

## Úloha II.E ... listopadová

8 bodů; průměr 5,30; řešilo 37 studentů

Uřete průměrnou plochu listu vámi vybraného stromu (či keře). Nezapomeňte na statistické zpracování vašich dat. Odhadněte, kolik energie ze slunečního záření může váš strom použít pomocí chlorofylu na tvorbu cukrů za jeden den, rok. Karel.

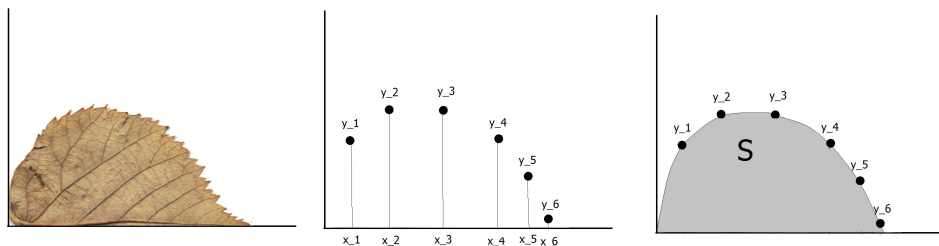
Tato úloha má dvě části, jedna je trochu matematická, druhá je trochu biologická. K našemu pokusu jsme si vybrali buk a javor v parku na Kraví hoře v Brně a z každého stromu nasbírali pokud možno reprezentativní vzorek asi 10–15 listů.

Plocha listu jde určit mnoha různě přesnými způsoby, některé jsou uvedeny a některé i vyzkoušeny v první části vzoráku. Nepřesnosti uvedených metod jsou ale mnohem menší než rozdíly v plochách mezi jednotlivými listy, není proto třeba metody šperkovat do přehnané přesnosti.

## Určení plochy listu

**Čtverečkový papír** Tohle je asi nejjednodušší, v případě jednoho listu i nejrychlejší, způsob – položíme list na čtverečkový papír, obtáhneme a spočítáme, kolik zabere čtverečků. Jak se vyrovnat s nerovnými okraji? Můžeme si pro ně stanovit pravidlo, že budeme odhadovat, jestli list zabere čtvereček nebo půlku čtverečku nebo čtvereček vůbec nezabere. Nebo spočítáme, kolik čtverečků zabere úplně, kolik úplně + alespoň trochu a z těchto dvou čísel uděláme aritmetický průměr. Je jasné, že čím menší list a větší čtverečky vezmeme, tím větší chyby se dopustíme. Nicméně pro velké množství listů je to vcelku pracná metoda, když se dělá ručně.

**Interpolování a integrace** Pokud máme hladký (nejlépe se spojitou derivací okraje) a symetrický list, jako třeba buk, můžeme si ho rozdělit podél osy (procházející řápkem) na dvě části, a obsah každé zjišťovat zvlášť. Řápkovou osu ztotožníme s osou  $x$ , okraj listu dáme třeba do počátku kartézské soustavy souřadnic. Zvolíme si na okraji listů několik hodnot  $y$ , ke kterým najdeme hodnoty  $x$  – budeme tedy mít několik bodů  $[x, y]$ , kterými můžeme proložit vhodný polynom a ten potom (zase třeba numericky) zintegrovat mezi okraji listu. Princip je znázorněn na obrázku.



Obr. 1: Metoda interpolování a integrace

**Monte Carlo** Další, trochu programovací, možností je použití metody Monte Carlo. Naskenujeme list na papíře do počítače, budeme tedy mít list na pozadí o známé ploše. Napíšeme

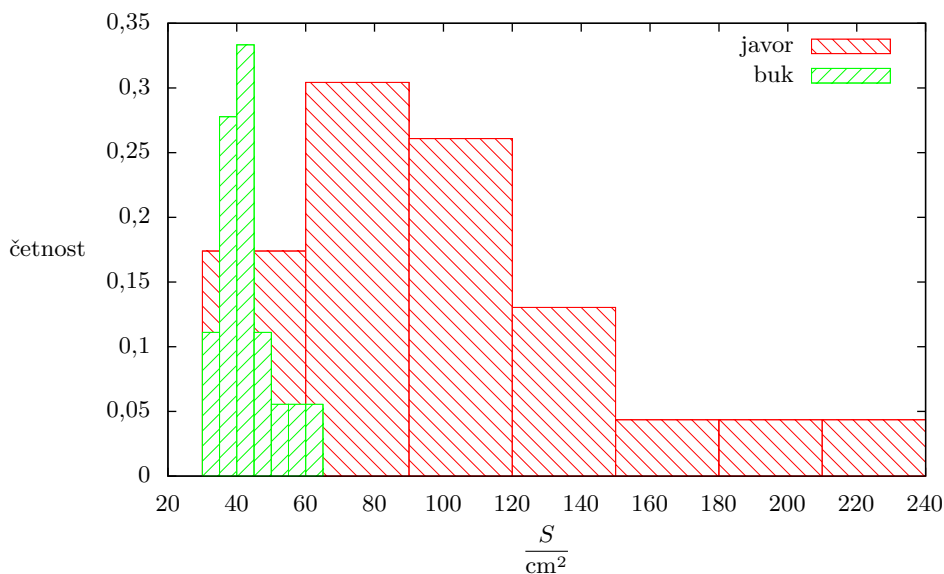
si program, který bude rovnoměrně a náhodně (!) vybírat body z celé plochy a pro každý bod rozhodne, jestli do listu patří, nebo ne. Potom z poměru počtu bodů v listu ku počtu bodů celkem zjistíme obsah plochy listu.

**Počítání pixelů** Pro naše měření jsme si vybrali tento způsob. Je to v podstatě čtverečková metoda v menších rozměrech – list naskenujeme na papír A4 o známé ploše. Naskenovaný obrázek (například v programu Gimp) upravíme tak, že tam, kde je list, bude černá plocha, a jinde bílá. Pak už jednoduše, třeba pomocí histogramu, určíme podíl černých pixelů a všech pixelů a z toho spočítáme obsah listu.

$\frac{S_{A4}}{\text{px}}$	$\frac{S_{\text{list}}}{\text{px}}$	$\frac{S_{\text{list}}}{\text{cm}^2}$	$\frac{S_{A4}}{\text{px}}$	$\frac{S_{\text{list}}}{\text{px}}$	$\frac{S_{\text{list}}}{\text{cm}^2}$
8 694 880	530 112	38	8 619 072	3 252 809	235
8 694 880	429 306	31	8 670 080	2 068 239	149
8 694 880	566 607	41	8 670 080	838 180	60
8 694 880	497 956	36	8 722 928	786 776	56
8 694 880	552 426	40	8 675 040	1 608 507	116
8 619 072	426 173	31	8 675 040	1 466 428	105
8 722 928	559 589	40	8 842 944	1 370 373	97
8 722 928	546 035	39	8 842 944	1 279 372	90
8 513 940	564 358	41	8 842 944	1 152 676	81
8 705 398	550 603	39	8 638 784	784 268	57
8 666 932	563 327	41	8 638 784	630 905	46
8 666 932	725 989	52	8 638 784	749 055	54
8 666 932	895 578	64	8 600 088	2 145 590	156
8 666 932	554 545	40	8 600 088	1 511 269	110
8 666 932	483 047	35	8 684 362	2 567 299	184
8 666 932	776 879	56	8 530 098	1 804 438	132
8 457 475	658 137	49	8 530 098	1 171 948	86
8 457 475	656 597	48	8 530 098	872 321	64
			8 513 940	1 499 103	110
			8 513 940	1 159 501	85
			8 705 398	1 139 623	82
			8 705 398	1 823 675	131
			8 457 475	871 670	64

Tabulka 1: Měření plochy listů

**Zpracování dat** V tomto případě nemůžeme použít obvyklé zpracování (aritmetický průměr, výběrová směrodatná odchylka, atd.), protože hodnoty nesplňují tzv. normální neboli Gaussovo rozložení. My neměříme spoustu hodnot, které by se měly blížit jisté jedné hodnotě, ale listy mají prostě různou svou velikost, která se během jejich života mění a my jsme je zastihli zrovna v nějaké fázi. Podíváme-li se na histogramy, vidíme, že Gaussovo rozdělení nesplňují.



Obr. 2: Histogramy z měření plochy listů

Vhodným popisem výsledku bude medián. Ten zjistíme, když seřadíme všechny naměřené hodnoty podle velikosti a vezmeme tu prostřední (v případě sudého počtu hodnot aritmetický průměr dvou prostředních).

$$S_b = 40 \text{ cm}^2, \quad S_j = 86 \text{ cm}^2.$$

### Odhad energie

U obou vybraných stromů jsme odhadli počet listů  $n$ :  $n_{\text{buk}} = 2000$ ,  $n_{\text{javor}} = 5000$ . Celková plocha listů na stromě bude  $2nS$ , protože fotosyntéza může probíhat na obou stranách listu.

O množství energie, které k nám přijde ze Slunce, hovoří solární konstanta, její hodnota se zhruba rovná  $1367 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ . Konkrétní množství sluneční energie dopadající na dané místo na Zemi je ale menší, zejména kvůli zemské atmosféře. Průměrná hodnota je rovna asi čtvrtině solární konstanty<sup>1</sup> –  $P_S = 342 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ .

V listech jsou chloroplasty, na kterých probíhá fotosyntéza – strom chytá energii ze slunečního záření a přeměňuje ji na jiné formy energie – rovnici



všichni známe. Nicméně ne všechna energie, která na list dopadne, se skutečně využije. Účinnost fotosyntézy se typicky pohybuje jen okolo 0,1%–2%.<sup>2</sup> Počítejme s  $\eta = 0,1\%$ . Tak malá účinnost je způsobena několika faktory, nejdůležitější zkusíme vyjmenovat:

<sup>1</sup>Solární konstanta. In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001. [cit. 2012-11-09]. Dostupné z [http://cs.wikipedia.org/wiki/Sol%C3%A1rn%C3%AD\\_konstanta](http://cs.wikipedia.org/wiki/Sol%C3%A1rn%C3%AD_konstanta)

<sup>2</sup>Photosynthetic efficiency. In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001. [cit. 2012-11-09]. Dostupné z: [http://en.wikipedia.org/wiki/Photosynthetic\\_efficiency](http://en.wikipedia.org/wiki/Photosynthetic_efficiency)

- Fotosyntéza funguje pouze pro světlo o vlnových délkách 400 nm–700 nm, ale na list dopadá celé sluneční záření s větším rozsahem vlnových délek.
- Když už na list dopadne světlo s vlnovou délkou 400 nm–700 nm, list si ho upraví tak, aby mělo potřebných 700 nm.
- List neabsorbuje dokonale všechny vhodné fotony, které na něj dopadnou – některé se třeba odrazí nebo prostě nejsou úplně využity, protože dopadnou pod velkým úhlem.
- Část vyrobené glukózy se spotřebuje na energii pro další fáze fotosyntézy.

Teď už můžeme spočítat, kolik sluneční energie tedy náš strom využije na tvorbu cukrů za den – dejme tomu, že strom je osvětlen po dobu  $t = 12$  h:

$$\begin{aligned} E_{\text{den, buk, 12h}} &= \eta \cdot S \cdot P_{\text{S}} \cdot t = 0,001 \cdot 2 \cdot 2\,000 \cdot 40 \text{ cm}^2 \cdot 342 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot 12 \cdot 3\,600 \text{ s} = \\ &= 2,4 \cdot 10^5 \text{ J}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{\text{den, javor, 12h}} &= \eta \cdot S \cdot P_{\text{S}} \cdot t = 0,001 \cdot 2 \cdot 5\,000 \cdot 86 \text{ cm}^2 \cdot 342 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot 12 \cdot 3\,600 \text{ s} = \\ &= 1,3 \cdot 10^6 \text{ J}. \end{aligned}$$

Chceme-li odhadnout hodnoty za celý rok, musíme si uvědomit, že strom má listy pouze asi 8 měsíců v roce (přibližně duben – listopad), z toho na podzim už nejsou zelené, takže i fotosyntéza probíhá méně. Uvažujme efektivní počet měsíců 5,5. Slunce tyto měsíce nesvítí celý den, průměrně řekněme 14 hodin. Ne všechny dny je slunečno – proto se ještě přijatá energie sníží o koeficient přibližně 0,4.<sup>3</sup>

$$E_{\text{rok, buk}} = 0,4 \cdot E_{\text{den, buk, 14h}} \cdot \frac{365 \cdot 5,5}{12} = 1,8 \cdot 10^7 \text{ J},$$

$$E_{\text{rok, javor}} = 0,4 \cdot E_{\text{den, javor, 14h}} \cdot \frac{365 \cdot 5,5}{12} = 9,9 \cdot 10^7 \text{ J}.$$

### Komentář k došlým řešením

Často se opakovala ta samá chyba – platné číslice! Když se třeba hodnoty liší v až desítkách, nemá cenu je uvádět na deset desetinných míst. Chyba se zaokrouhlí na první platnou číslici a podle toho i hodnota.

Moc se nám nelíbilo, když někdo v experimentálce měřil za nějakým účelem objem nebo tloušťku listu. Přesnost měření různě tlustého listu s žilkami není moc velká a strkání listů do odměrného válce není vhodné. A když už používáte takovéto metody, tak se zamyslete, jestli se plocha listů, co vám vyšla, až příliš neliší od skutečnosti (třeba jestli to nevypadá, že jste měřili banánovník).

Další častou chybou bylo, že jste jako dopadající energii uvažovali solární konstantu – nicméně to je údaj, který platí ještě předtím, než světlo projde atmosférou, je proto třeba brát menší číslo.

<sup>3</sup>Sluneční energie. [online]. [cit. 2012-11-09]. Dostupné z [http://www.solarniobchod.cz/clanek\\_1.php](http://www.solarniobchod.cz/clanek_1.php)

V konkrétních číselných hodnotách energií jsme se mohli dost lišit, protože každý použil jiný strom. Hodnotili jsme proto postup, správné googlení a trochu zdravého rozumu – listnatý strom nemá listy celý rok.

*Dominika Kalasová*  
dominika@fykos.cz

---

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.