Úloha III.1 ... konjunkce

2 body; průměr 1,70; řešilo 60 studentů

Oblíbeným tématem proroků kosmických katastrof jsou konjunkce planet. Představte si, že je poledne a jedna taková konjunkce zrovna nastala. O kolik nejvíce procent můžete být lehčí, pokud uvažujeme, že Země je počátkem polopřímky, na které leží všechny velké planety a Slunce, vůči situaci bez ostatních planet a Slunce? *Jako blesk z čistého nebe (Aleš P.).*

Hned ze začátku je třeba zmínit, že úloha nebude jen o pouhém dosazení do vzorečku, jak by to mohlo na první pohled vypadat. Naopak, budeme muset vynaložit trochu mentálního úsilí, abychom došli ke správnému výsledku a přitom bezděčně nahlédneme, jak se věci mají v případě slapového působení.[1]

Začněme rozborem situace. Zadání nám říká, že v okamžiku konjunkce Země leží v počátku polopřímky, na které se nachází další planety a Slunce. Mohlo by nás zajímat, jak jsou tyto objekty na polopřímce uspořádané. Přirozeně, příroda nám nedovolí žádné psí kusy a zachováme-li tedy přirozené pořadí planet ve sluneční soustavě, zbývá nám akorát rozhodnout, jestli se Merkur a Venuše nachází mezi Sluncem a Zemí nebo až za Sluncem. Zde bychom si mohli říct, že v tom nám jednoznačně pomůže klausule ze zadání „o kolik *nejvíce* procent můžete být lehčí“. Ale zas tak jednoznačné to není, protože, jak dále uvidíme, naše zlehčení nezávisí na intensitě gravitačního pole jako spíše na jejím gradientu (jinými slovy na tom, jak moc se intensita mění se vzdáleností). Rovněž si ale povšimneme toho, že máme uvažovat pouze velké planety (Jupiter, Saturn, Uran a Neptun) a Merkur s Venuší tedy budeme nakonec stejně ignorovat.

Uvažujme nejdřív, že se Země (a my) nachází v obecném gravitačním poli se zrychlením $\boldsymbol{a}_\mathrm{g}$ ve směru polopřímky, na které leží planety. Zvolíme-li počátek jednorozměrných souřadnic orientovaných ve směru polopřímky šikovně ve středu Slunce a označíme-li r_z vzdálenost Země od Slunce, můžeme pak pro sílu působící na Zemi psát $\boldsymbol{F}_\mathrm{z} = m_z \boldsymbol{a}_\mathrm{g}(-r_\mathrm{z})$, kde m_z je hmotnost Země.

Nyní se na situaci podívejme z pozice pozorovatele na povrchu Země. Uvažujme, že situace nastala v pravé poledne, a, pro zjednodušení, na rovníku v den rovnodennosti, takže Slunce (a planety) máme v nadhlavníku. Za prvé je nutné si uvědomit, co vlastně počítáme, tedy co znamená to „zlehčení“. Určitě to neznamená změnu naší setrvačné ani gravitační hmotnosti, které jsou v rámci klasické fyziky konstantní ve všech vztažných soustavách. Definujeme-li si ale naši hmotnost jako to, co naměříme na osobních vahách, pak už má smysl se o nějakém zlehčení bavit. Osobní váhy totiž nejsou nic jiného než sofistikovaný siloměr, který měří tlakovou sílu, kterou působíme na podložku. O co nám tedy půjde je relativní změna této síly mezi jednotlivými případy (konjunkce a isolovaná Země bez Slunce a planet).

Dále je nutné si uvědomit, že soustava našeho pozorovatele není inerciální. Jednak proto, že Země rotuje kolem své osy, a taky proto, že v případě konjunkce se díky silovému působení ostatních objektů pohybuje se zrychlením o velikosti $a_\mathrm{g}(-r_\mathrm{z})$ směrem ke Slunci a k planetám (ať už je zrychlení lineární nebo dostředivé, je to jedno). Působí zde tedy řada fiktivních sil, což se nám promítne do pohybové rovnice našeho pozorovatele v soustavě spojené s jeho pozorovacím místem. Dále také víme, že v této soustavě je pozorovatel v klidu, tedy výslednice sil na něho působících je nulový vektor, a dostáváme následující podmínku pro velikosti sil

$$R + m a_\mathrm{g}(-r_\mathrm{z} + R_\mathrm{z}) + F_\mathrm{o} - m\frac{G m_\mathrm{z}}{R_\mathrm{z}^2} - F_\mathrm{s} = 0\,,$$

[1] To můžeme obecně charakterizovat jako silové působení na objekt v důsledku přítomnosti nehomogenního silového pole, které má často deformační účinky.

kde m je hmotnost pozorovatele-proroka, R je velikost reakce podložky (ta nás velice zajímá, neboť je rovna velikosti tlakové síly, kterou působíme na podložku, viz výše), R_z je poloměr Země, $a_\mathrm{g}(-r_\mathrm{z}+R_\mathrm{z})$ je velikost gravitačního zrychlení způsobeného planetami a Sluncem (všimněme si, že se liší od hodnoty pro střed Země, což bude klíčové), $F_\mathrm{o} = m\omega^2 R_\mathrm{z}$ je velikost odstředivé síly způsobené rotací Země úhlovou rychlostí ω, G je Newtonova gravitační konstanta a, konečně, F_s je velikost setrvačné síly způsobené zrychlující Zemí se zrychlením $a_\mathrm{g}(-r_\mathrm{z})$, takže $F_\mathrm{s} = ma_\mathrm{g}(-r_\mathrm{z})$. Přesuneme-li pak Zemi do velké vzdálenosti ode všech planet a Slunce (ale ponecháme-li ji rotovat kolem vlastní osy), odpadnou nám členy $ma_\mathrm{g}(-r_\mathrm{z}+R_\mathrm{z})$ a F_s a pro novou velikost reakce R_0 můžeme psát rovnici

$$R_0 + F_\mathrm{o} - m\frac{Gm_\mathrm{z}}{R_\mathrm{z}^2} = 0\,.$$

Označíme-li hledanou relativní změnu reakce (a tedy i tlakové síly na kryt vah) $\chi = (R-R_0)/R_0$ ($\chi < 0$ pokud se jedná o zlehčení, $\chi > 0$ pokud o ztěžknutí), můžeme psát

$$\chi = \frac{ma_\mathrm{g}(-r_\mathrm{z}) - ma_\mathrm{g}(-r_\mathrm{z}+R_\mathrm{z})}{m\frac{GM_\mathrm{z}}{R_\mathrm{z}^2} - F_\mathrm{o}} = \frac{a_\mathrm{g}(-r_\mathrm{z}) - a_\mathrm{g}(-r_\mathrm{z}+R_\mathrm{z})}{Gm_\mathrm{z} - \omega^2 R_\mathrm{z}^3} R_\mathrm{z}^2\,.$$

Jak jsme již avizovali, tato relativní změna závisí na rozdílu gravitačního zrychlení od Slunce a planet mezi povrchem a středem Země, tedy na tom, jak rychle se zrychlení mění se vzdáleností.

Poslední, co musíme udělat, je explicitně vyjádřit $a_\mathrm{g}(-r_\mathrm{z}) - a_\mathrm{g}(-r_\mathrm{z}+R_\mathrm{z})$, což už bude to slibované dosazení do vzorečku. Užijeme-li Newtonova zákona všeobecné gravitace, máme pro $a_\mathrm{g}(-r_\mathrm{z})$ a $a_\mathrm{g}(-r_\mathrm{z}+R_\mathrm{z})$ vztahy

$$a_\mathrm{g}(-r_\mathrm{z}) = G\sum_{j=1}^{5} \frac{m_j}{(r_\mathrm{z}+r_j)^2}\,, \quad a_\mathrm{g}(-r_\mathrm{z}+R_\mathrm{z}) = G\sum_{j=1}^{5} \frac{m_j}{(r_\mathrm{z}-R_\mathrm{z}+r_j)^2}\,,$$

kde indexy 1 až 5 značí veličiny příslušející po řadě Slunci, Jupiteru, Saturnu, Uranu a Neptunu (r_j jsou vzdálenosti objektů od Slunce, m_j jsou jejich hmotnosti – r_1 je tedy zřejmě nula, neboť se jedná o vzdálenost Slunce od Slunce). Kdybychom se nestarali o eleganci našeho výsledku, mohli bychom teď klidně vzít číselné hodnoty všech veličin a dosadit. Dosazování by to ale bylo úmorné, tak si to nejdříve trochu usnadníme. Všimneme si totiž, že $R_\mathrm{z} \ll r_j$ pro všechny možné indexy j, které jsou k mání, a tedy, že $R_\mathrm{z}/r_j \ll 1$. Nic nám tedy nebrání, abychom ve velkém nasadili aproximaci $(1+x)^r \approx 1 + rx$ pro $x, r \in \mathbb{R} : x \ll 1$. Povytýkáme jmenovatele zlomků a dostaneme

$$a_\mathrm{g}(-r_\mathrm{z}+R_\mathrm{z}) \approx G\sum_{j=1}^{5} \frac{m_j}{(r_\mathrm{z}+r_j)^2}\left(1 + 2\frac{R_\mathrm{z}}{r_\mathrm{z}+r_\mathrm{j}}\right)\,,$$

čímž nahlédneme, že po odečtení od $a_\mathrm{g}(-r_\mathrm{z})$ se nám vše náramně zjednoduší na

$$a_\mathrm{g}(-r_\mathrm{z}) - a_\mathrm{g}(-r_\mathrm{z}+R_\mathrm{z}) \approx -2GR_\mathrm{z}\sum_{j=1}^{5} \frac{m_j}{(r_\mathrm{z}+r_j)^3}\,,$$

a tedy konečně

$$\chi \approx \frac{-2GR_\mathrm{z}^3}{Gm_\mathrm{z} - \omega^2 R_\mathrm{z}^3}\sum_{j=1}^{5} \frac{m_j}{(r_\mathrm{z}+r_j)^3}\,.$$

Toť náš obecný výsledek. Vidíme, že zřejmě $\chi < 0$ a jde tedy opravdu o zlehčení, neboť pokud by byl jmenovatel rovněž záporný, tak by důsledky tohoto faktu byly zřejmě daleko destruktivnější než prorokovaná konjunkce. Dále upoutejme naši pozornost na třetí mocniny ve jmenovatelích – to nám říká, že zlehčení závisí na mínus třetí mocnině vzdálenosti planet a Slunce od nás, což jsme již prorokovali, když jsme tvrdili, že χ bude záviset na gradientu pole. To je totiž úměrné $1/r^2$ vzdálenosti od gravitujícího objektu a ti pokročilejší z vás už ví, že derivováním této závislosti opravdu dostaneme úměru $1/r^3$.

Důležitou lekcí tedy je, že naše zlehčení nezávisí tolik přímo na intenzitě rušícího gravitačního pole planet jako spíše na míře jeho nehomogenity, čímž se dostáváme ke slapovému působení, které jsme zmínili na začátku. V obecném případě pak vždy platí, že jeho intenzita je vždy úměrná gradientu daného pole, což nás ve třech rozměrech přivádí ke studiu tenzorů. Jako cvičení si dovolíme čtenáři přenechat důkaz možná poněkud překvapivého tvrzení, že uvážíme-li situaci pro stejné podmínky, akorát o půlnoci místo v poledne, dostaneme opět *zlehčení*, které bude přibližně stejné, jako to, co jsme právě spočetli. A pokud bychom chtěli být v našich výpočtech naopak ještě přesnější, je třeba zahrnout efekt způsobený nebodovostí Země, což což se projeví efektivní změnou její hmotnosti v Newtonově vztahu pro gravitační sílu, kterou na ní Slunce působí. Ukazuje se, že tento efekt není až zas tak zanedbatelný, jak by se mohlo zdát, řádově odpovídá zlehčení, které je způsobené Jupiterem a je větší než zlehčení způsobené ostatními planetami. To nás ale nakonec stejně příliš netrápí.

Abychom totiž nezapomněli, zajímá nás rovněž číselná hodnota χ. Ještě jednou a naposledy si ušetříme čas a všimneme si, že nejtěžší planeta Jupiter je skoro přesně tisíckrát lehčí než Slunce. Také je od nás v dané konfiguraci asi šestkrát dále než Slunce (ostatní planety jsou ještě lehčí a ještě vzdálenější). A jelikož výsledný efekt závisí na mínus třetí mocnině vzdálenosti, bude zlehčení způsobené Jupiterem řádově 10^5krát menší než zlehčení způsobené Sluncem. Vliv Jupiteru a všech planet lze tedy naprosto bezpečně ignorovat. A konečně, snadno ověříme, že relativní chyba způsobená zanedbáním korekce na odstředivou sílu způsobenou zemskou rotací je řádu 10^{-3}, a tak řekneme, že nám příliš nevadí. Tím se dostáváme k opravdu finálnímu a krásnému vztahu

$$\chi \approx -2\frac{m_{\mathrm{sol}}}{m_{\mathrm{z}}}\frac{R_{\mathrm{z}}^3}{r_{\mathrm{z}}^3}\,,$$

který po dosazení dává $\chi \approx -5 \cdot 10^{-8}$, a my tedy budeme lehčí řádově o 10^{-6} procent. Jelikož jsme ale oprávněně vymazali vliv ostatních planet, musíme se smířit s tím, že k této katastrofě dochází každou rovnodennost (a v menší míře de facto každý den).

Komentář k došlým řešením

Všichni řešitelé až na jediného, kterým byl *Filip Murár*, výše zmíněný háček v řešení neobjevili a tak drtivá většina z vás dospěla k výsledku 0,06 %, což je přeci jen poněkud hodně. Nutno ale zmínit, že náznak správné myšlenky se objevil i v řešeních Viktora Skoupého a *Daniela Slezáka*, a i jim tedy patří bonus a věčná sláva. A v neposlední řadě, *Martin Kihoulou* a *Jirka Guth* se v řešení zabývali frekvencí, s jakou takováto konjunkce nastane, popřípadě jak na tom budou i ostatní pozorovatelé, nejen ti na rovníku. I ti tedy byli po zásluze odměněni.

Nicméně, prvotním účelem úlohy bylo opravdu pouze srovnat intenzity gravitačních polí od různých objektů ve Sluneční soustavě, což jste tedy všichni správně intuitivně vycítili a své body po zásluze obdrželi. Pochvalu zaslouží obzvláště ti, co si uvědomili, že planety nemají na situaci významný vliv ve srovnání s vlivem Slunce.

Budiž tedy pro všechny ponaučením, že i zdánlivě samozřejmá situace nemusí být samozřejmá a že je třeba vše řešit pečlivě, protože ne vždy je naše intuice ten správný nastroj k chápání fyzikální reality.

Jakub Vošmera
kuba@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.