Úvodem

Milé FYKOSačky, FYKOSáci a FYKOSáčata,

polovina FYKOSího ročníku je za námi, ale nemusíte smutnit, neboť to znamená, že druhá půlka nás teprve čeká, takže pilně řešte, ať nasbíráte body na podzimní soustředění.

Co konkrétně na vás číhá v této, již čtvrté, sérii, se nejpodrobněji dozvíte přečtením zadání, ovšem i zde můžeme prozradit, že vás nemine například netradiční úloha, ve které budete uvažovat nad vaším oblíbeným fyzikem, v další si, i přes nařízenou zapomnětlivost, určitě poradíte s poměrem objemů Země a Měsíce, také bude otřesena vaše víra v Ivánkovo umění házet tak příhodně kyjem a v neposlední řadě vysvobodíte ze zimního zahálení brčka pro váš experiment.

Doufáme, že ti z vás, kteří se chválihodně zúčastnili Fyziklání a DSEFu, si tyto akce náležitě užili a odvezli jste si jen samé příjemné zážitky.

Hodně dobrých nápadů a ještě víc těch skvělých přejí

Organizátoři

Zadání IV. série

Termín uploadu: 5. 3. 2013 20.00
Termín odeslání: 4. 3. 2013

Úloha IV.1 ... antieinsteinovská (2 body)

Napište nám, jaký je váš nejoblíbenější fyzik/fyzička, kromě Einsteina. Co udělal/a? Proč je podle vás tak skvělý/á? Proč by měl/a být známý/á? Rozepište se o jeho/jejích objevech a životě.

Úloha IV.2 ... vesmírná skleróza (2 body)

Jaký je poměr objemu Země ku objemu Měsíce? Vypočítejte jej pouze ze znalosti, že poměr jejich hmotností je přibližně 81 a že intenzita gravitačního pole je na povrchu Země přibližně šestkrát vyšší než na povrchu Měsíce.

Úloha IV.3 ... kačenka ve vaně (3 body)

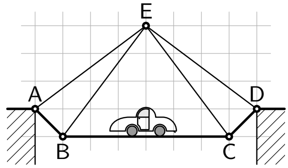
Na trajektu máme nezabrzděné auto, které stojí rovnoběžně s jeho osou. Trajekt se houpe harmonicky na vlnách, tj. $\varphi(t) = \Phi \sin(\omega t)$. Maximální úhlová výchylka trajektu je Φ. Jak daleko od kraje můžeme zaparkovat auto, aby nám nemohlo spadnout do moře? Uvažujte, že maximální výchylka se pomalu zvětšuje z nuly na hodnotu Φ.

Úloha IV.4 ... rána kladivem (4 body)

Pokud udeříte kladivem do jednoho konce kovové tyče (jejíž průměr je mnohem menší než její délka), začnou se okolo ní šířit zvukové vlny. Narýsujte a co nejpřesněji popište, jak se bude s časem měnit tvar vlnoploch v rovině tyče. Mezi vašimi obrázky by měly být znázorněny vlnoplochy, a to v okamžicích, kdy se vlna dostala na druhý konec tyče a kdy se po odrazu vrátila opět do místa úderu. Nezapomeňte konstrukci popsat. Uvažujte pouze podélné kmity tyče. Poměr rychlosti šíření zvuku v tyči a ve vzduchu je $\beta = v_{\mathrm{tyc}}/v_{\mathrm{vzduch}} \approx 10$.

Úloha IV.5 ... stavme mosty

4 body



Mějme dvourozměrnou část jednoduché mostní konstrukce jako na obrázku tvořenou z tyčí spojených v bodech A, B, C, D a E. Zjistěte, které tyče jsou namáhány tlakem a které tahem a jak velkými silami, pokud jsou tyče nehmotné a na tyči BC stojí autíčko o hmotnosti m. Délky tyčí určete z obrázku.
Bonus Uvažujte, že všechny tyče mají konstantní délkovou hustotu λ.

Úloha IV.P ... Mrazík

5 bodů

V pohádce Mrazík vyhodil Ivan loupežníkům kyje do takové výšky, že spadly až za půl roku. Jak vysoko by je musel vyhodit, aby dopadly za takovou dobu? Vytvořte první a druhý hrubý odhad. Zdůvodněte, proč jsou tyto odhady nejspíš řádově špatné. Co jste všechno zanedbali? Z jakých důvodů je celkově nesmyslné, aby kyje dopadly na prakticky stejné místo po půl roce? Nebraňte se proudu kritiky na tuto klasickou pohádku!

Úloha IV.E ... nástěnkový boj brček

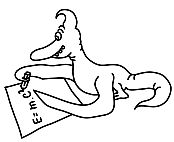
8 bodů

Když si vezmete běžné plastové brčko (slámku) a otřete ho kapesníkem, dokážete brčko nabít tak, že bude dokonce držet na některých stěnách a nástěnkách díky svému náboji. Vysvětlete jev a odhadněte, jak velký náboj dokážete na brčku vytvořit.
Nápověda Hodilo by se použít dvě brčka.

Úloha IV.S ... seriálová

6 bodů

a) Za použití vztahu pro srážkovou frekvenci z minulého dílu seriálu odvoďte vzorec pro difuzní koeficient klasické difuze a spočtěte jeho hodnotu pro typické plazma v tokamaku (viz první díl seriálu).
b) Odvoďte vztah určující závislost frakce zachycených částic (tj. poměr zachycených částic ku celkové populaci) na poměru hlavního a malého poloměru plazmatu r/R_0.



Řešení III. série

Úloha III.1 ... konjunkce

2 body; průměr 1,70; řešilo 60 studentů

Oblíbeným tématem proroků kosmických katastrof jsou konjunkce planet. Představte si, že je poledne a jedna taková konjunkce zrovna nastala. O kolik nejvíce procent můžete být lehčí, pokud uvažujeme, že Země je počátkem polopřímky, na které leží všechny velké planety a Slunce, vůči situaci bez ostatních planet a Slunce? *Jako blesk z čistého nebe (Aleš P.).*

Hned ze začátku je třeba zmínit, že úloha nebude jen o pouhém dosazení do vzorečku, jak by to mohlo na první pohled vypadat. Naopak, budeme muset vynaložit trochu mentálního úsilí, abychom došli ke správnému výsledku a přitom bezděčně nahlédneme, jak se věci mají v případě slapového působení.[1]

Začněme rozborem situace. Zadání nám říká, že v okamžiku konjunkce Země leží v počátku polopřímky, na které se nachází další planety a Slunce. Mohlo by nás zajímat, jak jsou tyto objekty na polopřímce uspořádané. Přirozeně, příroda nám nedovolí žádné psí kusy a zachováme-li tedy přirozené pořadí planet ve sluneční soustavě, zbývá nám akorát rozhodnout, jestli se Merkur a Venuše nachází mezi Sluncem a Zemí nebo až za Sluncem. Zde bychom si mohli říct, že v tom nám jednoznačně pomůže klausule ze zadání „o kolik *nejvíce* procent můžete být lehčí". Ale zas tak jednoznačné to není, protože, jak dále uvidíme, naše zlehčení nezávisí na intensitě gravitačního pole jako spíše na jejím gradientu (jinými slovy na tom, jak moc se intensita mění se vzdáleností). Rovněž si ale povšimneme toho, že máme uvažovat pouze velké planety (Jupiter, Saturn, Uran a Neptun) a Merkur s Venuší tedy budeme nakonec stejně ignorovat.

Uvažujme nejdřív, že se Země (a my) nachází v obecném gravitačním poli se zrychlením $\boldsymbol{a}_{\mathrm{g}}$ ve směru polopřímky, na které leží planety. Zvolíme-li počátek jednorozměrných souřadnic orientovaných ve směru polopřímky šikovně ve středu Slunce a označíme-li r_{z} vzdálenost Země od Slunce, můžeme pak pro sílu působící na Zemi psát $\boldsymbol{F}_{\mathrm{z}} = m_z \boldsymbol{a}_{\mathrm{g}}(-r_{\mathrm{z}})$, kde m_{z} je hmotnost Země.

Nyní se na situaci podívejme z pozice pozorovatele na povrchu Země. Uvažujme, že situace nastala v pravé poledne, a, pro zjednodušení, na rovníku v den rovnodennosti, takže Slunce (a planety) máme v nadhlavníku. Za prvé je nutné si uvědomit, co vlastně počítáme, tedy co znamená to „zlehčení". Určitě to neznamená změnu naší setrvačné ani gravitační hmotnosti, které jsou v rámci klasické fyziky konstantní ve všech vztažných soustavách. Definujeme-li si ale naši hmotnost jako to, co naměříme na osobních vahách, pak už má smysl se o nějakém zlehčení bavit. Osobní váhy totiž nejsou nic jiného než sofistikovaný siloměr, který měří tlakovou sílu, kterou působíme na podložku. O co nám tedy půjde je relativní změna této síly mezi jednotlivými případy (konjunkce a isolovaná Země bez Slunce a planet).

Dále je nutné si uvědomit, že soustava našeho pozorovatele není inerciální. Jednak proto, že Země rotuje kolem své osy, a taky proto, že v případě konjunkce se díky silovému působení ostatních objektů pohybuje se zrychlením o velikosti $a_{\mathrm{g}}(-r_{\mathrm{z}})$ směrem ke Slunci a k planetám (ať už je zrychlení lineární nebo dostředivé, je to jedno). Působí zde tedy řada fiktivních sil, což se nám promítne do pohybové rovnice našeho pozorovatele v soustavě spojené s jeho pozorovacím místem. Dále také víme, že v této soustavě je pozorovatel v klidu, tedy výslednice sil na něho působících je nulový vektor, a dostáváme následující podmínku pro velikosti sil

$$R + ma_{\mathrm{g}}(-r_{\mathrm{z}} + R_{\mathrm{z}}) + F_{\mathrm{o}} - m\frac{Gm_{\mathrm{z}}}{R_{\mathrm{z}}^2} - F_{\mathrm{s}} = 0\,,$$

kde m je hmotnost pozorovatele-proroka, R je velikost reakce podložky (ta nás velice zajímá, neboť je rovna velikosti tlakové síly, kterou působíme na podložku, viz výše), R_{z} je poloměr Země, $a_{\mathrm{g}}(-r_{\mathrm{z}} + R_{\mathrm{z}})$ je velikost gravitačního zrychlení způsobeného planetami a Sluncem (všimněme si, že se liší od hodnoty pro střed Země, což bude klíčové), $F_{\mathrm{o}} = m\omega^2 R_{\mathrm{z}}$ je velikost odstředivé síly způsobené rotací Země úhlovou rychlostí ω, G je Newtonova gravitační konstanta a, konečně, F_{s} je velikost setrvačné síly způsobené zrychlující Zemí se zrychlením $a_{\mathrm{g}}(-r_{\mathrm{z}})$,

[1] To můžeme obecně charakterizovat jako silové působení na objekt v důsledku přítomnosti nehomogenního silového pole, které má často deformační účinky.

takže $F_\mathrm{s} = ma_\mathrm{g}(-r_\mathrm{z})$. Přesuneme-li pak Zemi do velké vzdálenosti ode všech planet a Slunce (ale ponecháme-li ji rotovat kolem vlastní osy), odpadnou nám členy $ma_\mathrm{g}(-r_\mathrm{z}+R_\mathrm{z})$ a F_s a pro novou velikost reakce R_0 můžeme psát rovnici

$$R_0 + F_\mathrm{o} - m\frac{Gm_\mathrm{z}}{R_\mathrm{z}^2} = 0\,.$$

Označíme-li hledanou relativní změnu reakce (a tedy i tlakové síly na kryt vah) $\chi = (R-R_0)/R_0$ ($\chi < 0$ pokud se jedná o zlehčení, $\chi > 0$ pokud o ztěžknutí), můžeme psát

$$\chi = \frac{ma_\mathrm{g}(-r_\mathrm{z}) - ma_\mathrm{g}(-r_\mathrm{z}+R_\mathrm{z})}{m\frac{GM_\mathrm{z}}{R_\mathrm{z}^2} - F_\mathrm{o}} = \frac{a_\mathrm{g}(-r_\mathrm{z}) - a_\mathrm{g}(-r_\mathrm{z}+R_\mathrm{z})}{Gm_\mathrm{z} - \omega^2 R_\mathrm{z}^3} R_\mathrm{z}^2\,.$$

Jak jsme již avizovali, tato relativní změna závisí na rozdílu gravitačního zrychlení od Slunce a planet mezi povrchem a středem Země, tedy na tom, jak rychle se zrychlení mění se vzdáleností.

Poslední, co musíme udělat, je explicitně vyjádřit $a_\mathrm{g}(-r_\mathrm{z}) - a_\mathrm{g}(-r_\mathrm{z}+R_\mathrm{z})$, což už bude to slibované dosazení do vzorečku. Užijeme-li Newtonova zákona všeobecné gravitace, máme pro $a_\mathrm{g}(-r_\mathrm{z})$ a $a_\mathrm{g}(-r_\mathrm{z}+R_\mathrm{z})$ vztahy

$$a_\mathrm{g}(-r_\mathrm{z}) = G\sum_{j=1}^{5} \frac{m_j}{(r_\mathrm{z}+r_j)^2}\,, \quad a_\mathrm{g}(-r_\mathrm{z}+R_\mathrm{z}) = G\sum_{j=1}^{5} \frac{m_j}{(r_\mathrm{z}-R_\mathrm{z}+r_j)^2}\,,$$

kde indexy 1 až 5 značí veličiny příslušející po řadě Slunci, Jupiteru, Saturnu, Uranu a Neptunu (r_j jsou vzdálenosti objektů od Slunce, m_j jsou jejich hmotnosti – r_1 je tedy zřejmě nula, neboť se jedná o vzdálenost Slunce od Slunce). Kdybychom se nestarali o eleganci našeho výsledku, mohli bychom teď klidně vzít číselné hodnoty všech veličin a dosadit. Dosazování by to ale bylo úmorné, tak si to nejdříve trochu usnadníme. Všimneme si totiž, že $R_\mathrm{z} \ll r_j$ pro všechny možné indexy j, které jsou k mání, a tedy, že $R_\mathrm{z}/r_j \ll 1$. Nic nám tedy nebrání, abychom ve velkém nasadili aproximaci $(1+x)^r \approx 1 + rx$ pro $x, r \in \mathbb{R} : x \ll 1$. Povytýkáme jmenovatele zlomků a dostaneme

$$a_\mathrm{g}(-r_\mathrm{z}+R_\mathrm{z}) \approx G\sum_{j=1}^{5} \frac{m_j}{(r_\mathrm{z}+r_j)^2}\left(1 + 2\frac{R_\mathrm{z}}{r_\mathrm{z}+r_\mathrm{j}}\right)\,,$$

čímž nahlédneme, že po odečtení od $a_\mathrm{g}(-r_\mathrm{z})$ se nám vše náramně zjednoduší na

$$a_\mathrm{g}(-r_\mathrm{z}) - a_\mathrm{g}(-r_\mathrm{z}+R_\mathrm{z}) \approx -2GR_\mathrm{z}\sum_{j=1}^{5} \frac{m_j}{(r_\mathrm{z}+r_j)^3}\,,$$

a tedy konečně

$$\chi \approx \frac{-2GR_\mathrm{z}^3}{Gm_\mathrm{z} - \omega^2 R_\mathrm{z}^3}\sum_{j=1}^{5} \frac{m_j}{(r_\mathrm{z}+r_j)^3}\,.$$

Toť náš obecný výsledek. Vidíme, že zřejmě $\chi < 0$ a jde tedy opravdu o zlehčení, neboť pokud by byl jmenovatel rovněž záporný, tak by důsledky tohoto faktu byly zřejmě daleko destruktivnější než prorokovaná konjunkce. Dále upoutejme naši pozornost na třetí mocniny ve jmenovatelích – to nám říká, že zlehčení závisí na mínus třetí mocnině vzdálenosti planet a Slunce od nás, což jsme již prorokovali, když jsme tvrdili, že χ bude záviset na gradientu pole. To je totiž úměrné $1/r^2$ vzdálenosti od gravitujícího objektu a ti pokročilejší z vás už ví, že derivováním této závislosti opravdu dostaneme úměru $1/r^3$.

Důležitou lekcí tedy je, že naše zlehčení nezávisí tolik přímo na intenzitě rušícího gravitačního pole planet jako spíše na míře jeho nehomogenity, čímž se dostáváme ke slapovému působení, které jsme zmínili na začátku. V obecném případě pak vždy platí, že jeho intenzita je vždy úměrná gradientu daného pole, což nás ve třech rozměrech přivádí ke studiu tenzorů. Jako cvičení si dovolíme čtenáři přenechat důkaz možná poněkud překvapivého tvrzení, že uvážíme-li situaci pro stejné podmínky, akorát o půlnoci místo v poledne, dostaneme opět *zlehčení*, které bude přibližně stejné, jako to, co jsme právě spočetli. A pokud bychom chtěli být v našich výpočtech naopak ještě přesnější, je třeba zahrnout efekt způsobený nebodovostí Země, což což se projeví efektivní změnou její hmotnosti v Newtonově vztahu pro gravitační sílu, kterou na ní Slunce působí. Ukazuje se, že tento efekt není až zas tak zanedbatelný, jak by se mohlo zdát, řádově odpovídá zlehčení, které je způsobené Jupiterem a je větší než zlehčení způsobené ostatními planetami. To nás ale nakonec stejně příliš netrápí.

Abychom totiž nezapomněli, zajímá nás rovněž číselná hodnota χ. Ještě jednou a naposledy si ušetříme čas a všimneme si, že nejtěžší planeta Jupiter je skoro přesně tisíckrát lehčí než Slunce. Také je od nás v dané konfiguraci asi šestkrát dále než Slunce (ostatní planety jsou ještě lehčí a ještě vzdálenější). A jelikož výsledný efekt závisí na mínus třetí mocnině vzdálenosti, bude zlehčení způsobené Jupiterem řádově 10^5krát menší než zlehčení způsobené Sluncem. Vliv Jupiteru a všech planet lze tedy naprosto bezpečně ignorovat. A konečně, snadno ověříme, že relativní chyba způsobená zanedbáním korekce na odstředivou sílu způsobenou zemskou rotací je řádu 10^{-3}, a tak řekneme, že nám příliš nevadí. Tím se dostáváme k opravdu finálnímu a krásnému vztahu

$$\chi \approx -2\frac{m_{\mathrm{sol}}}{m_{\mathrm{z}}}\frac{R_{\mathrm{z}}^3}{r_{\mathrm{z}}^3}\,,$$

který po dosazení dává $\chi \approx -5 \cdot 10^{-8}$, a my tedy budeme lehčí řádově o 10^{-6} procent. Jelikož jsme ale oprávněně vymazali vliv ostatních planet, musíme se smířit s tím, že k této katastrofě dochází každou rovnodennost (a v menší míře de facto každý den).

Komentář k došlým řešením

Všichni řešitelé až na jediného, kterým byl *Filip Murár*, výše zmíněný háček v řešení neobjevili a tak drtivá většina z vás dospěla k výsledku 0,06 %, což je přeci jen poněkud hodně. Nutno ale zmínit, že náznak správné myšlenky se objevil i v řešeních Viktora Skoupého a *Daniela Slezáka*, a i jim tedy patří bonus a věčná sláva. A v neposlední řadě, *Martin Kihoulou* a *Jirka Guth* se v řešení zabývali frekvencí, s jakou takováto konjunkce nastane, popřípadě jak na tom budou i ostatní pozorovatelé, nejen ti na rovníku. I ti tedy byli po zásluze odměněni.

Nicméně, prvotním účelem úlohy bylo opravdu pouze srovnat intenzity gravitačních polí od různých objektů ve Sluneční soustavě, což jste tedy všichni správně intuitivně vycítili a své body po zásluze obdrželi. Pochvalu zaslouží obzvláště ti, co si uvědomili, že planety nemají na situaci významný vliv ve srovnání s vlivem Slunce.

Budiž tedy pro všechny ponaučením, že i zdánlivě samozřejmá situace nemusí být samozřejmá a že je třeba vše řešit pečlivě, protože ne vždy je naše intuice ten správný nastroj k chápání fyzikální reality.

Jakub Vošmera
kuba@fykos.cz

Úloha III.2 ... padni komu padni

2 body; průměr 1,75; řešilo 51 studentů

Pustíme z klidu z ruky kuličku o průměru r ze střechy dolů. Předpokládejme, že můžeme zanedbat odpor vzduchu. Jaký se nám bude jevit poloměr této kuličky v závislosti na čase? Předpokládejme, že se na kuličku díváme přímo ze shora a že v okamžiku upuštění kuličky byla x_0 pod našima očima. *Karla přepadl nápad.*

Kulička se bude pohybovat s konstantním zrychlením směrem dolů. Závislost vzdálenosti kuličky od očí na čase můžeme vyjádřit jako

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{2}gt^2\,,$$

kde g je tíhové zrychlení.

Dále se zamysleme nad tím, jak se nám jeví průměr kuličky. Kuličku vidíme pod úhlem φ. Je-li $r \ll x_0$, můžeme si místo kuličky představit kruh o stejném poloměru a psát

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{r}{2}}{x(t)}\,.$$

Díváme-li se stále na vzdalující se kuličku (tedy zmenšuje-li se úhel φ), můžeme buď poznat, že se vzdaluje, nebo se nám může zdát, že je stále na místě (tedy stále vzdálená x_0 od našeho oka) a její průměr se zmenšuje, což je právě situace, kterou řešíme. Označíme zdánlivý poloměr kuličky r_z (tedy takový poloměr, jaký by měla kulička ve vzdálenosti x_0, aby se nám jevila stejně velká jako kulička o poloměru r vzdálená x). Z podobnosti trojúhelníků plyne

$$\frac{r}{x(t)} = \frac{r_\mathrm{z}(t)}{x_0}$$

a po dosazení vztahu pro vzdálenost můžeme vyjádřit

$$r_\mathrm{z}(t) = \frac{x_0}{x(t)}r = \frac{x_0}{x_0 + \frac{1}{2}gt^2}r\,.$$

Tomáš Pikálek
pikos@fykos.cz

Úloha III.3 ... upečené brzdy

4 body; průměr 2,44; řešilo 32 studentů

Jakou rychlostí máme jet autem z kopce, abychom co nejvíce zahřívali brzdy? Uvažujte, že rozdíl teploty vzduchu a teploty brzd je úměrný brzdnému výkonu. *Lukáš pekl.*

Začnime fyzikou celej situácie. Auto, spúšťajúce sa z kopca, je urýchľované zložkou gravitačnej sily o veľkosti $F_\mathrm{g} = mg\sin\alpha$, kde klasicky značíme hmotnosť, gravitačné zrýchlenie a uhol sklonu kopca. Na auto pôsobia dve brzdné sily, odporová a trecia od pneumatík. Budeme predpokladať, že odporová sila je úmerná druhej mocnine rýchlosti, teda $F_\mathrm{odp} = kv^2$. Brzdnú silu od jednej pneumatiky označíme F_p. Ak auto nezrýchľuje, sú sily v smere pohybu v rovnováhe, čo v našom prípade znamená

$$F_\mathrm{g} = F_\mathrm{odp} + 4F_\mathrm{p}\,,$$
$$mg\sin\alpha = kv^2 + 4F_\mathrm{p}\,.$$

Pozrime sa teraz na pneumatiku. Tá neprešmykuje a pri konštantnej rýchlosti je moment sily, ktorý na ňu pôsobí, nulový (inak by sa jej uhlová rýchlosť zvyšovala). Brzdenie si môžeme jednoducho predstaviť ako silu T, ktorá pôsobí proti otáčaniu pneumatiky vo vzdialenosti a od stredu. Pre rovnosť momentov musí platiť

$$Ta = F_\mathrm{p}r\,,$$

kde sme označili polomer pneumatiky ako r.

Tepelný výkon, ktorý sa bude uvoľňovať v mieste pôsobenia sily T, je jednoducho súčin sily T a rýchlosti, ktorou sa tento konkrétny bod pohybuje (tu si stačí spomenúť na známe $\Delta W = T\Delta s$ a predeliť zodpovedajúcim časovým úsekom).

Pripomínam, že samotná sila F_p tu kolesá nezohrieva, pretože pri neprešmykovaní sa nekoná žiadna práca.

Rýchlosť pohybu bodu vzdialeného a od stredu pneumatiky vypočítame z uhlovej rýchlosti, ktorá je rovná v/r. Celkový výkon ohrievajúci jednu pneumatiku je teda

$$P = Ta\frac{v}{r} = F_\mathrm{p}v\,,$$

kde sme pri druhej rovnosti použili vzťah na rovnosť momentov síl. Vidíme, že nám vyšiel rozumný záver, a to že brzdný výkon nezávisí od toho, kde je konkrétne umiestnený brzdový kotúč a platnička.

Silu F_p sme už ale dali do súvisu z rýchlosťou, takže môžeme vyjadriť výkon ako funkciu rýchlosti

$$P(v) = F_\mathrm{p}(v)v = \frac{mg\sin\alpha - kv^2}{4}v\,.$$

Pri ustálenej teplote práve tento výkon uniká a vieme, že unikajúci výkon je priamo úmerný rozdielu teploty kolesa a okolia Δt. Túto úmeru vyjadríme vzťahom $P = K\Delta t$ a dosadíme, aby sme získali teplotu kolesa v závislosti na rýchlosti auta.

$$\Delta t(v) = \frac{mg\sin\alpha - kv^2}{4K}v\,.$$

Našou, teraz už len matematickou, úlohou je nájsť maximum tejto funkcie.

Vidíme, že táto funkcia je nulová v nule a v bodoch

$$\pm v_0 = \pm\sqrt{\frac{mg\sin\alpha}{k}}\,.$$

kde pre nás zaujímavá kladná hodnota znamená, že auto nebrzdí vôbec a gravitačná sila je plne kompenzovaná odporom vzduchu. Medzi nulou a v_0 je to kladná funkcia a my hľadáme maximum práve tu. Hľadanie maxima funkcie je ale už dávno vyriešený problém a väčšine z vás by malo byť jasné, ako na to. Z funkcie $\Delta t(v)$ vyrobíme jej *deriváciu.* Je to opäť funkcia rýchlosti a jej hodnota hovorí, ako rýchlo *rastie* funkcia $\Delta t(v)$. Ak je táto hodnota pre nejakú konkrétnu rýchlosť veľká, vieme, že $\Delta t(v)$ je pre túto rýchlosť strmá. Ak je táto hodnota záporná, tak $\Delta t(v)$ klesá. Nás zaujíma špeciálny prípad, keď je derivácia rovná nule, čo znamená, že funkcia ani nerastie a ani neklesá. Toto je práve prípad maxím a miním funkcií.[2]

Za deriváciami stojí matematická teória, nám stačí vedieť, ako sa používajú.[3] Tu derivujeme len polynóm, deriváciu označíme čiarkou

$$\Delta t'(v) = \frac{mg\sin\alpha}{4K} - 3\frac{k}{4K}v^2\,,$$

podľa pravidla $(v^n)' = nv^{n-1}$. Po položení derivácie rovnej nule dostaneme maximálne Δt pre

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{mg\sin\alpha}{3k}} = \frac{\sqrt{3}}{3}v_0\,,$$

kde sme zahodili zápornú hodnoty (už pri zostavovaní pohybovej rovnice sme totiž použili predpoklad, že odporová sila vzduchu pôsobí proti gravitácii, čo by pre záporné rýchlosti neplatilo). Vidíme teda, že pre maximálny brzdný výkon musíme ísť asi 60% z maximálnej možnej rýchlosti pri vypnutom motore.

Ak chceme dosadiť, treba ešte odhadnúť konštantu k. Zo vzťahu na odporovú silu ale máme

$$k = \frac{1}{2}C\varrho S \approx 1\,\mathrm{N/(m\cdot s^{-1})^2}\,,$$

kde sme odhadli C približne 1, plochu približne $2\,\mathrm{m^2}$ a hustotu vzduchu $1\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

Dosadíme ešte približnú hodnotu hmotnosti $1\,000\,\mathrm{kg}$ a sklon 10°

$$v_{\max} \approx 24\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \doteq 90\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}\,.$$

Treba ešte povedať, že pohon kolies sme neuvažovali. S ním by sme len zvýšili moment na kolesá a súčasne brzdnú silu T, čo by sme efektívne mohli chápať ako jazdu po strmšom svahu.

Poznámky

Možností ako hľadať minimum funkcie je skutočne viacero. Jeden trik je namiesto rýchlosti v vyjadriť výslednú teplotu cez pomer v/v_0. Takto dostaneme

$$\Delta t \propto \frac{v}{v_0}\left(1 - \frac{v^2}{v_0^2}\right)\,,$$

odkiaľ je už jednoduchšie získať $v_{\max} = v_0/\sqrt{3}\,$,.

Pekné riešenie, od Kuby Vošmery, je požadovať, aby rovnica

$$\Delta t = C\,,$$

mala práve dve riešenia, pre nejakú konštantu C. Pri pohľade na graf je zrejmé, že táto rovnica má dve riešenia práve ak je jedno z týchto riešení extrém našej závislosti $\Delta t(v)$. Toto riešnie musí dokonca byť aj dvojnásobným koreňom, práve kvôli tomu, že je to extrém dotýkajúci sa priamky (pre znalejších, aj derivácia je v tomto bode nulová, čo je ekvivalentné podmienke na

[2] Predstavte si, aká strmá je funkcia práve vo svojom maxime, podobne ako keď vyjdete na vrchol kopca, má tam nulovú strmosť.

[3] Odkazujem na dôkladné preštudovanie napríklad nášho seriálu v XVI. ročníku alebo na študijný text FO.

viacnásobný koreň). Z Vietových vzťahov potom dostaneme existenciu dvojnásobného koreňa vtedy, keď má tento dvojnásobný koreň hodnotu

$$\frac{v}{v_0} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\,,$$

odkiaľ len vyberieme naše kladné riešenie.

Ján Pulmann
`janci@fykos.cz`

Úloha III.4 ... nadzvuková nebo podzvuková?

4 body; průměr 3,16; řešilo 61 studentů

Uvažujte bombu padající volným pádem svisle dolů na cíl. Po celou dobu pohybu, který začíná z klidu, vydává vlivem tření o vzduch zvuk, který se šíří rychlostí $c = 340\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Jaká je maximální možná rychlost dopadu, aby ti, na které bomba dopadne, ji ještě za živa slyšeli?

Lukáš sledoval kačenky na rybníce.

Ze zadání víme, že bomba padá volným pádem, tj. bez tření o vzduch, i když právě tímto nulovým třením zvuk vydává, což doufáme, že vás nevyvedlo moc z míry a že jste se s plnou vervou vrhli do řešení.

Protože bomba padá volným pádem, můžeme pro polohu zdroje zvuku psát

$$y(t) = H - \frac{1}{2}gt^2\,,$$

kde H je počáteční výška bomby, g je tíhové zrychlení a t je čas od začátku pádu. Nyní určíme čas T, ve kterém doputuje na zem zvuk vydaný v čase t. Ten musí překonat vzdálenost $y(t)$ určenou dle vztahu výše, tj. pro čas T platí

$$T(t) = t + \frac{y(t)}{c}\,.$$

Nyní si ukážeme malý trik, který se ve fyzice velmi často používá, protože zjednodušuje zápis. Položíme $c = 1$, což vypadá divně, protože rychlost zvuku není bezrozměrná. Ale nejde o problém, protože dostaneme-li obecný výsledek, tak není problém do něj dopsat na správná místa násobky c a to tak, abychom sčítali vždy veličiny stejného rozměru. Jiné vysvětlení je, že dále nebudeme vzdálenosti měřit v metrech, ale v sekundách, kde převodní konstanta bude právě rychlost zvuku c.

Proto můžeme psát

$$T(t) = H + t - \frac{1}{2}gt^2\,.$$

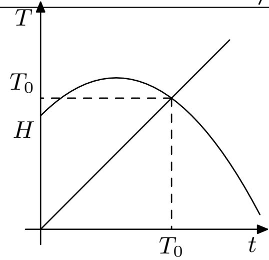
Dále víme, že bomba dopadne v čase T_0, pro který platí

$$T_0 = \sqrt{\frac{2H}{g}}\,.$$

Aby ji ti, na které bomba dopadne, slyšeli ještě za živa, musí existovat čas $t_0 \in \langle 0, T_0)$ určující okamžik vydání zvuku takový, aby $T(t_0) < T_0$.

Nakreslíme si proto graf 1 závislosti T na t, tedy závislost doby slyšení signálu na době vyslání signálu, a také do tohoto grafu zaneseme přímku $T = t$. Je zřejmé, že na průsečíku $T = T(t)$ a $T = t$ dojde k dopadu bomby na zem, protože vzdálenost zdroje od pozorovatele $\Delta = c(T - t)$ je nulová.

Nyní se podíváme, co značí přímka $T = \text{konst}$, resp. její průsečíky s $T(t)$. Vlastně se tímto ptáme: V jakém okamžiku byl vydán zvuk, který nyní slyšíme? Samozřejmě pro tuto interpretaci se musíme omezit na $t < T$, protože ty ostatní zvukové vlny nebyly ještě v daný moment vydány. Jak tohoto využít při řešení úlohy? Jednoduše. Pokud bude existovat průsečík paraboly s přímkou $T = \text{konst}$ takový, aby $t \in \langle 0, T)$, tak bombu uslyšíme. Z obrázku 1 je vidět, že pro časy $T \in \langle H, T_0)$ existuje čas t vydání zvuku, a proto v těchto časech bude bomba slyšet. Dále je též vidět, že aby byly budoucí oběti varovány, musí platit



Obr. 1: Závislost okamžiku uslyšení signálu na okamžiku jeho vyslání

$$H < T(T_0)\,,$$

do čehož můžeme dosadit ze vztahů výše a dostáváme

$$H < H + T_0 - \frac{1}{2}gT_0^2 = H + T_0 - H\,.$$

Nyní se již opět odvrátíme od označení $c = 1$ a nerovnici výše přepíšeme

$$H < cT_0 = c\sqrt{\frac{2H}{g}}\,.$$

Nyní uvážíme, že pro rychlost dopadu platí $v_\mathrm{D} = \sqrt{2Hg}$, a jednoduchými úpravami dostáváme

$$v_\mathrm{D} < 2c\,,$$

což je velmi zajímavý výsledek, protože bombu můžeme slyšet před dopadem, i když dopadá nadzvukovou rychlostí.

Komentář k došlým řešením

Skoro všichni, kteří poslali řešení, měli správný výsledek. Bohužel nemálo z vás neargumentovalo, že $2c$ je maximální možná rychlost „slyšitelného“ dopadu, resp. že první zvuková vlna dorazí na zem nejdříve. Za toto opomenutí jsme strhávali jeden bod. Pokud jste měli řešení správně a pokusili jste se pěkně odhadnout další úskalí této úlohy, a to hlavně odpor vzduchu, odhadnutí frekvence vydávaného zvuku nebo jeho hlasitosti, dostali jste bonusový bod.

Alternativní způsob řešení

Stačilo dát do rovnosti dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu bomby a rovnoměrného pohybu zvuku vydaného na počátku pádu,

$$ct = \frac{v^2}{2g}\,, \quad v = gt \quad \Rightarrow \quad v = 2c\,,$$

a použít velmi pěkný argument z vašich řešení, proč zvuk vydaný na počátku dorazí na zem nejdříve: „Před dosažením rychlosti zvuku je rychlost bomby menší než rychlost zvuku, proto zvuková vlna vydaná v pozdějším čase dorazí na zem později. Po překročení rychlosti zvuku můžeme již vydávané zvukové vlny ignorovat, protože dorazí později než bomba.“

Lukáš Ledvina
`lukasl@fykos.cz`

Úloha III.5 ... Gazprom

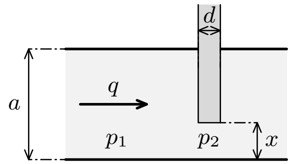
5 bodů; průměr 2,96; řešilo 27 studentů

Na plynovodu na daleké Sibiři, kterým teče zkapalněný zemní plyn, došlo k havárii a bylo nutné jej uzavřít. Spočítejte, jakou práci musel vykonat Váňa Vasilijevič, který byl vyslán k zásobníku zavřít výborně promazaný deskový ventil na příslušné lince. Jakou sílu musel během tohoto aktu vynakládat (vyjádřete ji v závislosti na rozumně vybrané veličině)? Ventil si představte jako desku, která je postupně vsouvána ze strany napříč do potrubí. Ve velkém rezervoáru, který je na linku připojen, je tlak $p = 2\,\mathrm{MPa}$, deskový ventil má tloušťku $d = 10\,\mathrm{cm}$, potrubí má čtvercový průřez o straně $a = 1\,\mathrm{m}$ a zkapalněný plyn o hustotě $\varrho = 480\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ jím protéká s průtokem $q = 20\,\mathrm{m^3{\cdot}s^{-1}}$. *Aleš poslouchal motivační píseň ruského plynárenského gigantu.*

Začněme obrázkem. Na nákresu geometrie systému vidíme vodorovný řez potrubím, přičemž vyznačeny jsou veličiny ze zadání. Uvažme, že tlak v potrubí těsně před ventilem (p_1) odpovídá tlaku v rezervoáru (p). Průřezu potrubí přiřadíme označení $S_1 = a^2$ a průřezu ventilu $S_2 = ax$. Budeme chtít zjistit, jaký je tlak p_2 ve ventilu v závislosti na ploše pod ním, protože ten vyvolává tlakovou sílu $F = p_2 A$ ($A = da$ je plocha hrany ventilu), kterou musíme při zavírání překonat. Práci pak spočteme jako $\int F(x)\,\mathrm{d}x$, kde x je vertikální rozměr volného prostoru ve ventilu (viz obrázek 2). O mezích integrace budeme mluvit později.

K určení tlaku p_2 využijeme Bernoulliho rovnici. Protože vsouváme desku z boku, můžeme člen odpovídající tíhovému potenciálu z rovnice vypustit.

$$\frac{1}{2}\varrho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\varrho v_2^2 + p_2\,,$$



Obr. 2: Uspořádání situace s ventilem

přičemž potřebujeme vědět, jaké rychlosti plynu jsou v potrubí a ve ventilu. Kapalný plyn budeme považovat za nestlačitelný.

Rychlosti spočítáme z rovnice kontinuity, kde výhodně použijeme hodnotu průtoku q známou ze zadání (obecně je totiž $q = Sv$),

$$S_1 v_1 = q = S_2 v_2\,,$$

z čehož vyplývá, že známe obě rychlosti – $v_1 = q/S_1 = q/a^2$ a $v_2 = q/S_2 = q/(ax)$ – za plochy jsme už dosadili jejich konkrétní velikosti spočtené ze zadaných parametrů.

Vyjádřeme nyní tlak p_2 z Bernoulliho rovnice

$$p_2 = \frac{1}{2}\varrho q^2\left(\frac{1}{S_1^2} - \frac{1}{S_2^2}\right) + p_1 = \frac{1}{2}\frac{\varrho q^2}{a^2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{x^2}\right) + p_1\,.$$

Teď je dobrá chvíle zamyslet se nad tím, co nám tento vztah říká. Jediným nezávislým parametrem v něm je x, kratší hrana otevřené části potrubí. Na začátku zavírání ventilu je $x = a$, pročež člen se závorkou zmizí úplně a na píst působí tlaková síla vyvolaná tlakem p_2. Když ventil budeme postupně zasouvat, x se bude zmenšovat, ale $1/x^2$ poroste, což znamená, že celý člen se závorkou bude mít záporné znaménko. Rychle proudící tekutina tedy snižuje tlak na ventil. Ale pro x jdoucí k nule $1/x^2$ roste nade všechny meze, a tudíž existuje taková pozice zasunutí ventilu x_0, při které snížení tlaku vyrovná tlak v rezervoáru (p_1). Když bychom ventil zasouvali ještě hlouběji, následováním vzorce bychom došli k tomu, že tlak ve zkoumaném místě bude záporný. To se ovšem v potrubích neděje. Jev, ke kterému v takovýchto případech dochází, se nazývá *kavitace* a jde o vytvoření bublin nasycené páry kapaliny. To se stává v případě, kdy je v kapalině při dané teplotě tlak nižší než tenze par této kapaliny. Vzniknuvší bubliny potom při dopadu na stěny poškozují materiál potrubí. Co to znamená pro náš výpočet? Určeme nejdříve hodnotu x_0 (položíme hodnotu $p_2 = 0$)

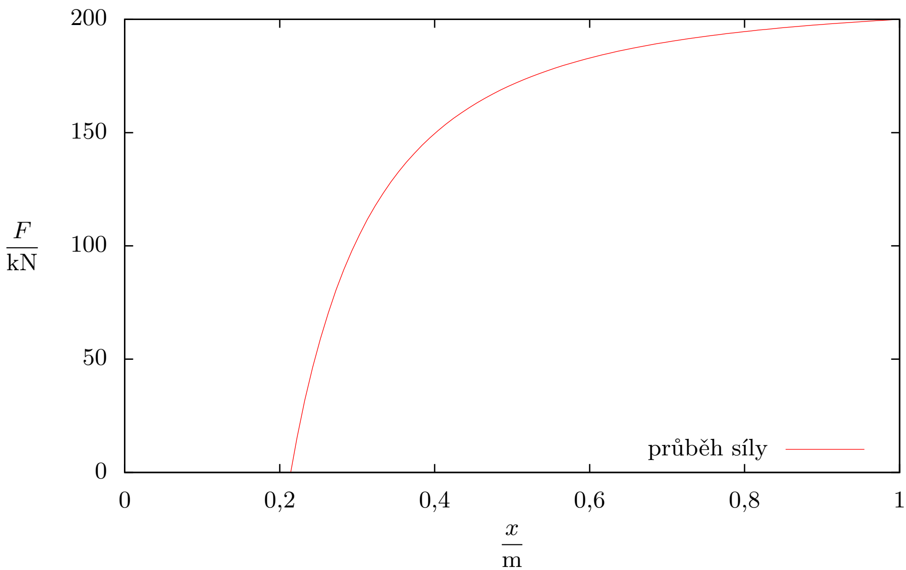
$$x_0 = \sqrt{\frac{\varrho a^2 q^2}{2p_1 a^4 + \varrho q^2}}\,,$$

což je pro naše data přibližně $x_0 = 0{,}21\,\mathrm{m}$. To znamená, že ke kavitaci začne docházet, když když ventil zavřeme přibližně do čtyř pětin.

Víme[4], že tlak nasycených par kapalného methanu se pohybuje od 15 kPa do 190 kPa. Tlak, který je v rezervoáru, je ovšem 10–100krát větší, zároveň nevíme, jak a kde se bubliny tvoří, a celý tento problém se týká jen pětiny dráhy, nahraďme tento zbytek nulou. Protože víme, že tlaková síla na píst působící proti směru jeho pohybu je $F(x) = adp_2(x)$, můžeme její průběh popsat jako

$$F(x) = \begin{cases} 0\,, & x \leq x_0\,. \\ ad\left[\frac{1}{2}\frac{\varrho q^2}{a^2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{x^2}\right) + p_1\right]\,, & x > x_0\,. \end{cases} \tag{1}$$

Pro konkrétní situaci vidíme průběh na obrázku 3.



Obr. 3: Průběh síly působící na píst.

Samotná velikost práce již je lehce spočitatelná z předpisu pro sílu (1). Je sice potřeba spočítat určitý integrál $\int F(x)\,\mathrm{d}x$, ale k tomu s výhodou můžeme použít například volně dostupný Wolfram Alpha. Výsledek pak určíme ve tvaru

$$W = (AB + C)(a - x_0) + A\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{x_0}\right)\,,$$

[4] `http://www.vscht.cz/uchi/e_tabulky/antoine.html`

kde $A = d\varrho q^2/(2a)$, $B = 1/a^2$, $C = adp_1$ a x_0 známe z předchozích úvah. Numerická hodnota vykonané práce pak po dosazení hodnot ze zadání je $W \doteq 130\,\mathrm{kJ}$. Kdo neovládá Wolfram Alpha, může stejného údaje dosáhnout pomocí svého oblíbeného tabulkového procesoru nebo programovacího jazyka.

Sice jsme dospěli k nějakému číselnému výsledku, nicméně nebude úplně správně. V základě jsme pro určení tlaku ve ventilu použili Bernoulliho rovnici, která ovšem platí pro místa na jedné proudnici. Také jsme mlčky předpokládali, že v celém průřezu je rychlost konstantní, což zřejmě neplatí. V takovémto (čtveratém) potrubí se těžko nebudou vyskytovat různé víry, které situaci ještě více zkomplikují, nehledě na to, že jsme zanedbali jevy, které nastanou potom, co začne docházet ke kavitaci. Nedá se tedy říct, že Váňa Vasilijevič pak všechnu energii získá zpátky snědením čtyř čtverečků mléčné čokolády, nicméně alespoň přibližný odhad nám to může poskytnout.

Aleš Podolník
`ales@fykos.cz`

Úloha III.P ... protikonspirační

5 bodů; průměr 2,74; řešilo 34 studentů

Zamyslete se nad tím, na kterých parametrech a jak může záviset délka kondenzační čáry za letadlem. Tyto parametry se pokuste odhadnout či vyhledat a určete možné délky čar. Na základě vašich úvah vyvraťte internetový mýtus o tzv. chemtrails, práškovacích letadlech, která na obyvatele sypou jedovaté látky. *Michal bojuje proti hlouposti.*

V prvom rade si potrebujeme daný jav vysvetliť kvalitatívne. V motoroch lietadla je palivo spaľované v naháňanom vzduchu. Ako palivo sa používa často petrolej. Ide o zmes nasýtených uhľovodíkov (C_kH_{2k+2}) s kostrou tvorenou 12 až 15 uhlíkmi. Pri takom počte uhlíkov v molekule môžeme povedať, že pomer uhlíkov a vodíkov je pre celú látku približne 1 : 2 (zastúpenie uhľovodíkov v petroleji nie je presné). Potom rovnica spaľovania vyzerá takto

$$\mathrm{CH_2} + \frac{3}{2}\,\mathrm{O_2} \longrightarrow \mathrm{H_2O} + \mathrm{CO_2}\,.$$

Pri reakcii nám vzniká voda (vodná para). Horúci vzduch vychádzajúci z motora sa rozopne a od okolitého prostredia schladí. Pri takej nízkej teplote sa nadbytočná voda vyzráža vo forme zmrznutých kvapiek. Takto nám vznikne takzvaná kondenzančná stopa, ktorú za lietadlami pozorujeme.

Ale čo spôsobí to, že sa vyzrážaná ľadová hmla rozplynie? Ľad sa späť rozpustí vo vzduchu. Ale keďže sa nám voda z nasýteného vzduchu už vyzrážala, musia sa zmrznuté kvapôčky presunúť a rozpustiť v okolitom nenasýtenom vzduchu. Na kvapôčky pôsobí gravitačná sila a odporová sila okolia a po krátkom čase sa ich pohyb ustáli. Postupne kvapôčky prechádzajú do nižších vrstiev a rozpúšťajú sa v suchom vzduchu.

Tak a teraz nastáva moment, kedy by sme chceli odhadnúť kvantitatívne, aká dlhá je naša stopa za lietadlom. Lietadlo sa pohybuje vo výške $h = 9\,\mathrm{km}$. Tlak vzduchu v tejto výške je $p = 31\,\mathrm{kPa}$, teplota $t = -44\,^\circ\mathrm{C}$, hustota vzduchu $\varrho = 0{,}47\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ a tlak nasýtených vodných pár pri tejto teplote (maximálna vlhkosť) $p_\mathrm{v} = 8{,}6\,\mathrm{Pa}$.

Spotreba paliva lietadiel dopravných letov sa pohybuje v závislosti na obsadenosti letu a type lietadla v rozmedzí $10\,\mathrm{g{\cdot}m^{-1}}$ až $20\,\mathrm{g{\cdot}m^{-1}}$. Zvolili sme preto ako približnú spotrebu paliva $Q = 15\,\mathrm{g{\cdot}m^{-1}}$. Uvažujme, že nás zaujíma, koľko paliva sa použilo na trase dĺžky l. Spotrebované palivo je $m = Ql$. Molárna hmotnosť jednej $\mathrm{CH_2}$ jednotky je $M = 14\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$.

Látkové množstvo CH_2 jednotiek potom je $n = m/M$. Z rovnice vidíme, že rovnaké látkové množstvo vody v motoroch vzniklo. Na naše zmrznuté guľaté kvapky polomeru $r = 10^{-5}\,\mathrm{m}$, objemu $V_1 = 4/3\pi r^3$ a hmotnosti $m_1 = \varrho_1 V_1$ (kde $\varrho_1 = 915\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$) pôsobí gravitačná sila $G = m_1 g$ (kde $g = 9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$) a odporová sila $F_\mathrm{o} = 1/2 C\pi r^2 \varrho v^2$ (kde $C = 0{,}45$ pre guľu). Pohyb kvapiek sa čoskoro ustáli. Z rovnováhy síl určíme rýchlosť klesania

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_1 g = \frac{1}{2} C\pi r^2 \varrho v^2\,,$$

$$v = \sqrt{\frac{8r\varrho_1 g}{3C\varrho}}\,.$$

Teraz potrebujeme vymedziť objem vzduchu, kde sa voda rozpustila. Šírku môžeme odhadnúť vzdialenosťou motorov $d = 12\,\mathrm{m}$. Dĺžka daného úseku je l. Za čas t prešli kvapky výšku $h = vt$. A v danom objeme $V = dlh$ sa nám vytvorená voda látkového množstva n rozpustila. Použitím stavovej rovnice dostávame vzťah, z ktorého vyjadríme čas potrebný na rozpustenie.

$$p_\mathrm{v} V = nRT\,,$$

$$p_\mathrm{v} dl \sqrt{\frac{8r\varrho_1 g}{3C\varrho}}\, t = \frac{Ql}{M} RT\,,$$

$$t = \frac{QRT}{Mp_\mathrm{v} d}\sqrt{\frac{3C\varrho}{8r\varrho_1 g}}\,.$$

Lietadlo ide rýchlosťou $u = 250\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, takže odhad dĺžky kondenzačnej čiary $s = ut$ pre naše zistené veličiny dáva

$$s = \frac{QRTu}{Mp_\mathrm{v} d}\sqrt{\frac{3C\varrho}{8r\varrho_1 g}} \approx 4\,\mathrm{km}\,.$$

Dostali sme pomerne rozumnú hodnotu. Platí však, že je tu veľa faktorov, ktoré môžu životnosť kondenzačnej stopy ovplyvniť. Napríklad už len vo výške 11 km je tlak nasýtených vodných pár 1 Pa, čo nám predĺži odhad na 35 km. Uvažovali sme zároveň, že vo vzduchu nie je žiadna vlhkosť, ale v skutočnosti nebude vlhkosť nulová, a preto môžu čiary žiť ešte dlhšie.[5] Ďalej v našom prípade sme uvažovali, že sa pohyb zamrznutých kvapôčiek ihneď ustáli, čo ale nejaký čas trvá. To nám odhad predĺži. Neuvažovali sme bočný vietor, ktorý by nám pomohol častice distribuovať do väčšieho priestoru, kde by sa mohla čiara rozpustiť. To nám odhad skráti. Zamrznuté kvapôčky sa budú pri klesaní rozpúšťať vo vzduchu, takže sa budú zmenšovať a tým pádom spomaľovať. To nám odhad zase predĺži. Keď unikajú z lietadla spaliny, tak sa okrem pohybu od lietadla budú aj rozširovať do strán, takže naša stopa bude širšia ako vzdialenosť motorov. To nám odhad zase skráti. A čo ak je náš odhad polomera kviapiek nadhodnotený a kvapky sú menšie? To by znamenalo, že sa nám čiara predĺži. Takto by sme mohli nájsť ešte veľa efektov, ktoré nám akurát vravia, že náš odhad môžeme brať ako rádový. Má vôbec zmysel odhadovať, ako sa zmení náš odhad dĺžky čiary zahrnutím týchto efektov? Ani nie, keďže podmienky ako vlhkosť, výška letu, rýchlosť a smer vetra nám náš odhad veľmi ovplyvňujú.

[5] Pekne vidno na tejto fotografii, že čiary vydržia dlhšie vo vlhkejšej oblasti. `http://en.wikipedia.org/wiki/File:Contrails_over_Nova_Scotia.jpeg`

Môžeme teda povedať, že dĺžka kondenzačnej čiary je rádovo v kilometroch a vo väčších výškach sa predlžuje, vo väčšej vlhkosti sa predlžuje a pri väčšom bočnom vetre sa skracuje.

Jakub Kocák
`jakub@fykos.cz`

Úloha III.E ... válení sudů

8 bodů; průměr 4,72; řešilo 36 studentů

Změřte závislost rychlosti na čase plechovky, která je zcela zaplněná vodou a která se rozjíždí z klidu po nakloněné rovině. Použijte nakloněnou rovinu, která je dlouhá alespoň dva metry a je rovná, bez hrbolů a není prohnutá. Experiment můžete realizovat například natočením a zpracováním videí či měřením doby, za kterou plechovka sjede vždy určitý úsek dráhy.

Karel se inspiroval minulostí.

Teorie

Teorii si zjednodušíme tak, abychom mohli použít zákon zachování energie. Nebudeme tedy uvažovat odpor vzduchu, valivý odpor a ani zahřívání kapaliny vyvolané jejím vnitřním třením. Polohová potenciální energie E_p se v našem modelu zcela přemění v kinetickou energii translační (posuvnou) E_t a rotační E_r. Dále předpokládáme, že plechovka neprokluzuje, valí se po desce a je s ní neustále v kontaktu.

Označíme-li délku nakloněné roviny d, sklon nakloněné roviny α, tíhové zrychlení g, celkovou hmotnost plechovky i s náplní m, rychlost plechovky v nejnižším místě nakloněné roviny v, moment setrvačnosti plechovky s vodou J, poloměr plechovky R a úhlovou rychlost otáčení plechovky ω, pak platí

$$E_\mathrm{p} = E_\mathrm{t} + E_\mathrm{r}\,, \quad v = \omega R\,,$$

$$E_\mathrm{p} = mgd\sin\alpha\,, \quad E_\mathrm{t} = \frac{1}{2}mv^2\,, \quad E_\mathrm{t} = \frac{1}{2}J\omega^2\,.$$

Po vyjádření z rovnic dostáváme vztah pro rychlost na konci dráhy

$$v = \sqrt{\frac{2mgd\sin\alpha}{m + \frac{J}{R^2}}}\,,$$

respektive tento vztah platí i tak, že místo d můžeme dosadit jinou vzdálenost na nakloněné rovině a dostáváme rychlost v tomto bodě.

Jak ovšem chápat moment setrvačnosti v našem případě? Voda se v plechovce jistě neroztáčí všechna najednou, ale postupně se (díky tření, které jinak zanedbáváme) roztáčí. Teoreticky, pokud by se vnitřní tření neuplatnilo vůbec, pak by se otáčela pouze plechovka, kdežto voda uvnitř by se pohybovala jenom translačním pohybem a J by bylo velmi malé, prakticky zanedbatelné. Rychlost by pak byla $v_\mathrm{max} = \sqrt{2gd\sin\alpha}$. Na druhou stranu, kdyby se jednalo o homogenní plný válec, tak by moment setrvačnosti byl $J = mr^2/2$, pokud bychom opět zanedbali lehkou plechovku, a rychlost by byla $v_\mathrm{val} = \sqrt{4/3\cdot gd\sin\alpha}$. Reálně nastane něco mezi těmito dvěma mezními možnostmi – tzn. voda se bude v plechovce pozvolna roztáčet.[6] Navíc se uplatní i zanedbané odporové síly, takže zrychlení, kterého plechovka dosáhne, bude nižší.

[6] Přesnější popis by vyžadoval uvážení rozměrů plechovky a vlastností použité vody, zejména její viskozity. Také by se mohlo stát, že voda v plechovce by byla při umístění na nakloněnou rovinu v rotačním pohybu, i když je zvenčí zdánlivě v klidu, a to bychom pak museli také zahrnout do svých výpočtů. Takovými vlivy se nebudeme dále zabývat, ale budeme si vědomi, že takové případy mohou nastat při sestavování experimentu a při zpracování výsledků.

Důležitým prvkem naší teorie je, že rychlost roste s druhou odmocninou vzdáleností, kterou plechovka urazí. Stejně jako např. volný pád či jakýkoliv rovnoměrně zrychlený pohyb. Tím pádem by rychlost měla růst lineárně se zrychlením někde mezi $g\sin\alpha$ (sjíždění bez valení) a $2/3 \cdot g\sin\alpha$ (valení plného válce). Vzhledem k přítomnosti odporových sil, které jsou navíc závislé na velikosti rychlosti, však můžeme očekávat, že průběh nebude dokonale lineární a že zrychlení bude nižší než vypočtené z teorie.

Z měření však můžeme vypočítat efektivní moment setrvačnosti válce naplněného vodou J_{ef}. Ten můžeme určit ze vztahu $v = at$ a po pár úpravách

$$J_{\mathrm{ef}} = mR^2 \left(\frac{g\sin\alpha}{a} - 1 \right) ,$$

kde a je naměřené zrychlení válce.

Měření

K měření byla použita smrková deska o délce $d = (2{,}330 \pm 0{,}005)\,\mathrm{m}$. Zadání si žádalo neprohnutou, rovnou desku. Pokud bychom to brali do důsledků, tak takovou desku nemůžeme najít, protože každá se pod naší plechovkou mírně (byť mikroskopicky) prohne. Zadání bylo míněno tak, aby byla použita právě taková deska, aby prohnutí nebylo okem pozorovatelné, což pro námi použitou desku platilo.

Deska byla podložena dřevěným špalkem a to tak, že vertikální rozdíl mezi horní hranou nakloněné roviny a jejím spodním koncem[7] byl $h = (81 \pm 1)\,\mathrm{cm}$. Výsledný úhel sklonu roviny vůči vodorovné rovině po započtení přenosu chyb[8] byl $\alpha = \arcsin(h/d) = (20{,}3 \pm 0{,}3)^\circ$.

Pro experimenty byly použity dvě válcové nádoby. První byla plastová uzavíratelná nádoba, která se dala snadno zcela zaplnit vodou a uzavřít. Druhou experimentální nádobou byla sice plechovka podle zadání, ale obsahující psí krmení, prostě psí konzerva. Naměřené vnější poloměry plechovek a jejich hmotnosti jsou v tabulce 1. Abychom měli srovnání i s dutým válcem, které by mohlo být zajímavé, tak jsme měřili plastový válec jak zcela naplněný vodou, tak prázdný.[9]

Měření bylo provedeno formou videozáznamu a následné analýzy v počítačovém programu Tracker. Snímkování kamery bylo 29 snímků za sekundu. Experiment byl vícekrát opakován a to tak, aby u každé plechovky byl úspěšně zpracovaný sjezd z téměř celé nakloněné roviny. Při

[7] Samozřejmě jsme neopomenuli použít vodováhu, abychom zjistili, jestli je terén, na kterém pokus probíhal, dostatečně rovný.

[8] Pro zvídavé – po chvíli odvozování (zderivování a drobných úpravách) z obecného

$$\Delta y\,(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2} ,$$

kde y je veličina vypočtená z veličin x_i, kterých je n, Δy je vypočtená chyba určení y a Δx_i jsou chyby x_i.

$$\Delta\alpha = \frac{1}{1 - \left(\frac{h}{d}\right)^2} \sqrt{\left(\frac{\Delta h}{d}\right)^2 + \left(2\frac{h^2}{d^3}\right)^2 \Delta d^2} .$$

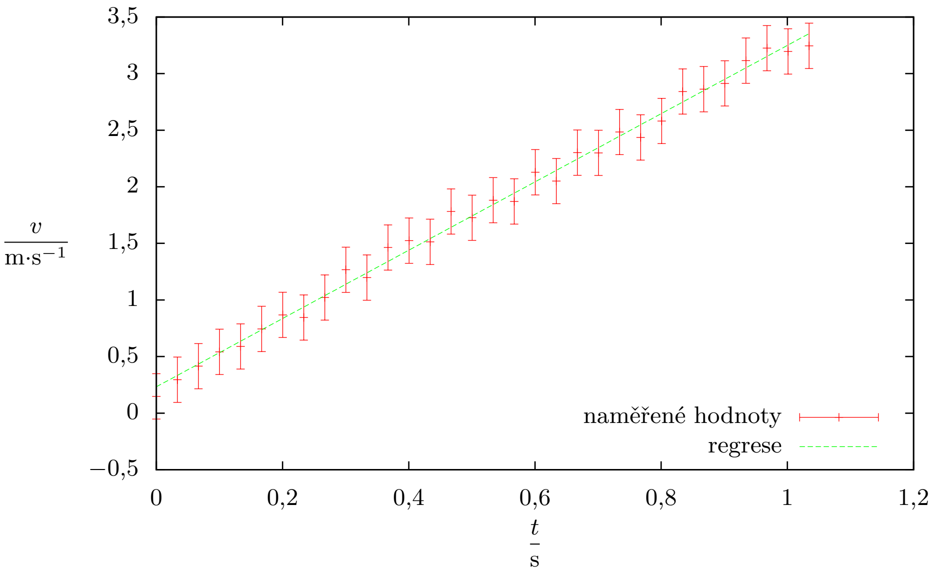
Pokud ještě nezvládáte tento vysokoškolský výpočet, tak kvůli tomu experimentálky nevzdávejte a místo poctivého výpočtu chybu alespoň kvalifikovaně odhadněte – například dosaďte tak, aby zlomek h/d byl co největší a co nejmenší a vezměte polovinu rozdílu hodnot $\arcsin(h/d)$ vypočtených těmito způsoby. V tomto případě dostanete prakticky stejnou chybu měření.

[9] Do situací mezi plně naplněným a prázdným jsme se již nepouštěli, protože v takovém případě se situace s prouděním v plechovce ještě dále významně komplikuje.

Tabulka 1: Tabulka rozměrů a hmotností experimentálních válců

válec	$\frac{R}{\mathrm{mm}}$	$\frac{m}{\mathrm{kg}}$
plastový prázdný	$43{,}0 \pm 0{,}25$	$0{,}042\,0 \pm 0{,}000\,5$
plastový naplněný vodou	$43{,}0 \pm 0{,}25$	$0{,}971\,0 \pm 0{,}000\,5$
psí krmení	$51{,}0 \pm 0{,}25$	$1{,}385\,0 \pm 0{,}000\,5$

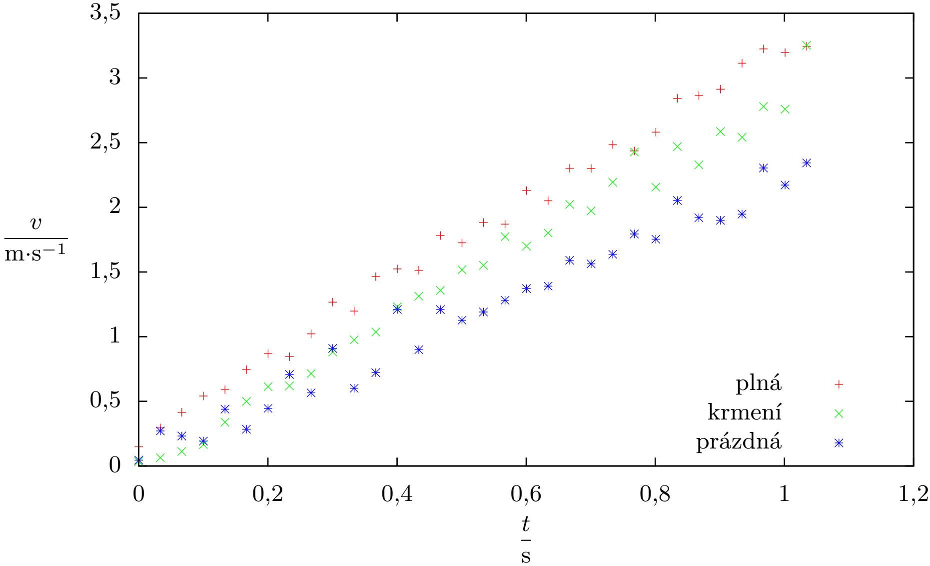
experimentálním provedení se totiž situace komplikovala tím, že ne vždy válec sjížděl zcela rovně a v některých případech z nakloněné roviny spadl, taková měření jsme ale pro další zpracování neuvažovali.



Obr. 4: Graf závislosti rychlosti válce naplněného vodou sjíždějícího z nakloněné roviny v závislosti na čase

V grafu 4 je pro přehlednost zanesena pouze závislost rychlosti na čase u plné plechovky, jak bylo požadováno v zadání úlohy. Jak je vidět, tak data relativně dobře leží na přímce, kromě toho, že tam vidíme určitý šum, ale ten je způsoben metodou zpracování – rychlost plechovky se počítá numericky z jednotlivých poloh plechovky v čase, které program neurčí zcela přesně. Tyto relativně malé chyby v určení polohy pak vedou k viditelným chybám v určení okamžité rychlosti (někdy to vypadá, že rychlost i poklesla), ale můžeme je použít v této podobě velice dobře pro určení směrnice a tedy zrychlení v průběhu pohybu a tím pádem i pro relativně dobrý popis děje. V grafu jsou chybové úsečky, ale pouze na ose y, protože chyba určení času měření je relativně malá vůči samotným velikostem bodů. Chyba určení rychlosti v jednotlivých časových intervalech je odhadnuta na $0{,}2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Byla určena z odhadu nepřesnosti určení polohy válce na dvou po sobě následujících snímcích. Uvažovali jsme, že při počítačové analýze trajektorie bude chyba zhruba 2 pixely na každém snímku.

V grafu 5 jsou pro srovnání všechna tři měření (plný válec, prázdný válec a psí krmení), ale pro lepší přehlednost bez chybových úseček.



Obr. 5: Graf závislosti rychlosti na čase pro všechny tři válce

Po proložení lineární funkcí pomocí metody nejmenších čtverců nám vychází zrychlení plného válce na nakloněné rovině jako $a_{\text{plný}} = (3{,}02 \pm 0{,}03)\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Pro prázdný válec jsme po aplikaci stejného postupu obdrželi výsledek $a_{\text{prázdný}} = (2{,}01 \pm 0{,}05)\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ a pro plechovku s psím krmením $a_{\text{krmení}} = (2{,}91 \pm 0{,}04)\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

Efektivní momenty setrvačnosti[10] vypočtené z naměřených zrychlení a rozměrů válce s vodou, prázdného válce a plechovky s krmením jsou

$$\begin{aligned} J_{\text{ef,plný}} &= (23 \pm 4) \cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}\,, \\ J_{\text{ef,prázdný}} &= (54 \pm 4) \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}\,, \\ J_{\text{ef,krmení}} &= (61 \pm 8) \cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}\,. \end{aligned}$$

[10] Chybu měření efektivního momentu setrvačnosti jsme určili ze vztahu

$$\Delta J = \sqrt{\left(\frac{J}{m}\Delta m\right)^2 + \left(2\frac{J}{R}\Delta R\right)^2 + \left(mR^2\frac{g}{a}\cos\alpha\Delta\alpha\right)^2 + \left(mR^2\frac{g}{a^2}\sin\alpha\Delta a\right)^2}\,.$$

Diskuze a závěr

Z grafu lze vyvodit, že v našem experimentálním uspořádání probíhal pohyb, který je relativně přesně popsatelný jako rovnoměrně zrychlený pohyb a nelineární odporové síly se tedy znatelně neprojevily. V případě prázdného válce a psího krmení vypadaly grafy podobně. Mírně se u obou projevily nelinearity, ale grafy bylo stále možné docela dobře aproximovat lineární funkcí. U krmení byl v grafu větší šum. To přikládáme za vinu nehomogenitám v obsahu plechovky – jedna otočka neprobíhala zcela rovnoměrně a těžiště plechovky pravděpodobně bylo mírně mimo osu.

Naměřená hodnota zrychlení pro plný válec $a_{\text{plný}} = (3{,}02 \pm 0{,}03)\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ je mezi hodnotami odpovídající sjíždění kvádru bez odporu (pro náš sklon roviny $g \sin\alpha = 3{,}40\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$) a valícího se homogenního válce ($2/3 \cdot g \sin\alpha = 2{,}55\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$), což jsme očekávali. V případě prázdného válce bychom očekávali, že jeho zrychlení bude mezi hodnotami pro valící se plný homogenní válec a pro valící se dutý tenkostěnný válcový plášť bez podstav (moment setrvačnosti má mR^2, zrychlení má $g/2 \cdot \sin\alpha = 1{,}70\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$), což se opravdu při měření potvrdilo ($a_{\text{prázdný}} = (2{,}01 \pm 0{,}05)\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$). Plechovka s psím krmením dosahovala zrychlení ($a_{\text{krmení}} = (2{,}91 \pm 0{,}04)\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$) blízké vodou naplněnému válci, byť o něco nižší, ale stále v intervalu hodnot, který jsme předpokládali. To, že je hodnota o něco nižší, se dá vysvětlit tím, že v případě psího krmení se bude plechovka chovat spíše jako plný válec a bude v ní nastávat o vyšší vnitřní tření.

Vzhledem k tomu, že jsme v teorii zanedbali odpor prostředí a vnitřní tření v kapalině a zrychlení válců bylo v očekávaném intervalu, tak nemůžeme moc přesně odhadnout, jak velký vliv měly tyto síly na průběh experimentu. Můžeme pouze prohlásit, že experiment neovlivnily v příliš velké míře.

Komentář k došlým řešením

S lítostí musíme konstatovat, že v došlých řešeních se nalézala spousta chyb. Úkolem bylo změřit závislost rychlosti na čase, což si část řešitelů neuvědomila a někteří změřili pouze jeden bod závislosti, někteří změřili závislost polohy na čase a zapomněli z toho určit závislost rychlosti na čase, někteří určili závislost rychlosti na poloze. Určením závislosti se míní i to, že měření bude provedeno v dostatečném množství bodů – v našem případě aspoň šesti, spíše více, aby z ní bylo patrné, jedná-li se o závislost lineární či složitější. Většina také prostě předpokládala, že se jedná o lineární závislost, a nezdůvodnila, proč. Absence teorie byla dalším vážným prohřeškem, který se opakoval. V teorii bychom čekali zmínění momentu setrvačnosti a výpočet s aspoň řádovým odhadem rychlosti, ale s komentářem, že moment setrvačnosti vlastně neznáme, protože se jedná o kapalinu, která se bude roztáčet pomaleji, než by se roztáčel tuhý válec. Zapomínali jste také zmínit odpor vzduchu, valivý odpor a vnitřní tření v kapalině. Chtěli bychom, aby byly odporové síly aspoň zmíněny, byť nespočítány v teorii.

Relativně častou chybou bylo zapomenutí určení úhlu sklonu nakloněné roviny a rozměry plechovky udaly jenom světlé výjimky řešitelů (což jsou údaje ve srovnání s teplotou, tlakem a vlhkostí vzduchu v našem měření důležitější, pokud jste zrovna plechovku nedávali do vakua, v místnosti jste neměli peklo apod.). Pravdou je, že rozměry plechovky jste nemuseli udat, pokud byste v teorii zdůvodnili, že je to pro vás nerelevantní údaj, ale právě kvůli tomu, že v plechovce je kapalina, tak by se výsledky různých plechovek mohly lišit.

Značná část řešitelů použila pro měření kameru. Bylo ale škoda, že často jste ji používali pouze pro určení časů a to v relativně málo bodech, když jste mohli využít nějaký program pro analýzu videa a mít naměřených poloh spoustu.

Klasické chyby, které se stávají u každé experimentálky, byly zapomenutí vysvětlení značení veličin, nedostatečný komentář k naměřeným hodnotám, špatně zaokrouhlené výsledky (moc platných cifer, naměřená hodnota se neřídila desetinnými místy chyby měření), zapomenutí určení chyb jednotlivých měření, chyb výsledků, spojování hodnot v grafu (ty se nemají spojovat prakticky nikdy), naopak zapomenutí proložení křivkou (např. přímkou, pokud jste očekávali, že zrychlení bude konstantní), chyběly chybové úsečky u naměřených hodnot, když už jste nějakou funkci nafitovali (proložili), tak jste skoro vždy zapomněli udat výsledné hodnoty fitu.

Nakročeno k tomu být nejlepšími řešiteli měli autoři, kteří používali více sklonů nakloněné roviny, a ti, kteří zkusili použít jak plnou, tak poloplnou a prázdnou sklenici, což jsme v úloze nutně nepožadovali. Škoda jen, že si to pokazili zpracováním.

Karel Kolář `karel@fykos.cz`
Hana Šustková `hanka@fykos.cz`

Úloha III.S ... tokamak

6 bodů; průměr 2,73; řešilo 15 studentů

a) *Spočtěte specifický odpor vodíkového plazmatu při teplotě* 1 keV *a srovnejte ho s odporem běžně používaných vodičů.*
b) *Spočtěte, jak velký proud plazmatu je zapotřebí k vytvoření dostatečně silného poloidálního magnetického pole v tokamaku, který má hlavní poloměr* 0,5 m. *Toroidální pole vytváří cívky navinuté okolo torusu s hustotou vinutí 20 závitů na metr, kterými prochází proud* 40 kA. *Poloidální pole by mělo mít velikost zhruba* 1/10 *pole toroidálního.*
c) *Pokuste se libovolným nápaditým způsobem vytvořit fyzický model siločar v tokamaku, tento model nafoťte a pošlete spolu s řešením.*

Robin.

a) Vztah uvedený v třetí části seriálu je sice zjednodušený, postačí ale pro to, abychom získali řádový odhad specifického odporu plazmatu.

$$\eta = \frac{e^2}{16\pi\varepsilon_0^2 m^2 v^3},$$

dospějeme k hodnotě cca $1{,}3 \cdot 10^{-7}\,\Omega\cdot\mathrm{m}$. Tento odpor můžeme srovnat např. se specifickým odporem mědi ($1{,}6 \cdot 10^{-8}\,\Omega\cdot\mathrm{m}$), olova ($2{,}2 \cdot 10^{-7}\,\Omega\cdot\mathrm{m}$) nebo oceli ($6{,}9 \cdot 10^{-7}\,\Omega\cdot\mathrm{m}$). Plazma je tedy poměrně dobrý vodič, což má za následek malý výkon ohmického ohřevu.

b) Nejprve si spočteme, jak velké toroidální pole vytvoří cívky o zadaných parametrech – s použitím vztahu pro magnetické pole vytvářené solenoidem

$$B_\mathrm{T} = \mu_0 n I\,,$$

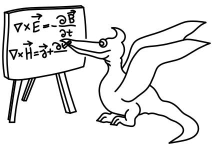
kde n je počet závitů na metr a I je proud v solenoidu. Po dosazení dospějeme k velikosti magnetického pole cca 1 Tesla. Poloidální pole by mělo mít velikost 0,1 T. Pro výpočet magnetického pole generovaného plazmatem budeme uvažovat přiblížení nekonečně dlouhého vodiče. V tomto případě magnetické pole klesá směrem od vodiče a je nutné zvolit referenční vzdálenost, ve které budeme velikost pole uvažovat. Jako dobré přiblížení slouží malý poloměr torusu. Tento údaj sice v zadání chyběl, vyskytoval se tam ale hlavní poloměr torusu ($R = 0{,}5\,\mathrm{m}$). Pro většinu moderních tokamaků je poměr hlavního a malého poloměru blízký 3, tj. můžeme uvažovat malý poloměr přibližně $a = 0{,}15\,\mathrm{m}$. Nyní již můžeme použít známý vzorec

$$B_{\mathrm{pol}} = \frac{\mu_0 I_{\mathrm{p}}}{2\pi a}$$

a získat hodnotu potřebného proudu plazmatu I_{p}. Po dosazení dospějeme k přibližné hodnotě $75\,\mathrm{kA}$.

Pozn.: Tento postup je velmi zjednodušený a zanedbává celou řadu efektů, např. zakřivení toroidálních cívek, profil proudové hustoty v plazmatu apod. Pro přibližný odhad potřebného proudu ale postačuje. Na tokamaku COMPASS, který má danou velikost toroidálního pole, se pracuje se zhruba dvojnásobnou velikostí proudu plazmatu, tj. okolo $150\,\mathrm{kA}$.

Michael Komm
`robin@fykos.cz`



Seriál: Transport částic

V dnešním díle seriálu se budeme věnovat problému transportu částic plazmatu napříč magnetickým polem. Tento problém je z pohledu jaderné fúze zásadní, protože rychle unikající částice znemožňují dosažení vysokých teplot a hustot nutných pro fúzi. V druhém a třetím dílu seriálu jsme ukázali, jak lze plazma zachytit v magnetickém poli. Žádná past ale není dokonalá, a tak existuje řada mechanismů, které umožňují částicím cestovat napříč magnetickým polem.

Jedněmi z nich jsou srážky, při kterých se mění směr rychlosti částic a umožňují částicím „přeskočit“ na jinou siločáru, okolo které následně gyruje Larmorovským pohybem. Srážky tak vytvářejí difuzní tok Γ, který je závislý na gradientu hustoty plazmatu s konstantou úměrnosti D (tzv. difuzním koeficientem)

$$\Gamma = -D\nabla n\,,$$

$$D = \frac{a^2}{\tau}\,,$$

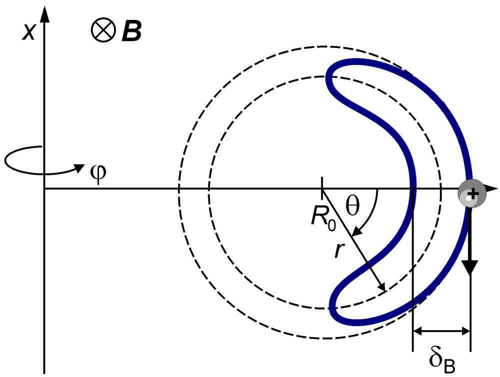
kde a je vzdálenost, o kterou se částice v průměru posune v důsledku jedné srážky, a τ je průměrná doba, po kterou se částice volně pohybuje mezi dvěma srážkami (tj. převrácená hodnota srážkové frekvence). Je důležité si uvědomit, že srážky mezi částicemi stejného druhu k difuzi nepovedou – jejich trajektorie se sice změní, ale v důsledku zákona zachování hybnosti se částice v podstatě prohodí a plazma jako celek se neposune. Difuzi mohou způsobit jen srážky mezi nestejnými částicemi, tj. mezi elektrony a ionty. V důsledku velkého rozdílu hmotností se budou elektrony odrážet od téměř nehybných iontů a jejich krok při jedné srážce bude roven Larmorově poloměru r_{Le}. Ionty budou svoji trajektorii měnit jen pozvolna, ale jejich Larmorův poloměr bude daleko větší. Ve výsledku to bude znamenat, že ionty i elektrony budou difundovat stejně rychle (toto tvrzení zde ale necháme bez důkazu). Jako difuzní krok budeme tedy brát Larmorův poloměr elektronů a použijeme vztah pro srážkovou frekvenci z minulého dílu seriálu. Dospějeme tedy ke vztahu pro difuzní koeficient, který má zajímavou závislost na hustotě a velikosti magnetického pole

$$D \sim \frac{n}{B^2}\,.$$

Tato úvaha stála u zrodu snahy o dosažení jaderné fúze v tokamacích. Vypočtená velikost difuzního koeficientu byla velice malá (typicky $D = 10^{-5}\,\mathrm{m}^2{\cdot}\mathrm{s}^{-1}$), navíc se měla kvadraticky zmenšovat s rostoucím magnetickým polem. Takto malá difuze (označovaná jako klasická difuze) slibovala velmi snadné dosažení hustoty a teploty nutné pro fúzní reakce deuteria s tritiem. Bohužel již první experimenty v tokamacích ukazovaly daleko vyšší difuzi, bylo tedy nutné najít mechanismy, které za ni mohou být odpovědné. Jedním z nich mohly být efekty spojené s toroidální geometrií tokamaku. V torusu totiž toroidální magnetické pole není konstantní, ale klesá směrem od osy torusu

$$B_{z_\mathrm{T}} = \frac{\mu_0 I_\mathrm{T}}{2\pi R}\,.$$

Částice v tokamaku, které sledují magnetické siločáry, se pohybují mezi oblastmi s větším (blízko osy torusu) nebo menším (dále od osy) magnetickým polem. Pro částice s určitou kombinací paralelní a kolmé rychlosti bude tento systém fungovat jako magnetické zrcadlo popsané dříve v seriálu a jejich trajektorie budou mít tvar tzv. banánových orbitů, jak je to znázorněno na obrázku 6.



Obr. 6: Banánový orbit částic zachycených v toroidálním poli.

Odvození rovnic charakterizujících pohyb zachycených částic je poměrně zdlouhavé, proto ho necháme pozornému čtenáři k samostatné úvaze. Spokojíme se se vztahem pro dobu, po kterou se budou částice pohybovat mezi body odrazu

$$\tau_\mathrm{B} = \frac{qR}{v_\perp}\sqrt{\frac{R_0}{r}}\,,$$

kde q je tzv. zásoba bezpečnosti (angl. safety factor)

$$q = \frac{rB_0}{R_0 B_\varphi}\,,$$

která charakterizuje míru zkroucení magnetických siločar v tokamaku. Během pohybu po banánovém orbitu působí na částici ∇B drift, který ji bude vychylovat z gyrace okolo magnetické siločáry. Míra této výchylky δ_B udává šířku banánového orbitu. Driftová rychlost bude přibližně

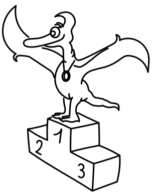
$$v_\mathrm{d} = \frac{v_\perp^2}{2\omega_\mathrm{L}}\frac{1}{R}\,,$$

kde ω_L je je larmorovská frekvence. V hrubém přiblížení můžeme uvažovat, že driftová rychlost je konstantní a působí po celou dobu pohybu mezi body odrazu. V tomto případě bude tedy šířka banánového orbitu

$$\delta_\mathrm{B} = v_\mathrm{d}\tau_\mathrm{B} \,,$$

$$\delta_\mathrm{B} = r_\mathrm{L} q \sqrt{\frac{R_0}{r}} \,.$$

Pro většinu tokamaků dosahuje q na okraji plazmatu hodnot okolo 5, poměr velkého a malého poloměru je zhruba 3. Šířka banánového orbitu je tedy zhruba desetinásobek Larmorova poloměru. Pokud částice utrpí srážku v blízkosti bodu obratu (kde se pohybuje nejpomaleji, tj. tráví zde nejvíce času), bude její difuzní krok roven šířce banánového orbitu. Vzhledem k tomu, že difuzní koeficient je úměrný čtverci tohoto kroku, bude výsledná difuze 100krát rychlejší. Tato difuze se nazývá neoklasická a vede k hodnotám difuzního koeficientu $D = 10^{-3}\,\mathrm{m^2{\cdot}s^{-1}}$. Experimentální měření transportu částic udávají hodnoty okolo $D = 1\,\mathrm{m^2{\cdot}s^{-1}}$, tj. o několik řádů vyšší, než je neoklasická difuze. Ukazuje se, že velice efektivním mechanismem transportu je elektromagnetická turbulence, kdy si plazma vytváří svoje elektrické pole, které následně pomocí $E \times B$ driftu umožňuje částicím uniknout z magnetické pasti. Za určitých okolností je ale možné tuto turbulenci potlačit, a pak difuze dosahuje hodnot předpovězených neoklasickým modelem.



Pořadí řešitelů po III. sérii

Kompletní výsledky najdete na `http://fykos.cz`.

Kategorie prvních ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	III	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	4	4	4	4	5	5	8	6	**40**	*100*	**121**
1.	*Jiří Jarošík*	G J. Vrchlického, Klatovy	4	4	1	4	2	4	5	0	**24**	*62*	**75**
2.	*Anna Kufová*	G M. Koperníka, Bílovec	4	6	2	3	1	3	6	0	**25**	*55*	**66**
3.	*Klára Stefanová*	G B. Němcové, Hradec Králové	2	2	–	3	1	0	–	–	**8**	*71*	**46**
4.–5.	*Lukáš Kotlaba*	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	2	–	–	3	–	–	3	–	**8**	*60*	**29**
4.–5.	*František Zajíc*	G, Nymburk	4	2	2	3	–	–	–	–	**11**	*81*	**29**
6.–8.	*Jaroslav Cerman*	G a SOŠ, Jilemnice	4	2	–	1	–	2	–	–	**9**	*60*	**26**
6.–8.	*Diana Miezgová*	G Liptovský Hrádok	–	–	–	–	–	–	–	–	**–**	*65*	**26**
6.–8.	*Marek Otýpka*	G, Židlochovice	2	0	–	1	–	2	–	–	**5**	*62*	**26**

Kategorie druhých ročníků

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**P**	**E**	**S**	**III**	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	4	4	4	4	5	5	8	6	**40**	*100*	**121**
1.	*Filip Ayazi*	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	4	4	2	3	4	3	8	2	**30**	*79*	**95**
2.	*Martin Kihoulou*	G, Mikulášské nám. 23, Plzeň	6	6	3	6	4	3	7	0	**35**	*79*	**87**
3.	*Jozef Bucko*	G PdC, Piešťany	4	4	2	3	4	4	7	–	**28**	*73*	**84**
4.	*Tomáš Fiala*	G, SOŠ a VOŠ, Ledeč n. Sáz.	4	4	2	4	4	–	7	3	**28**	*76*	**82**
5.	*Mikuláš Zindulka*	G, Mikulášské nám. 23, Plzeň	4	4	2	3	2	4	4	–	**23**	*74*	**73**
6.	*Jakub Dolejší*	G B. Němcové, Hradec Králové	4	4	4	4	3	–	–	–	**19**	*75*	**60**
7.	*Erik Döme*	G Hubeného, Bratislava	4	4	1	3	–	3	5	–	**20**	*66*	**53**

Kategorie třetích ročníků

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**P**	**E**	**S**	**III**	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	2	2	4	4	5	5	8	6	**36**	*100*	**109**
1.	*Patrik Turzák*	G Poštová, Košice	3	2	4	4	–	–	8	4	**25**	*99*	**87**
2.	*Jakub Kvorka*	G, Dubnica n. Váhom	2	2	3	4	4	3	6	5	**29**	*82*	**84**
3.	*Lukáš Knob*	G, Kojetín	1	2	–	3	–	–	–	4	**10**	*86*	**62**
4.	*Jiří Guth*	G, Jírovcova, České Budějovice	3	2	4	4	–	–	–	–	**13**	*86*	**57**
5.	*Peter Hojnoš*	G Školská, Spišská Nová Ves	1	2	–	3	5	3	–	3	**17**	*64*	**55**
6.	*Daniel Slezák*	Svobodná chebská škola	3	2	–	3	–	3	5	3	**19**	*75*	**52**
7.	*Radka Štefaníková*	G O. Havlové, Ostrava-Poruba	2	2	4	3	1	2	5	–	**19**	*62*	**50**

Kategorie čtvrtých ročníků

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**P**	**E**	**S**	**III**	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	2	2	4	4	5	5	8	6	**36**	*100*	**109**
1.	*Miroslav Hanzelka*	G, Česká Lípa	2	2	4	5	3	4	7	4	**31**	*93*	**97**
2.	*Jakub Šafin*	G, P. Horova, Michalovce	2	1	4	4	4	3	6	5	**29**	*84*	**87**
3.	*Jakub Bahyl*	G Varšavská, Žilina	1	2	4	3	4	3	3	4	**24**	*71*	**77**
4.	*Lubomír Grund*	G Christiana Dopplera, Praha	0	2	4	3	1	5	0	2	**17**	*69*	**75**
5.	*David Matejov*	G, Dubnica n. Váhom	2	2	3	3	4	2	8	–	**24**	*78*	**63**
6.	*Tereza Uhlířová*	G, Omská, Praha	1	2	1	4	4	3	6	–	**21**	*76*	**58**

FYKOS
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `http://fykos.cz`
e-mail: `fykos@fykos.cz`

FYKOS je také na Facebooku
http://www.facebook.com/Fykos

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.