250,\ D_\mathrm{eq} = 375\,.$$

Všimněte si, že toto řešení je nezávislé na počátečním rozložení mravenců. Jediné, co jsme předpokládali, bylo, že počáteční rozložení musí být takové, aby se postupem času dostalo do konstantního stavu. Ukazuje se, že v našem případě je to pravda pro libovolnou počáteční podmínku. Důkaz je jednoduché cvičení, nicméně se neobejde bez znalosti maticového počtu. Ti z vás, co matice a jejich vlastní čísla znají, si to určitě dokáží dokázat sami. Ostatní si můžou udělat jednoduchou numerickou simulaci. Přesvědčte se, že libovolnou počáteční podmínku můžete složit pouze ze situací, kdy začínáte s 1000 mravenci pouze v jedné z místností. Numericky poté proveďte mnohonásobné iterace pro tyto čtyři různé případy a ukažte, že každý opravdu skončí v námi nalezeném rovnovážném stavu. Z toho také plyne, že počty mravenců nemůžou začít oscilovat.

Jan Humplík
honza@fykos.cz