

## Úvodem

Milí řešitelé!

Jistě jste neměli šanci si nevšimnout blížících se Vánoc, svátků klidu, míru a fyziky, takže jste určitě blažení, že držíte v ruce již třetí číslo letošního FYKOSu, kde najdete jak vzorová řešení minulé série, tak i zadání série aktuální, kterou si můžete zpříjemnit nadcházející svátky.

Při řešení první úlohy se můžete těšit na tento a všechny následující konce světa, druhá a třetí úloha vám prozradí, jak vážný je váš vztah s mechanikou. Další dvě zpříjemní sváteční atmosféru s tématy padající bomby a kruté sibiřské zimy. Problémová úloha vás vynese do oblak a samozřejmě nechybí ani úloha experimentální a seriálová.

Veselé Vánoce a spoustu skvělých nápadů při řešení přejí

*Organizátoři*



Zadání III. série



*Termín uploadu: 29. 1. 2013 20.00*

*Termín odeslání: 28. 1. 2013*

### Úloha III.1 ... konjunkce

2 body

Oblíbeným tématem proroků kosmických katastrof jsou konjunkce planet. Představte si, že je poledne a jedna taková konjunkce zrovna nastala. O kolik nejvíce procent můžete být lehčí, pokud uvažujeme, že Země je počátkem polopřímky, na které leží všechny velké planety a Slunce, vůči situaci bez ostatních planet a Slunce?

### Úloha III.2 ... padni komu padni

2 body

Pustíme z klidu z ruky kuličku o průměru  $r$  ze střechy dolů. Předpokládejme, že můžeme zanedbat odpor vzduchu. Jaký se nám bude jevit poloměr této kuličky v závislosti na čase? Předpokládejme, že se na kuličku díváme přímo ze shora a že v okamžiku upuštění kuličky byla  $x_0$  pod našima očima.

### Úloha III.3 ... upečené brzdy

4 body

Jakou rychlostí máme jet autem z kopce, abychom co nejvíce zahřívali brzdy? Uvažujte, že rozdíl teploty vzduchu a teploty brzd je úměrný brzděnému výkonu.

### Úloha III.4 ... nadzvuková nebo podzvuková?

4 body

Uvažujte bombu padající volným pádem svisle dolů na cíl. Po celou dobu pohybu, který začíná z klidu, vydává vlivem tření o vzduch zvuk, který se šíří rychlostí  $c = 340 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Jaká je maximální možná rychlost dopadu, aby ti, na které bomba dopadne, ji ještě za živa slyšeli?

**Úloha III.5 ... Gazprom**

5 bodů

Na plynovodu na daleké Sibiři, kterým teče zkapalněný zemní plyn, došlo k havárii a bylo nutné jej uzavřít. Spočítejte, jakou práci musel vykonat Váňa Vasiljevič, který byl vyslán k zásobníku zavřít výborně promazaný deskový ventil na příslušné lince. Jakou sílu musel během tohoto aktu vynakládat (vyjádřete ji v závislosti na rozumně vybrané veličině)? Ventil si představte jako desku, která je postupně vsouvána ze strany napříč do potrubí. Ve velkém rezervoáru, který je na linku připojen, je tlak  $p = 2 \text{ MPa}$ , deskový ventil má tloušťku  $d = 10 \text{ cm}$ , potrubí má čtvercový průřez o straně  $a = 1 \text{ m}$  a zkapalněný plyn o hustotě  $\rho = 480 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  jím protéká s průtokem  $q = 20 \text{ m}^3\cdot\text{s}^{-1}$ .

**Úloha III.P ... protikonspirační**

5 bodů

Zamyslete se nad tím, na kterých parametrech a jak může záviset délka kondenzační čáry za letadlem. Tyto parametry se pokuste odhadnout či vyhledat a určete možné délky čar. Na základě vašich úvah vyvráťte internetový mýtus o tzv. chemtrails, práškovacích letadlech, která na obyvatele spouštějí jedovaté látky.

**Úloha III.E ... válení sudů**

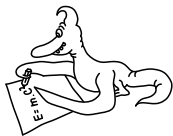
8 bodů

Změřte závislost rychlosti na čase plechovky, která je zcela zaplněná vodou a která se rozjíždí z klidu po nakloněné rovině. Použijte nakloněnou rovinu, která je dlouhá alespoň dva metry a je rovná, bez hrbolů a není prohnutá. Experiment můžete realizovat například natočením a zpracováním videí či měřením doby, za kterou plechovka sjede vždy určitý úsek dráhy.

**Úloha III.S ... tokamak**

6 bodů

- Spočítejte specifický odpor vodíkového plazmatu při teplotě  $1 \text{ keV}$  a srovnajte ho s odporem běžně používaných vodičů.
- Spočítejte, jak velký proud plazmatu je zapotřebí k vytvoření dostatečně silného poloidálního magnetického pole v tokamaku, který má hlavní poloměr  $0,5 \text{ m}$ . Toroidální pole vytváří cívky navinuté okolo torusu s hustotou vinutí  $20$  závitů na metr, kterými prochází proud  $40 \text{ kA}$ . Poloidální pole by mělo mít velikost zhruba  $1/10$  pole toroidálního.
- Pokuste se libovolným nápaditým způsobem vytvořit fyzický model siločar v tokamaku, tento model nafotťe a pošlete spolu s řešením.



## Řešení II. série

## Úloha II.1 ... z Prahy do Brna

2 body; průměr 1,74; řešilo 74 studentů

Centra měst Drážďan a Vídně jsou od sebe vzdálena zhruba  $d = 370$  km vzdušnou čarou po Zemi. O co kratší by byla vzdálenost mezi nimi, pokud bychom mohli jít přímým tunelem skrz Zemi? Zanedbejte rozdíl nadmořských výšek, ve kterých jsou města položena. Na závěr můžete srovnat i délku cesty, kterou byste mezi městy jeli autem.

Nápověda Aby byla tato úloha jednoduchá, je zde nápověda. Goniometrické funkce můžeme pro malé úhly aproximovat (tedy přiblížit) jako

$$\begin{aligned}\sin \alpha &\approx \alpha - \frac{\alpha^3}{6}, \\ \cos \alpha &\approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}, \\ \operatorname{tg} \alpha &\approx \alpha + \frac{\alpha^3}{3},\end{aligned}$$

kde úhel dosazujeme v radiánech. Toho můžeme využít pro vyjádření neznámé v rovnici, kde vystupuje jak samotný úhel, tak i obsažený v nějaké goniometrické funkci.

Karel chtěl zase něco vytunelovat.

Vzdálenost měst  $s_p$  po povrchu lze vyjádřit pomocí vzorce pro délku kruhového oblouku

$$s_p = R_z \alpha,$$

kde  $R_z$  je poloměr Země a  $\alpha$  je úhel, který vytínají spojnice měst se středem Země. Z tohoto vztahu můžeme snadno vyjádřit

$$\alpha = \frac{s_p}{R_z}.$$

Vzdálenost měst  $s_t$  při cestě hypotetickým tunelem lze za znalosti úhlu  $\alpha$  vyjádřit jako (viz obrázek 1)

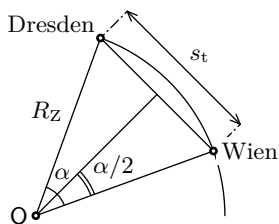
$$s_t = 2R_z \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (1)$$

Pro zjednodušení můžeme pro malé úhly aproximovat sinus prvními dvěma členy Taylorovy řady, tedy

$$\sin \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^3}{48}.$$

Po dosazení této aproximace do vztahu (1) vychází

$$s_t \approx 2R_z \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^3}{48} \right) = R_z \left( \alpha - \frac{\alpha^3}{24} \right) = R_z \left( \frac{s_p}{R_z} - \frac{s_p^3}{24R_z^3} \right) = s_p - \frac{s_p^3}{24R_z^2},$$



Obr. 1: Tunnel z Drážďan do Vídně

a tedy

$$\Delta s = s_p - s_t = \frac{s_p^3}{24R_z^2}.$$

Po dosazení  $s_p = 370$  km a  $R_z = 6\,378$  km vychází  $\Delta s = 52$  m.

Odhadnout dobu cesty mezi těmito dvěma městy je záludné, neboť je potřeba znát průměrnou rychlost jízdy. Co ale můžeme snadno vyjádřit, je relativní změna doby jízdy při jízdě tunelem za předpokladu, že průměrná rychlost jízdy na povrchu je stejná jako průměrná rychlost jízdy tunelem

$$\frac{\Delta t}{t_p} = \frac{\frac{\Delta s}{v}}{\frac{s_p}{v}} = \frac{\Delta s}{s_p}.$$

Po dosazení vychází  $\Delta t/t_p = 0,014\%$ , což je naprosto zanedbatelná hodnota. Pokud by průměrná rychlost činila např.  $v = 100$  km·h<sup>-1</sup>, pak by rozdíl doby jízdy při cestě po povrchu a tunelem činil zhruba  $\Delta t = 1,9$  s, což při celkové době jízdy 3 hodiny 42 minut nehraje opravdu žádnou roli.

Nakonec můžeme srovnat vzdálenost měst při cestě tunelem se vzdáleností měst při cestě po silnici. Podle webu <http://mapy.cz> je nejkratší cesta z Dražďan do Vídně dlouhá 438 km. Zjišťujeme tedy, že „klikatost“ silnice má na délku cesty mnohem větší vliv než to, že je Země kulatá.

*Zdeněk Jakub*

*zdenekjakub@fykos.cz*

## Úloha II.2 . . . hollow Earth

2 body; průměr 1,81; řešilo 73 studentů

*Kdyby se všechna hmota Země vzala a přemodelovala se na kulovou slupku o tloušťce  $d = 1$  km (se stejnou hustotou), jaký by tato nová „Země“ měla vnější poloměr? Jaké by bylo gravitační zrychlení na jejím vnějším povrchu?*

*Karel neustále vymýšlí nerealistické myšlenkové experimenty*

Uvažujme poloměr Země  $R_z = 6\,378$  km. Objem koule s tímto poloměrem je

$$V_z = \frac{4}{3}\pi R_z^3.$$

Objem kulové slupky o vnějším poloměru  $R_S$  a tloušťce  $d$  lze přesně vyjádřit jako

$$V_S = \frac{4}{3}\pi [R_S^3 - (R_S - d)^3] = \frac{4}{3}\pi (3R_S^2d - 3R_Sd^2 + d^3).$$

Pro  $d \ll R_S$  lze zanedbat členy  $d$  v druhé a vyšší mocnině. Požadujeme, aby se objem slupky a objem Země rovnaly. Dostáváme tedy rovnost

$$\begin{aligned} R_z^3 &\approx 3R_S^2d, \\ R_S &\approx \sqrt{\frac{R_z^3}{3d}} \doteq 2,9 \cdot 10^5 \text{ km}. \end{aligned}$$

Jelikož Země bude stále sféricky symetrická, bude tvořit sféricky symetrické, tedy centrální, silové pole. V takovémto poli je zrychlení nepřímou úměrné druhé mocnině vzdálenosti od středu

symetrie, tedy od středu koule.<sup>1</sup> Ta je v našem případě  $R_S$ . Pokud si uvědomíme, že zrychlení na povrchu Země je nyní

$$g = G \frac{M_Z}{R_Z^2},$$

můžeme pomocí tohoto vyjádřit i nové gravitační zrychlení

$$g' = G \frac{M_Z}{R_S^2},$$

$$g' = g \frac{R_Z^2}{R_S^2} \approx 3G \frac{d}{R_Z} \doteq 4,6 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

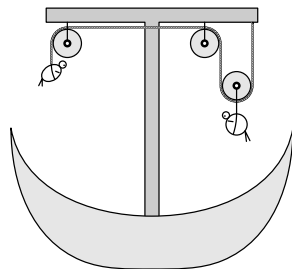
Zrychlení na povrchu takovéto Země by tedy bylo asi 2 000krát slabší než na naší Zemi.

**Tomáš Bárta**  
tomas@fykos.cz

### Úloha II.3 ... Benátčané

4 body; průměr 3,18; řešilo 38 studentů

Dva mladí, ale bohužel poněkud prostorově výraznější, Benátčané Paolo a Francesca Muschetti (o hmotnostech  $m_P = 180 \text{ kg}$  a  $m_F = 130 \text{ kg}$ ) by se chtěli spolu projet na gondole. Žádný gondoliér je ale nechce vzít na svou loď, protože ví, že by je všechny tři loď neunesla. Chytrý gondoliér Jacopo ale vymyslel rampu, na kterou umístil tři kladky dle obrázku. Skrz kladky provlékl lana a oba mladé Benátčany na ně upevnil (viz obrázek) každého na opačný konec, tak, že nejprve byla nahoře lehčí Francesca a po jisté chvíli ji v této pozici vystřídal těžší Paolo. Jak vysoká musí být rampa, aby gondola stihla přejet přes kanál? Doba jízdy je  $\tau = 60 \text{ s}$ . Předpokládejme, že při použití tohoto zařízení se již gondola nepotopí. Zanedbejte veškeré tření, hmotnost lana a momenty setrvačnosti kladek.



*Lada se vydala na výlet*

Úloha má dvě řešení, v závislosti na tom, jak budou Paolo a Francesca uchyceni. Oběma řešením je společná strategie výpočtu. Jak Paolo, tak Francesca se budou na kladkách pohybovat rovnoměrně zrychleným pohybem a tato zrychlení budou jednoznačně dána jejich hmotnostmi a geometrií úlohy. Budeme-li tedy chtít spočítat nejnižší možnou výšku rampy, aby se gondola nepotopila, hledáme ve skutečnosti dráhu, kterou Francesca, resp. Paolo urazí za určitý čas  $\tau$ , nebo  $\tau/2$ . Podívejme se tedy na oba případy zvlášť.

Nejprve případ, kdy Francesca je na levé kladce, Paolo na pravé – viz obrázek. Rozborem sil, které na Benátčany působí, získáváme rovnice:

$$m_P a_P = m_P g - 2T,$$

$$m_F a_F = m_F g - T,$$

$$a_F = -2a_P.$$

První rovnice je pohybová rovnice Paola: síla, která na něj působí, je rozdílem tíhové síly a dvojnásobku napětové síly lana  $T$ . Za kladný směr uvažujeme směr působení tíhové síly. Druhá

<sup>1</sup>A to díky tomu, že tok gravitačního pole libovolnou uzavřenou plochou splňuje podmínku, které říkáme *Gaussova věta*.

rovnice je pohybová rovnice Francesky. Rovnice třetí je vazební podmínka, dává do souvislosti zrychlení Francesky  $a_F$  a Paola  $a_P$ . Jednoduchými úpravami dostáváme  $a_P = -1,12 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  a  $a_F = 2,24 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ . Paolo se tedy pohybuje vzhůru – znaménko zrychlení je záporné.

Vzhledem k tomu, že Francesca je na začátku nahoře a Paolo v půlce výšky rampy  $l$ , gondoliér Jacopo nemůže ani jednomu z nich udělit počáteční rychlost, která by efektivně zmenšila nároky na výšku rampy. Její minimální výšku tak získáme jako

$$l = \frac{a_F t^2}{2},$$

neboť víme, že Francesca je na začátku nahoře a po uplynutí doby  $t = \tau = 60 \text{ s}$  bude právě dopadat na palubu gondoly. Číselně získáváme závratnou hodnotu  $l = 4032 \text{ m}$ .

Nyní rozebereme případ, kdy Francesca je na pravé kladce, Paolo na levé. Analogickou úvahou získáme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} m_P a_P &= m_P g - T, \\ m_F a_F &= m_F g - 2T, \\ a_P &= -2a_F, \end{aligned}$$

jejímž řešením je  $a_P = 5,3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  a  $a_F = -2,65 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ . Vidíme, že zrychlení Paola  $a_P$  má kladné znaménko, v momentě, kdy je Paolo na palubě gondoly a Francesca ve výšce  $l$ , může gondoliér udělit Paolovi určitou počáteční rychlost (zkuste si explicitně spočítat její velikost!) takovou, že se v půlce plavby bude nacházet přesně v maximální výšce  $l$  s nulovou rychlostí. Minimální výšku gondoly  $l$  tak získáme jako

$$l = \frac{a_P t^2}{2},$$

kde  $t = \tau/2 = 30 \text{ s}$ . Číselně vychází  $l = 2385 \text{ m}$ , tedy nižší hodnota než v prvním případě. Paolo a Francesca tak nejspíš budou nakonec muset jít pěšky. . .

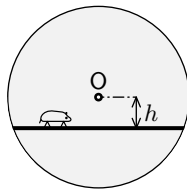
*Pavel Irínkov*  
pavel@fykos.cz

## Úloha II.4 . . . křeček

5 bodů; průměr 3,39; řešilo 33 studentů

*Rado si pro svého křečka Bobka přichystal speciální kolečko. Celá soustava se může otáčet okolo osy procházející bodem O, který je středem kolečka, a ke kolečku je vodorovně připojená deska ve vzdálenosti  $h$  od osy rotace, viz obrázek. Jak se má křeček Bobek pohybovat po desce, aby deska zůstala po celou dobu pohybu vodorovně? Koeficient tření mezi křečkem a deskou je  $f$ .*

*Rado se pečlivě stará o svého křečka.*



Najprv sa pozrime na celú situáciu bez škrečka, kedy doska stojí vodorovne. Ťažisko dosky je presne v jej strede, takže nevytvára žiadny moment sily vzhľadom na os prechádzajúcu stredom O. Celá sústava je v pokoji, nič sa neotáča.

Položme teraz škrečka na dosku (ak škrečka položíme do stredu dosky, tak nastane predchádzajúci prípad) a pozorujme, čo sa deje. Škrečok teraz vytvára nenulový moment sily

$$M_1 = mg(\sin \alpha)R = mgx,$$

pôsobiaci na dosku vzhľadom na os prechádzajúcu stredom  $O$ . Celé kolečko sa teraz otáča proti smeru hodinových ručičiek.

Na to, aby sa kolečko neotáčalo, musí platiť rovnováha momentov síl pôsobiacich na dosku vzhľadom na os prechádzajúcu stredom  $O$ .

Odkiaľ sa teda musí zobrať ďalší moment sily, ktorý zabezpečí, aby sa kolečko neotáčalo? Nech sa teda škrečok rozbehne napravo so zrychlením  $a$ . Škrečok sa po doske dokáže pohybovať vďaka treniu medzi ním a doskou. Zároveň však podľa zákona akcie a reakcie ale pôsobí škrečok na dosku silou  $F = -ma$ , teda vytvára moment sily

$$M_2 = mgf(\cos \alpha)R = -ma(\cos \alpha)R = -mah,$$

pôsobiaci na dosku vzhľadom na os prechádzajúcu stredom  $O$ . Z rovnováhy momentov síl  $M_1 = M_2$  pôsobiacich na dosku vzhľadom na os prechádzajúcu bodom  $O$  dostávame

$$a = -\frac{g}{h}x,$$

kde vidíme, že na to, aby bol celý systém stále v klude je potrebné, aby sa škrečok pohyboval harmonickým pohybom s uhlovou frekvenciou  $\omega^2 = g/h$ .

Pár záverečných poznámok. Prečo sme dostali práve  $a \sim -x$ , a nie  $a \sim x$ ? Na to si však musíme uvedomiť, že  $a$  je zrychlenie škrečka, nie dosky. Ďalej pre koeficient trenia  $f$  medzi doskou a škrečkom platí, že veľkosť  $gf \leq a$ , z čoho dostávame, že maximálna výchylka škrečka nemôže byť hociaká, ale môže nadobúdať iba hodnoty z intervalu  $(-fh, fh)$ .

### Poznámky k došlým riešeniam

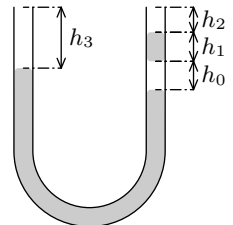
Niektorí riešitelia dostali „až“ na znamienko rovnicu pre kmitavý pohyb. Trebalo si však poriadne rozmyslieť, kde a akým smerom pôsobí ktorá sila. Formálne je to *iba* znamienko, no fyzikálne sú to principiálne odlišné rovnice. Ďalej bola pomerne častá chyba uvažovanie maximálnej amplitúdy pohybu ako  $\sqrt{R^2 - h^2}$ , čo je však nesprávne, dôvod sme vysvetlili vyššie. Našli sa však aj kreatívny riešitelia, ktorí riešili úlohu prizvaním Bobkových kamarátov aby mu pomohli balancovať celé koleso svojou prítomnosťou.

**Radomír Gajdošoci**  
radomir@fykos.cz

### Úloha II.5 ... horko u U-trubice

5 bodů; průměr 2,73; řešilo 26 studentů

V *U*-trubici je rtuť se vzduchovou bublinou výšky  $h_0$  v jednom rameni, jak můžete vidět na obrázku. Co se stane, pokud se okolní atmosféra změní následujícími způsoby? Předpokládejte, že rtuť při změně teploty nemění objem (hustotu), stejně tak i sklo, ze kterého je *U*-trubice, a vzduch se chová jako ideální plyn. Původní stav okolní atmosféry je popsán teplotou  $T_0 = 300\text{ K}$ , tlakem  $p_a = 10 \cdot 10^5\text{ Pa}$  a složením je vzduch. Předpokládejte, že celý systém je stále v termodynamické rovnováze, rovněž bublinu považujte za váleček.



- a) Okolní teplota se zvýší na dvojnásobek a přitom budou ramena U-trubice volná.  
 b) Okolní teplota se zvýší na dvojnásobek, ale před touto změnou pevně uzavřeme oba konce U-trubice.  
 c) Okolní teplota se zvýší na dvojnásobek, ale před zahřátím pevně uzavřeme pouze jeden konec U-trubice.

Pro všechny body zadání určete výsledné rozměry bubliny ve rtuti a výškový rozdíl mezi hladinami v obou částech U-trubice.

Bonus Započtete lineární teplotní roztažnost rtuti.

*Karel se zapotil.*

Nejdříve se podíváme na to, co nám říká zadání, co budeme uvažovat a co můžeme zanedbat. Dle zadání máme zanedbat teplotní roztažnost rtuti a skla, proto se nebude měnit „délka“ jednotlivých částí rtuťového sloupce, viz Guldinova věta.<sup>2</sup> Ale určitě máme uvažovat vlastnosti atmosféry. Protože vzduch má deset tisíckrát menší hustotu než rtuť, zanedbáme jeho hustotu proti hustotě rtuti, což znamená, že nebudeme uvažovat změnu tlaku vzduchu zapříčiněnou okolní gravitací. U rtuti ale již gravitační interakci započítat musíme. Dále je v zadání uvedeno, že je vše v termodynamické rovnováze, což znamená, že teplota vzduchu uvnitř U-trubice je stejná jako teplota vzduchu okolo.

### Rovnováha

Budou-li oba konce volné, tak na horních hladinách rtuti bude atmosférický tlak a musíme z hydrostatické rovnováhy určit rozdíl  $h_2^0 - h_3^0$  v závislosti na  $h_0^0$ ,  $h_1^0$  a  $h_2^0 + h_3^0$  (celkové množství rtuti v trubici).

Napíšeme proto rovnici pro hydrostatický tlak ve spodní části trubice

$$p_a + (H - h_3^0)\rho_{\text{Hg}}g = p_a + (H - h_2^0)\rho_{\text{Hg}}g - h_0^0\rho_{\text{Hg}}g,$$

kde jsme označili  $H$  celkovou výšku trubice. Jednoduchou algebraickou úpravou dostáváme

$$h_3^0 - h_2^0 = h_0^0, \quad (2)$$

kde horní index nula značí *rovnovážný stav*, nikoli umocňování. Protože jde o počáteční stav, nemá cenu se zajímat o velikost bubliny, její výška je stále  $h_0$ . Ještě si dopočítáme, jaký bude tlak v bublině. Protože na bublinu tlačí jednak atmosféra, jednak rtuť výšky  $h_1$ , bude tlak uvnitř roven

$$p_{b_0} = p_a + h_1\rho_{\text{Hg}}g.$$

### Volné konce

Pokud zvýšíme teplotu na dvojnásobek, jediná část našeho systému, které se to dotkne, je bublina. Její tlak se nezmění, protože stále je nad ní atmosférický tlak a kapka výšky  $h_1$ , proto bude tlak uvnitř  $p_{b_0}$ . Vzhledem k platnosti stavové rovnice pro ideální plyn platí  $h_0 = 2h_0^0$ , protože jsme teplotu zvýšili na dvojnásobek za zachovávaného se tlaku. Můžeme užít stejného postupu jako v předešlém případě a dostáváme podmínku pro rovnováhu, tj. rozdíl hladin ve tvaru

$$\Delta = h_3 - h_2 = h_0 = 2h_0^0,$$

který je stejný jako velikost bubliny.

<sup>2</sup>[http://cs.wikipedia.org/wiki/Guldinova\\_věta](http://cs.wikipedia.org/wiki/Guldinova_věta)



*Oba konce uzavřené*

Nyní již bude do hry vstupovat kromě hydrostatiky též termodynamika, protože budeme muset uvažovat změny tlaku jednotlivých částí plynu. Napišeme soustavu rovnic popisující danou situaci, jednak to budou stavové rovnice pro ideální plyn, kde označíme  $\Lambda = \varrho_{\text{Hg}}g$ , jednak rovnice rovnováhy tlaků pro oba kusy rtuti, nakonec také podmínku neměnné délky trubice, resp. rtuti v ní

$$p_3 + (H - h_3)\Lambda = p_2 + h_1\Lambda + p_0 + (H - h_0 - h_1 - h_2)\Lambda, \quad (3)$$

$$p_0 = p_2 + h_1\Lambda, \quad (4)$$

$$\frac{(p_a + h_1\Lambda)h_0^0}{T_0} = \frac{p_0h_0}{T},$$

$$\frac{p_a h_2^0}{T_0} = \frac{p_2 h_2}{T},$$

$$\frac{p_a h_3^0}{T_0} = \frac{p_3 h_3}{T},$$

$$h_0 + h_2 + h_3 = h_0^0 + h_2^0 + h_3^0 = L_0, \quad (5)$$

kde horní index 0 označuje klidovou délku, která byla určena v předchozím bodu. Toto je soustava rovnic pro neznámé  $h_0, h_2, h_3, p_0, p_2$  a  $p_3$ .

Nejdříve zavedeme substituci  $p_i = \alpha_i/h_i$  pro  $i = 0, 2, 3$ , kde  $\alpha_i$  jsou číselné konstanty. Dále v rovnici (3) zjistíme, že při použití rovnice (5) vymizí všechny členy obsahující  $h$  až na  $h_3$  a dále zbudou členy obsahující tlak. Do rovnice (4) pouze dosadíme z naší substituce za  $p_i$ . Dostáváme

$$\frac{\alpha_3}{h_3} = \frac{\alpha_2}{h_2} + \frac{\alpha_0}{h_0} + (L_0 + 2h_3)\Lambda,$$

$$\frac{\alpha_0}{h_0} = \frac{\alpha_2}{h_2} + h_1\Lambda,$$

$$h_3 = L_0 - h_0 - h_2.$$

V našem případě po dosazení za  $\alpha_0/h_0$  do první rovnice, patričném roznásobení a dosazení  $h_3 = L_0 - h_0 - h_2$ , dostáváme

$$\alpha_3 h_2 = 2\alpha_2(h_0 + h_2) + (h_1 + L_0 - 2h_0 - 2h_2)h_2(L_0 - h_0 - h_2)\Lambda,$$

$$\alpha_0 h_2 = \alpha_2 h_0 + h_0 h_1 h_2 \Lambda,$$

což můžeme upravit na

$$0 = 2h_2^3\Lambda + h_2^2(-3L_0 + 4h_0 - h_1)\Lambda + h_2(2h_0^2 - h_0(h_1 + 3L_0) - \alpha_3 + 2\alpha_2 + h_1L_0 + L_0^2) + 2\alpha_2 h_0,$$

$$0 = h_2 h_0 h_1 \Lambda - h_2 \alpha_0 + h_0 \alpha_2 \quad \Rightarrow \quad h_0 = \frac{h_2 \alpha_0}{h_2 h_1 \Lambda + \alpha_2}.$$

Dosadíme do první rovnice za  $h_0$ . Získáme tím analyticky neřešitelnou rovnici pátého stupně pro  $h_2, h_0$  a  $h_3$  získáme pomocí zpětných substitucí. Tím také určíme rozdíl hladin  $\Delta = h_3 - h_2$  a velikost bubliny je  $h_0$ .

*Jeden konec uzavřený*

Je-li jeden z konců uzavřený, tak řešení bude vypadat obdobně jako v předešlém případě, kdy jsme studovali oba konce uzavřené, ale víme, že  $p_2$  resp.  $p_3$  bude atmosférický tlak a také odpadne jedna ze stavových rovnic, která vázala vzdálenost od konce trubice s tlakem. Zde si ukážeme řešení pro případ, kdy je uzavřen pouze pravý konec trubice a levý je volný.

Sepíšeme si stejnou soustavu rovnic jako v úkolu b)

$$\begin{aligned} p_a + (H - h_3)\Lambda &= p_2 + h_1\Lambda + p_0 + (H - h_0 - h_1 - h_2)\Lambda, \\ p_0 &= p_2 + h_1\Lambda, \\ \frac{(p_a + h_1\Lambda)h_0^0}{T_0} &= \frac{p_0h_0}{T}, \\ \frac{p_a h_2^0}{T_0} &= \frac{p_2 h_2}{T}, \\ h_0 + h_2 + h_3 &= h_0^0 + h_2^0 + h_3^0 = L_0, \end{aligned}$$

Opět provedeme substituci za  $p_i$  pomocí  $\alpha_i$  a využijeme poslední rovnice pro zjednodušení rovnice první.

$$\begin{aligned} p_a &= \frac{\alpha_2}{h_2} + \frac{\alpha_0}{h_0} + (L_0 - 2h_0 - 2h_2)\Lambda, \\ \frac{\alpha_0}{h_0} &= \frac{\alpha_2}{h_2} + h_1\Lambda \quad \Rightarrow \quad h_0 = \frac{\alpha_0 h_2}{\alpha_2 + h_1 h_2 \Lambda}, \\ h_3 &= h_0 + h_2. \end{aligned}$$

V tomto případě budeme postupovat analogicky dosazovací metodou. Obdržíme polynom čtvrtého stupně v  $h_2$ ,  $h_0$  a  $h_3$  opět získáme zpětnou substitucí. A rozdíl hladin je pak  $\Delta = h_3 - h_2$ , velikosti bubliny je  $h_1$ .

*Započtení teplotní roztažnosti rtuti*

Myšlenka pro řešení této části je stejná jako v případech předešlých. Jediný rozdíl je v tom, že se změní velikost kapky rtuti dle vztahu

$$h_1 = \Gamma h_1^0,$$

kde opět horní index 0 značí klidovou délku a  $\Gamma = 1 + \alpha\Delta T$  je relativní změna délky rtuti. Dále budeme muset zavést parametr  $L$ , jež označuje celkovou délku trubice. Podmínka pro neměnnost délky trubice a rtuti v ní se změní na

$$L - (h_0^0 + h_2^0 + h_3^0) = (L - (h_0 + h_2 + h_3))\Gamma.$$

Dále bude postup řešení stejný. Musíme akorát dát pozor na to, že se hustota rtuti sníží v poměru odpovídajícím objemové roztažnosti, a proto se změní též hodnota konstanty  $\Lambda$ .

*Započtení teplotní roztažnosti skla*

Pokud bychom chtěli započít též teplotní roztažnost skla, postup bude naprosto stejný jako při započtení pouze teplotní roztažnosti rtuti, akorát budeme uvažovat  $\Gamma'$ . Nejdříve uvažujme, že má rtuť stejnou roztažnost jako sklo, potom se celá aparatura pouze transformuje podobnostní transformací a výsledek bude stejný. Pokud bude teplotní roztažnost rtuti jiná, můžeme nechat rtuť roztáhnout „nadvakrát“ – nejdříve stejně jako sklo a pak ten zbytek, což je opět ekvivalentní případu, kdy se zanedbá roztažnost skla, pouze nakonec uvažovaná roztažnost rtuti musí být jiná než tabulková.

*Lukáš Ledvína*  
lukas1@fykos.cz

**Úloha II.P ... gravitace si žádá větší slovo** 5 bodů; průměr 1,91; řešilo 54 studentů

Co kdyby se „přes noc“ změnila hodnota gravitační konstanty na dvojnásobek a přitom by zůstaly zachovány ostatní fyzikální konstanty na původních hodnotách? A co kdyby se zvětšila stokrát? Rozepište se o různých aspektech – zejména o životě na Zemi a drahách vesmírných objektů.

*Karel zase v zajetí astrofyziky.*

Základnom riešenia bolo uvedomiť si, kde všade (v ktorých javoch) sa objavuje gravitačná konštanta  $G$ , či už priamo alebo nepriamo. Napríklad v gravitačnom zákone sa vyskytuje priamo, kde

$$|\mathbf{F}_G| = G \frac{M_1 M_2}{r_{21}^2}$$

a v rovniciach pre šikmý vrh je nepriamo zahrnutá v gravitačnom zrýchlení  $g$ , kde

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0,x}t, \\ y &= y_0 + v_{0,y}t - \frac{1}{2}gt^2, \end{aligned}$$

kde

$$g = \frac{GM_{\text{Zem}}}{R_{\text{Zem}}^2}.$$

Skôr než začneme rozoberať konkrétne prípady treba povedať ešte dve veci. Javy, ktoré sme tu uviedli, zďaleka nebudú všetky. Pôjde o najvýznamnejšie, ktoré nás napadli. Druhá vec, v pátraní súboru základných konštánt, ktoré priamo určujú konstanty vo všetkých zákonoch známej fyziky, sa zúžil počet na zopár konštánt (medzi nimi je napríklad rýchlosť svetla, Planckova konštanta i gravitačná konštanta), medzi ktorými sa zatiaľ nepodarila nájsť previazanosť, čo však nevylučuje, žeby sa časom mohla nájsť. Budeme predpokladať, že sú nezávislé.

Uvažujme zmenu gravitačnej konstanty  $k$ -násobkom

$$G' = kG,$$

kde  $G$  je pôvodná gravitačná konštanta,  $G'$  je nová gravitačná konštanta a  $k$  je bezrozmerné číslo.

Prvá zjavná vec, ktorá zo zmenou  $G$  prichádza, je zmena gravitácie a už spomínaný šikmý vrh na povrchu Zeme. Zo vzťahu pre gravitačné zrýchlenie dostaneme, že sa  $k$ -násobne zväčší

$$g' = \frac{G' M_{\text{Zem}}}{R_{\text{Zem}}^2} = \frac{kGM_{\text{Zem}}}{R_{\text{Zem}}^2} = kg.$$

Predstavme si malý kanón, ktorý strieľa gule priamo nad seba (vojensky neúčinný kanón). Deň pred zmenou letela guľa do výšky  $h$  a celý pád jej trval čas  $t$ . Keď riešime tento jednoduchý problém, tak dostaneme v závislosti od počiatkových podmienok vzťahy

$$h = \frac{v_0^2}{2g}, \quad t = \frac{2v_0}{g}.$$

Na druhý deň nastala zmena konštanty. Síce kanón dodal guľi rovnakú kinetickú energiu (a tým pádom i hybnosť a rýchlosť), ale namerali sme výšku  $h'$  a čas  $t'$

$$h' = \frac{v_0^2}{2g'} = \frac{h}{k}, \quad t' = \frac{2v_0}{g'} = \frac{t}{k}.$$

Pri šikmom vrhu kanónom je maximálny dostrel dosiahnutý pod uhlom  $45^\circ$  a dostrel  $d$  je

$$d = \frac{v_0^2}{g}.$$

Asi už nikoho neprekvapí, že po zmene konštanty bude nový dostrel  $d'$   $k$ -násobne kratší

$$d' = \frac{v_0^2}{g'} = \frac{d}{k}.$$

Tak vidíme, že pri hodoch sa  $k$ -násobne skrátiť časy hodov, maximálne výšky i dostrely pod konštantným uhlom.

Zábavnejšie to však je v prípade vesmírnych obežníc, a to či už sa týka nášho Mesiaca alebo planét Slnčnej sústavy. Vo všeobecnosti podľa 1. Keplerovho zákona sa objekty v radiálnom gravitačnom poli pohybujú po kuželosečkách. Pohyb po kružniciach je iba jeden špeciálny prípad rýchlosti a vzdialenosti od Slnka a prakticky nedosiahnuteľný, keďže zo všetkých možných rýchlostí tomu zodpovedá práve jediná hodnota rýchlosti. Pohyby planét sú síce približne kružnicové, ale fakticky ide o elipsy s malou výstrednosťou/excentricitou (sploštenosťou dráhy). Pre jednoduchosť však môžeme predpokladať pred zmenou gravitačnej konštanty pohyb planét po kružniciach. Pred zmenu je potom vzťah medzi rýchlosťou planéty  $v_1$  a vzdialenosťou od Slnka  $r_1$  (z rovnosti gravitačnej a dostredivej sily)

$$v_1^2 = \frac{GM_S}{r_1}.$$

Po zmene gravitačnej konštanty majú všetky planéty pôvodné rýchlosti (to znamená rovnaká veľkosť i smer = kolmé na spojnicu so Slnkom) a v novom poli sa budú pohybovať všeobecne po kuželosečkách. Ak sa gravitačná konštantka zväčší, začne na ne pôsobiť väčšia dostredivá sila, ako je potrebná na udržanie na kruhovej dráhe, a preto sa budú pohybovať po elipsách. Jeden vrchol (afélium) bude v mieste, kde sa nachádzali, keď nastala zmena konštanty (lebo rýchlosť je kolmá na spojnicu so Slnkom iba vo vrcholoch elipsy a od tohto bodu sa planéty pohybujú bližšie k Slnku). Je jasné, že potom druhý vrchol (perihélium) je najbližšia vzdialenosť, na ktorú sa dostali k Slnku. Zo zákona zachovania momentu hybnosti a energie vieme túto vzdialenosť vypočítať

$$mv_1 r_1 = mv_k r_k,$$

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{G' M_S m}{r_1} = \frac{mv_k^2}{2} - \frac{G' M_S m}{r_k}.$$

Po dosadení dostaneme takúto kvadratickú rovnicu

$$\frac{r_k^2}{r_1^2}(2k-1) + \frac{r_k}{r_1}(-2k) + 1 = 0.$$

Okrem afélie dostávame aj druhé riešenie

$$r_k = \frac{r_1}{2k-1}.$$

Teraz na základe tohto výsledku môžeme povedať tieto skutočnosti. Ak by klesla gravitačná konštanta na viac ako polovicu ( $0 < k < 0,5$ ), tak všetky planéty budú mať dostatočnú rýchlosť na odlet od Slnka. V tabuľke 1 je vidno pre rôzne  $k$  rôzne najmenšie vzdialenosti planét od Slnka.

planéta	Merkúr	Venuša	Zem	Mars	Jupiter	Saturn	Urán
$r_1$ [AU]	0,39	0,72	1,0	1,52	5,20	9,54	19,18
$r_2$ [AU]	0,13	0,24	0,33	0,51	1,73	3,18	6,39
$r_{100}$ [AU]	0,002	0,004	0,005	0,008	0,026	0,048	0,096

Tabuľka 1: Najmenšie vzdialenosti planét od Slnka pre rôzne  $k$ .

Najskôr si budú v dráhe prekážať susedné planéty. Pri zvyšovaní už pri  $k = 1,19$  nastáva prekryv možných oblastí stretnutia medzi Zemou a Venušou. Pre  $k = 2$  sa jedine neprekrývajú dráhy Jupitera a Marsu. O zábavu sa postará pásma planétok, ktoré je pekne rozložené medzi Marsom a Jupiterom a ktoré bude mať perihélium približne 0,6 AU. To znamená, že by sme sa mohli pripraviť na deštručnú vesmírnu prestrelku. Pri eliptických dráhach sa pohybujú planéty v podstatne väčšom rozsahu vzdialeností od Slnka, čím sa podstatne zvýši vplyv vzájomnej gravitačnej interakcie planét. Takže by sme mohli byť skôr, či neskôr svedkom zrážky planét alebo vyhodenia planéty zo Slnčnej sústavy niektorou z väčších planét. Tak či onak by to boli pre Zem časy nepekné (pekelné alebo mrazivé). Pri pôvodnej gravitačnej konštante je polomer Slnka je 0,0046 AU. Zvýšením gravitačnej konštanty sa polomer Slnka zmenší, ale stále bude mať Slnko so svojou pre Zem nebezpečnou atmosférou rozmer rádovo tisíciny astronomickej jednotky. Pre  $k = 100$  už je jasné, že planéty Merkúr, Venuša a Zem budú míňať Slnko v tesnej blízkosti alebo narazia na jeho povrch. V perihéliu by sa Zem usmažila pri teplote cca 3700 °C (už by sme sa nemohli sťažovať na slabé leto), deň by trval 18 hodín a noc 6 hodín. Pri takej teplote by bola Zem úplne roztopená (až na diamanty a grafit, ktoré by čoskoro zhoreli vo vzduchu) a bola by to lietajúca kvapka magmy (vhodnejší výraz kvapa magmy). Kolízia s inými planétami by bola otázka času.

Ďalším javom, ktorý by gravitačná konštanta skomplikovala život na zemi sú kapilárne javy. Výška  $h$ , do ktorej vystúpi kvapalina v kapiláre, je

$$h = \frac{2\sigma \cos \alpha}{r\rho g},$$

kde  $\sigma$  je povrchové napätie,  $\alpha$  je styčný uhol,  $r$  je polomer kapiláry,  $\rho$  je hustota kvapaliny a  $g$  je gravitačné zrýchlenie. Čiastočne funguje transport vody v pôde, a potom i v úzkych ciev-

nych zvázkoch, na základe kapilarity, čím sa zabezpečuje transport látok. Zmenou gravitačnej konštanty sa zníži výška vztlínania na

$$h' = \frac{2\sigma \cos \alpha}{r\rho g'} = \frac{h}{k}.$$

Tým sa značne skomplikuje transport látok najmä vysokým rastlinám, stromom.

Keďže aspektov, kde sa to odrazí, je skutočne veľa, uvedieme iba zopár príkladov bez podrobnejšej analýzy.

- Zmenou gravitačnej konštanty bude vzduch priťahovaný silnejšie, čím sa zvýši hustota a tlak vzduchu pri povrchu Zeme.
- Aby mohla byť voda v potrubí vytlačená do vyšších poschodí, potrebujeme na to podľa Bernoulliho rovnice tlak. Zmenou gravitačnej konštanty potrebujeme dodať väčšiu potenciálnu energiu, teda budeme potrebovať väčší tlak, ktorý by vykonával prácu.
- Stavby sú síce navrhnuté tak, aby vydržali viac ako maximálnu záťaž (takže  $k = 2$  by asi prežili), ale pri určitej hranici sa prekročí medza pevnosti materiálu a stavby sa zrútia (budovy, mosty, ...).

Úloha bola hodnotená podľa hĺbky analýzy a počtu javov, kde sa zmena odrazí.

**Jakub Kocák**

`jakub@fykos.cz`

## Úloha II.E ... listopadová

8 bodů; průměr 5,30; řešilo 37 studentů

Určete průměrnou plochu listu vámi vybraného stromu (či keře). Nezapomeňte na statistické zpracování vašich dat. Odhadněte, kolik energie ze slunečního záření může váš strom použít pomocí chlorofylu na tvorbu cukrů za jeden den, rok. Karel.

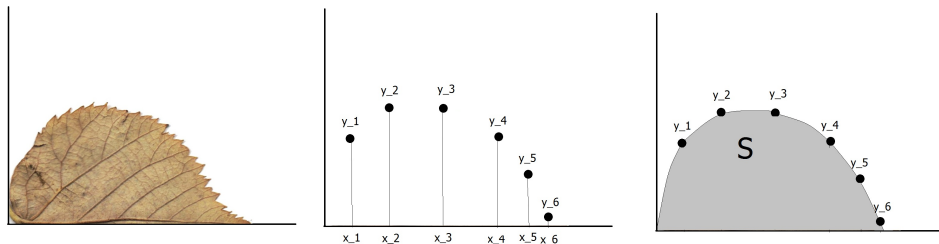
Tato úloha má dvě části, jedna je trochu matematická, druhá je trochu biologická. K našemu pokusu jsme si vybrali buk a javor v parku na Kraví hoře v Brně a z každého stromu nasbírali pokud možno reprezentativní vzorek asi 10–15 listů.

Plocha listu jde určit mnoha různě přesnými způsoby, některé jsou uvedeny a některé i vyzkoušeny v první části vzoráku. Nepřesnosti uvedených metod jsou ale mnohem menší než rozdíly v plochách mezi jednotlivými listy, není proto třeba metody šperkovat do přehnané přesnosti.

### Určení plochy listu

**Čtverečkový papír** Tohle je asi nejjednodušší, v případě jednoho listu i nejrychlejší, způsob – položíme list na čtverečkový papír, obtáhneme a spočítáme, kolik zabere čtverečků. Jak se vyrovnat s nerovnými okraji? Můžeme si pro ně stanovit pravidlo, že budeme odhadovat, jestli list zabere čtvereček nebo půlku čtverečku nebo čtvereček vůbec nezabere. Nebo spočítáme, kolik čtverečků zabere pouze úplně, kolik úplně + alespoň trochu a z těchto dvou čísel uděláme aritmetický průměr. Je jasné, že čím menší list a větší čtverečky vezmeme, tím větší chyby se dopustíme. Nicméně pro velké množství listů je to vcelku pracná metoda, když se dělá ručně.

**Interpolování a integrace** Pokud máme hladký (nejlépe se spojitou derivací okraje) a symetrický list, jako třeba buk, můžeme si ho rozdělit podél osy (procházející řápkem) na dvě části, a obsah každé zjišťovat zvlášť. Řápkovou osu ztotožníme s osou  $x$ , okraj listu dáme třeba do počátku kartézské soustavy souřadnic. Zvolíme si na okraji listů několik hodnot  $y$ , ke kterým najdeme hodnoty  $x$  – budeme tedy mít několik bodů  $[x, y]$ , kterými můžeme proložit vhodný polynom a ten potom (zase třeba numericky) zintegrovat mezi okraji listu. Princip je znázorněn na obrázku.



Obr. 2: Metoda interpolování a integrace

**Monte Carlo** Další, trochu programovací, možností je použití metody Monte Carlo. Naskenujeme list na papíře do počítače, budeme tedy mít list na pozadí o známé ploše. Napíšeme si program, který bude rovnoměrně a náhodně (!) vybírat body z celé plochy a pro každý bod rozhodne, jestli do listu patří, nebo ne. Potom z poměru počtu bodů v listu ku počtu bodů celkem zjistíme obsah plochy listu.

**Počítání pixelů** Pro naše měření jsme si vybrali tento způsob. Je to v podstatě čtverečková metoda v menších rozměrech – list naskenujeme na papír A4 o známé ploše. Naskenovaný obrázek (například v programu Gimp) upravíme tak, že tam, kde je list, bude černá plocha, a jinde bílá. Pak už jednoduše, třeba pomocí histogramu, určíme podíl černých pixelů a všech pixelů a z toho spočítáme obsah listu.

**Zpracování dat** V tomto případě nemůžeme použít obvyklé zpracování (aritmetický průměr, výběrová směrodatná odchylka, atd.), protože hodnoty nesplňují tzv. normální neboli Gaussovo rozložení. My neměříme spoustu hodnot, které by se měly blížit jisté jedné hodnotě, ale listy mají prostě různou svou velikost, která se během jejich života mění a my jsme je zastihli zrovna v nějaké fázi. Podíváme-li se na histogramy, vidíme, že Gaussovo rozdělení nesplňují.

Vhodným popisem výsledku bude medián. Ten zjistíme, když seřadíme všechny naměřené hodnoty podle velikosti a vezmeme tu prostřední (v případě sudého počtu hodnot aritmetický průměr dvou prostředních).

$$S_b = 40 \text{ cm}^2, \quad S_j = 86 \text{ cm}^2.$$

### Odhad energie

U obou vybraných stromů jsme odhadli počet listů  $n$ :  $n_{\text{buk}} = 2000$ ,  $n_{\text{javor}} = 5000$ . Celková plocha listů na stromě bude  $2nS$ , protože fotosyntéza může probíhat na obou stranách listu.

$\frac{S_{A4}}{\text{px}}$	$\frac{S_{\text{list}}}{\text{px}}$	$\frac{S_{\text{list}}}{\text{cm}^2}$	$\frac{S_{A4}}{\text{px}}$	$\frac{S_{\text{list}}}{\text{px}}$	$\frac{S_{\text{list}}}{\text{cm}^2}$
8 694 880	530 112	38	8 619 072	3 252 809	235
8 694 880	429 306	31	8 670 080	2 068 239	149
8 694 880	566 607	41	8 670 080	838 180	60
8 694 880	497 956	36	8 722 928	786 776	56
8 694 880	552 426	40	8 675 040	1 608 507	116
8 619 072	426 173	31	8 675 040	1 466 428	105
8 722 928	559 589	40	8 842 944	1 370 373	97
8 722 928	546 035	39	8 842 944	1 279 372	90
8 513 940	564 358	41	8 842 944	1 152 676	81
8 705 398	550 603	39	8 638 784	784 268	57
8 666 932	563 327	41	8 638 784	630 905	46
8 666 932	725 989	52	8 638 784	749 055	54
8 666 932	895 578	64	8 600 088	2 145 590	156
8 666 932	554 545	40	8 600 088	1 511 269	110
8 666 932	483 047	35	8 684 362	2 567 299	184
8 666 932	776 879	56	8 530 098	1 804 438	132
8 457 475	658 137	49	8 530 098	1 171 948	86
8 457 475	656 597	48	8 530 098	872 321	64
			8 513 940	1 499 103	110
			8 513 940	1 159 501	85
			8 705 398	1 139 623	82
			8 705 398	1 823 675	131
			8 457 475	871 670	64

Tabulka 2: Měření plochy listů

O množství energie, které k nám přijde ze Slunce, hovoří solární konstanta, její hodnota se zhruba rovná  $1\,367\text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$ . Konkrétní množství sluneční energie dopadající na dané místo na Zemi je ale menší, zejména kvůli zemské atmosféře. Průměrná hodnota je rovna asi čtvrtině solární konstanty<sup>3</sup> –  $P_S = 342\text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$ .

V listech jsou chloroplasty, na kterých probíhá fotosyntéza – strom chytá energii ze slunečního záření a přeměňuje ji na jiné formy energie – rovnici



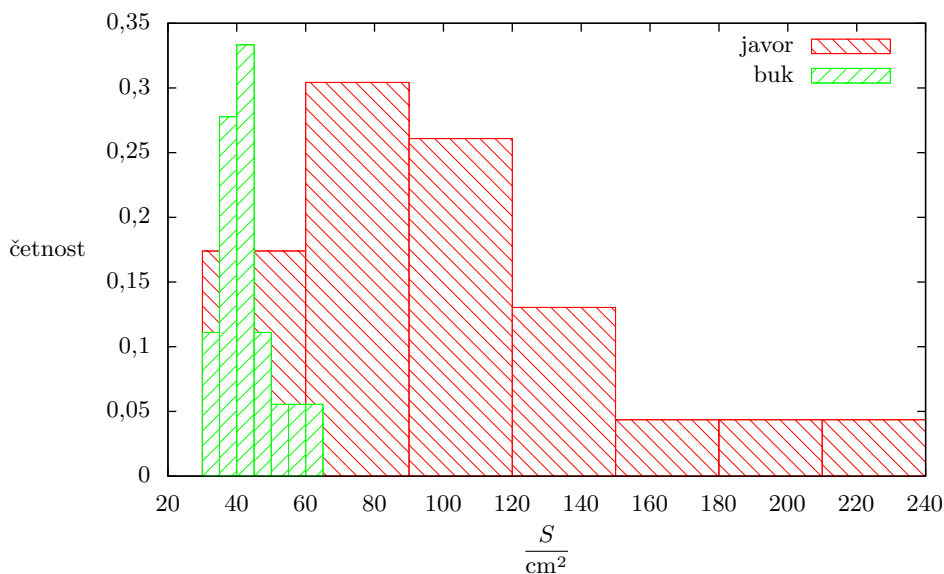
všichni známe. Nicméně ne všechna energie, která na list dopadne, se skutečně využije. Účinnost fotosyntézy se typicky pohybuje jen okolo 0,1%–2%.<sup>4</sup> Počítejme s  $\eta = 0,1\%$ . Tak malá účinnost je způsobena několika faktory, nejdůležitější zkusíme vyjmenovat:

- Fotosyntéza funguje pouze pro světlo o vlnových délkách 400 nm–700 nm, ale na list dopadá celé sluneční záření s větším rozsahem vlnových délek.

<sup>3</sup>Solární konstanta. In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001. [cit. 2012-11-09]. Dostupné z [http://cs.wikipedia.org/wiki/Sol%C3%A1rn%C3%AD\\_konstanta](http://cs.wikipedia.org/wiki/Sol%C3%A1rn%C3%AD_konstanta)

<sup>4</sup>Photosynthetic efficiency. In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001. [cit. 2012-11-09]. Dostupné z: [http://en.wikipedia.org/wiki/Photosynthetic\\_efficiency](http://en.wikipedia.org/wiki/Photosynthetic_efficiency)





Obr. 3: Histogramy z měření plochy listů

- Když už na list dopadne světlo s vlnovou délkou 400 nm–700 nm, list si ho poupraví tak, aby mělo potřebných 700 nm.
- List neabsorbuje dokonale všechny vhodné fotony, které na něj dopadnou – některé se třeba odrazí nebo prostě nejsou úplně využity, protože dopadnou pod velkým úhlem.
- Část vyrobené glukózy se spotřebuje na energii pro další fáze fotosyntézy.

Teď už můžeme spočítat, kolik sluneční energie tedy náš strom využije na tvorbu cukrů za den – dejme tomu, že strom je osvěcen po dobu  $t = 12$  h:

$$E_{\text{den, buk, 12h}} = \eta \cdot S \cdot P_S \cdot t = 0,001 \cdot 2 \cdot 2000 \cdot 40 \text{ cm}^2 \cdot 342 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot 12 \cdot 3600 \text{ s} = 2,4 \cdot 10^5 \text{ J},$$

$$E_{\text{den, javor, 12h}} = \eta \cdot S \cdot P_S \cdot t = 0,001 \cdot 2 \cdot 5000 \cdot 86 \text{ cm}^2 \cdot 342 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot 12 \cdot 3600 \text{ s} = 1,3 \cdot 10^6 \text{ J}.$$

Chceme-li odhadnout hodnoty za celý rok, musíme si uvědomit, že strom má listy pouze asi 8 měsíců v roce (přibližně duben – listopad), z toho na podzim už nejsou zelené, takže i fotosyntéza probíhá méně. Uvažujme efektivní počet měsíců 5,5. Slunce tyto měsíce nesvítí celý den, průměrně řekněme 14 hodin. Ne všechny dny je slunečno – proto se ještě přijatá energie sníží o koeficient přibližně 0,4.<sup>5</sup>

$$E_{\text{rok, buk}} = 0,4 \cdot E_{\text{den, buk, 14h}} \cdot \frac{365 \cdot 5,5}{12} = 1,8 \cdot 10^7 \text{ J},$$

<sup>5</sup>Sluneční energie. [online]. [cit. 2012-11-09]. Dostupné z [http://www.solarniobchod.cz/clanek\\_1.php](http://www.solarniobchod.cz/clanek_1.php)

$$E_{\text{rok, javor}} = 0,4 \cdot E_{\text{den, javor, 14h}} \cdot \frac{365 \cdot 5,5}{12} = 9,9 \cdot 10^7 \text{ J.}$$

### Komentář k došlým řešením

Často se opakovala ta samá chyba – platné číslice! Když se třeba hodnoty liší v až desítkách, nemá cenu je uvádět na deset desetinných míst. Chyba se zaokrouhlí na první platnou číslici a podle toho i hodnota.

Moc se nám nelíbilo, když někdo v experimentálce měřil za nějakým účelem objem nebo tloušťku listu. Přesnost měření různě tlustého listu s žilkami není moc velká a strkání listů do odměrného válce není vhodné. A když už používáte takovéto metody, tak se zamyslete, jestli se plocha listů, co vám vyšla, až příliš neliší od skutečnosti (třeba jestli to nevypadá, že jste měřili banánovnk).

Další častou chybou bylo, že jste jako dopadající energii uvažovali solární konstantu – nicméně to je údaj, který platí ještě předtím, než světlo projde atmosférou, je proto třeba brát menší číslo.

V konkrétních číselných hodnotách energií jsme se mohli dost lišit, protože každý použil jiný strom. Hodnotili jsme proto postup, správné googlení a trochu zdravého rozumu – listnatý strom nemá listy celý rok.

*Dominika Kalasová*  
dominika@fykos.cz

### Úloha II.S ... driftujeme

6 bodů; průměr 2,67; řešilo 12 studentů

- Které drifty budeme pozorovat v lineární pasti? Představte si, že je osa pasti vodorovná, bude v pohybu částic hrát významnou roli drift způsobený gravitační silou?*
  - Odvoďte vztah pro ztrátový kužel a nakreslete originální obrázek, který bude názorně ilustrovat chování částic v lineární pasti.*
  - Odvoďte vztah pro drift způsobený elektrickým polem, které je kolmé na magnetické pole a má konstantní gradient ve směru svého působení. Diskutujte různé typy pohybu částice v závislosti na velikosti gradientu.*
- a) V lineární pasti, která byla znázorněna na obrázku doprovázejícím druhý díl seriálu, budeme pozorovat především drifty způsobené nehomogenním magnetickým polem. Gradient magnetického pole paralelní ke směru siločar bude odrážet částice s vhodným poměrem paralelní a kolmé rychlosti zpět do prostoru pasti. Vzhledem k tomu, že dle Maxwellových rovnic je celková divergence magnetického pole nulová, bude gradient ve směru pole vyvolávat i gradient ve směru kolmém na pole. Ten bude způsobovat precesní pohyb částic, které budou pomalu rotovat okolo osy pasti. Tím se budou částice promíchávat a bude se rušit vliv driftu způsobený gravitací, který by částice separoval ve směru kolmém na osu pasti a směr gravitační síly. Pokud bychom uvažovali přítomnost plazmatu s kolektivním chováním (a ne jen individuálních nabitých částic), zcela jistě by se objevil i  $E \times B$  drift – ionty a elektrony by z pasti unikaly různým tempem a tím by se narušovala kvazineutralita plazmatu v pasti, což by vedlo ke vzniku elektrických polí.

- b) Vyjdeme z předpokladu zachování magnetického momentu  $\mu$ , který bude stejný pro částici v místě s nejmenším magnetickým polem  $B_0$  (tj. uprostřed pasti) a s maximálním polem (na kraji)  $B_{\max}$  (v dalším textu bude rychlost v tomto místě označována jako  $v_1$ )

$$\mu = \frac{mv_{\perp 0}^2}{2B_0} = \frac{mv_{\perp 1}^2}{2B_{\max}}.$$

Uvažujme případ takové částice, která bude mít v místě maximálního magnetického pole přesně nulovou paralelní rychlost, tj. veškerá její kinetická energie se transformuje do kolmé složky

$$\frac{mv_{\perp 0}^2}{2B_0} = \frac{mv_0^2}{2B_{\max}}.$$

Z tohoto vztahu snadno odvodíme podmínku pro poměr celkové a kolmé rychlosti

$$\frac{v_{\perp 0}^2}{v_0^2} = \frac{B_0}{B_{\max}}.$$

Tomuto poměru odpovídá ve fázovém rychlostním prostoru ztrátový kužel s úhlem  $\alpha$

$$\sin^2 \alpha = \frac{B_0}{B_{\max}}.$$

Částice, které se nacházejí uvnitř ztrátového kužele, mají dostatečně velký poměr paralelní složky rychlosti ku celkové velikosti rychlosti na to, aby dokázaly z pasti uniknout.

$$v_{\parallel} > v \sqrt{\frac{B_0}{B_{\max}}}.$$

- c) Vyjdeme z rovnice ze seriálu, kde konstantní elektrické pole nahradíme výrazem

$$E = E_0 + ay,$$

kde  $a$  je gradient elektrického pole. Dále budeme postupovat podobně jako v seriálu s využitím vztahu

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dy} \frac{dy}{dt} = av_y.$$

Takto budeme schopni separovat soustavu diferenciálních rovnic a dojít k rovnici pro  $v_y$

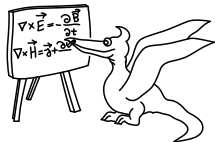
$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} = -\frac{e}{m} av_y - \left(\frac{eB}{m}\right)^2 v_y = -\Omega_L \left(\frac{a}{B} + \Omega_L\right) v_y.$$

Částice se bude pohybovat s pozměněnou Larmorovskou frekvencí. Zajímavý je případ, kdy

$$-\frac{a}{B} > \Omega_L.$$

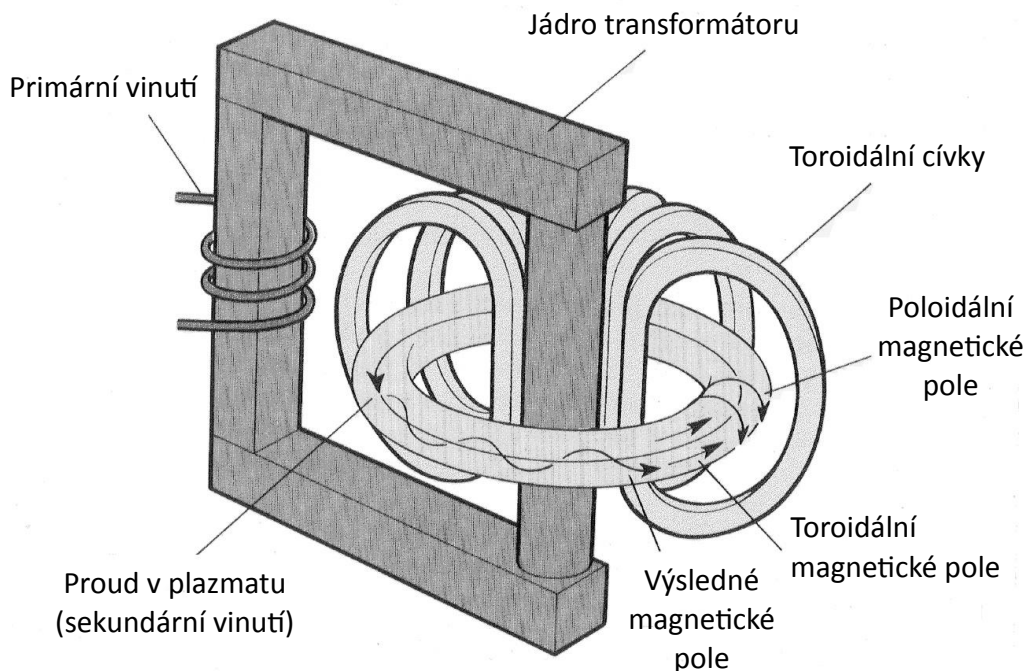
V tomto případě se změní znaménko koeficientu u  $v_y$ , tedy změní se charakter řešení diferenciální rovnice – z lineárního harmonického oscilátoru přejde na exponenciální řešení. Larmorovský pohyb bude tedy nahrazen pohybem ve směru elektrického pole.

*Michael Komm*  
robin@fykos.cz



## Seriál: Udržení plazmatu v TOKAMAKU

V minulých dílech našeho seriálu jsme si ukázali základní pojmy z oblasti fyziky plazmatu. V tomto díle se budeme věnovat praktické konstrukci zařízení, ve kterém je možné takové plazma vyrobit, udržet a studovat. Minule jsme odvodili vztah pro lineární past, která má ovšem velké ztráty podél své osy. Tato past se dá výrazně zdokonalit tím, že se oba konce stočí proti sobě a vznikne tak torus, čímž se paralelní ztráty eliminují. Bohužel v důsledku zakřiveného magnetického pole vznikají drifts, které vedou k separaci kladně a záporně nabitých částic, což vyvolává silný  $E \times B$  drift ve směru od hlavní osy torusu. Tímto mechanismem mohou nabitě částice z torusu velmi rychle unikat. Naštěstí se tento efekt dá potlačit přidáním *poloidálního* magnetického pole (viz obrázek 4), které bude zakřivovat magnetické siločáry po povrchu torusu a tím promíchá nabitě částice a potlačí vliv driftů.



Obr. 4: Schéma tokamaku

Toto poloidální pole se dá vyrobit v zásadě dvěma způsoby – buď velmi komplikovaným

3D tvarem externích cívek, nebo proudem v plazmatu, kdy plazma jako každý vodič vytváří vlastní magnetické pole. Obě možnosti vedly ke konstrukci úspěšných zařízení – v prvním případě tzv. *Stellarátoru*, který poprvé zkonstruoval v roce 1950 Lyman Spitzer, zatímco torus s proudem v plazmatu vyzkoušeli o rok později sovětsí inženýři Sacharov, Tamm a Arcimovič a nazvali ho *TOKAMAK* (z ruského *toroidal'naya kamera s magnitnymi katuskami*). Tento koncept pasti se stal rychle populární díky schopnosti dosahovat vysokých teplot plazmatu, což je důležitý předpoklad k realizaci jaderné fúze (principu fúzního reaktoru se bude věnovat některý z příštích dílů seriálu). Původní koncept tokamaku fungoval na principu transformátoru, kde prstenec plazmatu byl sekundárním vinutím, ve kterém se indukoval proud. Šlo tedy v principu o pulsní zařízení.

K pochopení chování plazmatu při průchodu elektrického proudu si osvěžíme základní vztahy z oblasti pružných Coulombovských srážek. Uvažujme pohybující se elektron, který interaguje s nehybným iontem. Pokud by se jednalo o nenabitě částice, minuly by se ve vzdálenosti  $r_0$  (tzv. srážkový parametr). Vzhledem k tomu, že jsou nabitě, bude mezi nimi působit elastická interakce zprostředkovaná Coulombovskou silou

$$F = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

V hrubém přiblížení můžeme předpokládat, že síla bude působit pouze po dobu, kdy budou částice blízko sebe, tj.  $r \sim r_0$ . Tato doba bude

$$T \sim r_0/v$$

a hybnost elektronu se tedy změní přibližně o

$$\Delta(mv) = |FT| \sim \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0 v}.$$

Budeme uvažovat tzv. *účinný průřez srážky*, tj. průřez s takovým poloměrem, při kterém se směr pohybu elektronu změní o  $90^\circ$ , tj. změna hybnosti bude rovna  $mv$ .

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m v^2}.$$

Účinný průřez potom bude

$$\sigma = \pi r_0^2 = \frac{e^4}{16\pi\epsilon_0^2 m^2 v^4}.$$

Předchozí úvaha se týkala pouze dvou částic. Když budeme uvažovat pohyb elektronu mrahem iontů o hustotě  $n$ , bude místo srážkového průřezu důležitá srážková frekvence

$$\nu_{ie} = n\sigma v = \frac{ne^4}{16\pi\epsilon_0^2 m^2 v^3}.$$

Elektrický proud v plazmatu je realizován pohybujícími se elektrony, které se srážejí s ionty, čímž se jejich pohyb zpomaluje. Coulombovské srážky proto vytvářejí odpor, který závisí na srážkové frekvenci. Vztah mezi srážkovou frekvencí  $\nu_{ie}$  a specifickým odporem  $\eta$  vyplývá z teorie tekutin a jeho odvození vyžaduje matematické postupy, které přesahují rámec našeho seriálu. Spokojme se tedy s jeho uvedením bez odvození

$$\eta = \frac{m}{ne^2} \nu_{ie} \sim \frac{e^2}{16\pi\epsilon_0^2 m^2 v^3}.$$

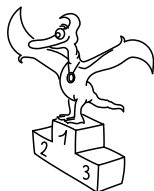
Pokud budeme uvažovat Maxwellovské rozdělení rychlostí elektronů o teplotě  $T_e$ , můžeme střední rychlost nahradit teplotou dle vztahu

$$v^2 = kT_e/m$$

a dospět tak k finálnímu vztahu pro odpor plazmatu

$$\eta = \frac{m}{ne^2} \nu_{ie} \sim \frac{e^2 m^{1/2}}{16\pi\epsilon_0^2 (kT_e)^{3/2}}.$$

Důležitým důsledkem tohoto vztahu je možnost využít proud vedený plazmatem pro jeho ohřev. Jako každý vodič, i plazma se zahřívá Joulovým teplem, které je úměrné odporu plazmatu. Jak se ale plazma začne zahřívát, bude jeho odpor díky závislosti na teplotě klesat, tj. pro horké plazma bude tento ohřev méně efektivní. To je důvod, proč tzv. ohmický ohřev v tokamacích nedostačuje k dosažení teplot potřebných k jaderné fúzi a je zapotřebí použít i další metody ohřevu.



## Pořadí řešitelů po II. sérii



Kompletní výsledky najdete na <http://fykos.cz>.

### Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	II	%	$\Sigma$
Student	MFF UK	4	4	4	5	5	5	8	6	41	100	81
1. Jiří Jarošík	G J. Vrchlického, Klatovy	4	4	4	4	2	1	6	0	25	63	51
2. Anna Kufová	G M. Koperníka, Bílovec	2	2	2	3	1	2	4	1	17	51	41
3. Klára Stefanová	G B. Němcové, Hradec Králové	4	4	4	3	–	1	–	–	16	88	38
4. Diana Miezgová	G Liptovský Hrádok	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	26
5.–6. Lukáš Kotlaba	G Ludovíta Štúra, Trenčín	4	4	–	–	–	–	5	–	13	66	21
5.–6. Marek Otýpka	G, Židlochovice	4	4	–	–	–	3	–	–	11	84	21
7.–8. Petr Vítovský	G Uherské Hradiště	4	4	–	–	–	–	–	–	8	90	18
7.–8. František Zajíc	G, Nymburk	4	–	–	–	–	–	–	–	4	90	18
9. Jaroslav Cerman	G a SOŠ, Jilemnice	4	4	–	–	–	2	–	–	10	65	17
10. Karel Chládek	G, Lanškroun	–	–	–	–	–	–	–	–	–	40	16
11. Pavel Grepl	G J. Wolkera, Prostějov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	37	13
12. Jakub Kolář	Reálné G a ZŠ, Prostějov	2	2	–	–	–	–	–	–	4	71	12
13.–14. Šimon Jelínek	G, Mostecká, Chomutov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	69	11
13.–14. David Pokorný	G, Bučovice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	65	11
15.–16. Vojtěch Kaprál	G J. Wolkera, Prostějov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	38	10
15.–16. Filip Šmejkal	G Uherské Hradiště	0	–	–	–	–	–	3	–	3	27	10
17. Jakub Novotný	G Brno-Řečkovice	4	–	–	–	–	1	–	–	5	53	9
18.–22. Ondřej Běhávkva	G Brno, tř. Kpt. Jaroše 14	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	8
18.–22. Josef Kolář	ZŠ Litovel, Vítězná 1250	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	8
18.–22. Pavel Kůs	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	8
18.–22. Timotej Mareš	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	8
18.–22. Honza Touš	G, Nymburk	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	8

## Kategorie druhých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	II	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	5	5	5	8	6	41	100	81
1. <i>Filip Ayazi</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	4	4	5	5	4	3	7	1	<b>33</b>	80	<b>65</b>
2. <i>Jozef Bucko</i>	G PdC, Piešťany	4	4	2	4	5	0	5	2	<b>26</b>	69	<b>56</b>
3. <i>Tomáš Fiala</i>	G, SOŠ a VOŠ, Ledec n. Sáz.	4	4	5	3	2	1	6	4	<b>29</b>	74	<b>54</b>
4. <i>Martin Kihoulou</i>	G, Mikulášské nám. 23, Plzeň	4	2	3	2	4	3	5	–	<b>23</b>	74	<b>52</b>
5. <i>Mikuláš Zindulka</i>	G, Mikulášské nám. 23, Plzeň	4	4	2	–	3	2	7	–	<b>22</b>	78	<b>50</b>
6. <i>Jakub Dolejší</i>	G B. Němcové, Hradec Králové	4	4	3	–	1	3	4	–	<b>19</b>	69	<b>41</b>
7. <i>Erik Döme</i>	G Hubeného, Bratislava	4	4	–	–	4	1	4	–	<b>17</b>	65	<b>33</b>
8.–9. <i>Petr Doležal</i>	G Z. Wintra, Rakovník	4	4	–	2	–	1	–	–	<b>11</b>	82	<b>32</b>
8.–9. <i>Václav Skála</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	4	4	2	–	1	2	3	–	<b>16</b>	68	<b>32</b>
10.–11. <i>Ondrej Bohdal</i>	G Jura Hronca, Bratislava	4	4	4	–	–	2	–	–	<b>14</b>	78	<b>31</b>
10.–11. <i>Tomáš Kremel</i>	G J. Škody, Prerov	4	4	–	1	–	0	7	–	<b>16</b>	65	<b>31</b>
12. <i>Miloslav Staněk</i>	G a ZUŠ, Šlapanice	4	4	–	–	–	2	–	–	<b>10</b>	90	<b>26</b>
13. <i>Pavel Blažek</i>	G a ZUŠ, Šlapanice	4	4	–	–	–	1	–	–	<b>9</b>	86	<b>25</b>
14. <i>Marek Liška</i>	G a SOŠPg, Jeronýmova, Liberec	–	–	–	–	–	–	–	–	–	83	<b>24</b>
15. <i>Zdeněk Turek</i>	G a SOŠ, Rokycany	4	4	–	–	–	0	–	–	<b>8</b>	76	<b>22</b>
16.–17. <i>Jakub Dvořák</i>	G, Botičská, Praha	4	2	–	–	–	1	–	–	<b>7</b>	70	<b>21</b>
16.–17. <i>Radovan Zeman</i>	G, Uničov	4	4	–	–	–	–	–	–	<b>8</b>	88	<b>21</b>
18. <i>Štefan Stanko</i>	G Andreja Vrábľa, Levice	2	4	–	–	–	–	–	–	<b>6</b>	65	<b>20</b>
19. <i>Jakub Maruška</i>	G Andreja Vrábľa, Levice	0	4	–	–	–	–	–	–	<b>4</b>	55	<b>18</b>
20. <i>Štěpán Štěpán</i>	Jiráskovo G, Náchod	–	4	–	–	–	–	–	–	<b>4</b>	85	<b>17</b>
21. <i>Dušan Stěhule</i>	G B. Němcové, Hradec Králové	4	4	–	–	–	–	–	–	<b>8</b>	100	<b>16</b>

## Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	II	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	2	2	4	5	5	5	8	6	37	100	73
1. <i>Patrik Turzák</i>	G Poštová, Košice	3	3	5	4	–	5	7	–	<b>27</b>	100	<b>62</b>
2. <i>Jakub Kvorka</i>	G, Dubnica n. Váhom	2	2	4	5	3	1	5	–	<b>22</b>	82	<b>55</b>
3. <i>Lukáš Knob</i>	G, Kojetín	2	2	4	5	–	–	6	4	<b>23</b>	90	<b>52</b>
4. <i>Jiří Guth</i>	G, Jírovcova, České Budějovice	2	2	2	5	3	–	–	5	<b>19</b>	81	<b>44</b>
5. <i>Petr Kepčija</i>	G, Jírovcova, České Budějovice	2	2	2	5	–	3	4	–	<b>18</b>	70	<b>39</b>
6. <i>Peter Hojnoš</i>	G Školská, Spišská Nová Ves	1	2	2	4	3	1	4	–	<b>17</b>	61	<b>38</b>
7.–8. <i>Adam Práda</i>	G, Ostrov	2	2	3	1	3	–	–	–	<b>11</b>	83	<b>33</b>
7.–8. <i>Daniël Slezák</i>	Svobodná chebská škola	2	2	4	–	–	–	5	–	<b>13</b>	79	<b>33</b>
9.–10. <i>Radka Štefaníková</i>	G O. Havlové, Ostrava-Poruba	2	2	2	4	3	3	6	–	<b>22</b>	61	<b>31</b>
9.–10. <i>Markéta Vohníková</i>	PORG, Praha	2	2	2	1	3	3	8	–	<b>21</b>	67	<b>31</b>
11.–13. <i>Mark Daniel</i>	G Párovská, Nitra	1	2	2	–	–	2	4	–	<b>11</b>	57	<b>25</b>
11.–13. <i>Viktor Skupý</i>	G, Moravská Třebová	2	1	–	1	–	4	–	2	<b>10</b>	68	<b>25</b>
11.–13. <i>Martin Šípka</i>	G Kežmarok	2	–	3	3	2	2	–	–	<b>12</b>	58	<b>25</b>
14.–16. <i>Jaroslav Hofierka</i>	G J. A. Raymana, Prešov	2	1	–	4	–	–	–	–	<b>7</b>	81	<b>21</b>
14.–16. <i>Vendula Kotyzová</i>	Wichterlovo G, Ostrava	2	2	–	–	–	0	5	–	<b>9</b>	44	<b>21</b>
14.–16. <i>Lucie Valentová</i>	G, Boskovice	1	1	–	–	1	1	6	–	<b>10</b>	55	<b>21</b>
17.–18. <i>Jiří Jaskowicz</i>	Wichterlovo G, Ostrava	2	2	–	–	–	2	5	–	<b>11</b>	56	<b>19</b>
17.–18. <i>Martin Wirth</i>	První české G, Karlovy Vary	2	2	–	–	–	2	–	–	<b>6</b>	86	<b>19</b>
19. <i>Václav Dvořáček</i>	PORG, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	72	<b>18</b>
20. <i>Tomáš Zahradník</i>	Gymnázium Oty Pavla, Praha	1	2	–	–	–	–	–	–	<b>3</b>	74	<b>17</b>
21. <i>Michal Belína</i>	G Volgogradská, Ostrava	2	2	2	1	–	1	3	–	<b>11</b>	38	<b>16</b>

## Kategorie čtvrtých ročníků

jméno <i>Student</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	II	%	Σ
<i>Pilný</i>		2	2	4	5	5	5	8	6	37	100	73
1. <i>Miroslav Hanzelka</i>	G, Česká Lípa	2	2	5	4	–	5	7	4	29	97	66
2.–3. <i>Lubomír Grund</i>	G Christiana Dopplera, Praha	2	2	6	5	2	2	4	4	27	79	58
2.–3. <i>Jakub Šafín</i>	G, P. Horova, Michalovce	2	2	4	5	6	3	5	–	27	87	58
4. <i>Jakub Bahyl</i>	G Varšavská, Žilina	2	2	3	4	3	3	5	4	26	73	53
5.–6. <i>David Matejov</i>	G, Dubnica n. Váhom	1	2	1	4	3	3	7	–	21	76	39
5.–6. <i>Vít Nosek</i>	G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice	2	2	–	4	3	4	–	–	15	89	39
7.–8. <i>David Siegart</i>	G, Klášterec n. O.	2	2	3	–	–	2	7	–	16	83	38
7.–8. <i>Peter Šišán</i>	G PdC, Piešťany	2	2	2	2	2	3	3	–	16	68	38
9. <i>Tereza Uhlířová</i>	G, Omská, Praha	2	1	3	–	–	3	7	–	16	80	37
10. <i>Veronika Dočkalová</i>	G, Elgartova, Brno	2	1	4	–	–	0	7	–	14	76	35
11. <i>Michal Buráň</i>	G J. A. Komenského, Uh. Brod	2	2	4	3	2	–	–	–	13	78	31
12. <i>Tomáš Gonda</i>	G Grösslingova, Bratislava	2	2	4	5	–	–	–	–	13	97	30
13. <i>Erik Hendrych</i>	G J. Heyrovského, Praha	2	2	5	5	2	3	–	–	19	90	28
14. <i>Lukáš Tímko</i>	G P. de Coubertina, Tábor	–	–	–	–	–	–	–	–	–	75	21
15.–16. <i>Michal Červeňák</i>	G Púchov	1	–	2	–	–	–	–	–	3	65	20
15.–16. <i>Tomáš Kello</i>	G J. A. Raymana, Prešov	2	2	–	–	–	–	–	–	4	83	20
17. <i>Ivana Monková</i>	G J. A. Raymana, Prešov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	60	18
18.–21. <i>Filip Murár</i>	G, Masarykovo nám., Třebíč	–	–	–	–	–	–	–	–	–	89	16
18.–21. <i>Jaroslav Průcha</i>	G, Strakonice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	53	16
18.–21. <i>Tomáš Turlík</i>	G J. A. Raymana, Prešov	–	–	–	–	–	1	–	–	1	57	16
18.–21. <i>Bogdan Yaparov</i>		–	–	–	–	–	–	–	–	–	70	16
22. <i>Lukáš Fusek</i>	G Uherské Hradiště	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	13



FYKOS


UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta

Ústav teoretické fyziky

V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

www: <http://fykos.cz>e-mail: [fykos@fykos.cz](mailto:fykos@fykos.cz)

FYKOS je také na Facebooku   
<http://www.facebook.com/Fykos>

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.