Úloha III.3 ... upečené brzdy

4 body; průměr 2,44; řešilo 32 studentů

Jakou rychlostí máme jet autem z kopce, abychom co nejvíce zahřívali brzdy? Uvažujte, že rozdíl teploty vzduchu a teploty brzd je úměrný brzdnému výkonu. *Lukáš pekl.*

Začnime fyzikou celej situácie. Auto, spúšťajúce sa z kopca, je urýchľované zložkou gravitačnej sily o veľkosti $F_\mathrm{g} = mg\sin\alpha$, kde klasicky značíme hmotnosť, gravitačné zrýchlenie a uhol sklonu kopca. Na auto pôsobia dve brzdné sily, odporová a trecia od pneumatík. Budeme predpokladať, že odporová sila je úmerná druhej mocnine rýchlosti, teda $F_\mathrm{odp} = kv^2$. Brzdnú silu od jednej pneumatiky označíme F_p. Ak auto nezrýchľuje, sú sily v smere pohybu v rovnováhe, čo v našom prípade znamená

$$F_\mathrm{g} = F_\mathrm{odp} + 4F_\mathrm{p}\,,$$
$$mg\sin\alpha = kv^2 + 4F_\mathrm{p}\,.$$

Pozrime sa teraz na pneumatiku. Tá neprešmykuje a pri konštantnej rýchlosti je moment sily, ktorý na ňu pôsobí, nulový (inak by sa jej uhlová rýchlosť zvyšovala). Brzdenie si môžeme jednoducho predstaviť ako silu T, ktorá pôsobí proti otáčaniu pneumatiky vo vzdialenosti a od stredu. Pre rovnosť momentov musí platiť

$$Ta = F_\mathrm{p}r\,,$$

kde sme označili polomer pneumatiky ako r.

Tepelný výkon, ktorý sa bude uvoľňovať v mieste pôsobenia sily T, je jednoducho súčin sily T a rýchlosti, ktorou sa tento konkrétny bod pohybuje (tu si stačí spomenúť na známe $\Delta W = T\Delta s$ a predeliť zodpovedajúcim časovým úsekom).

Pripomínam, že samotná sila F_p tu kolesá nezohrieva, pretože pri neprešmykovaní sa nekoná žiadna práca.

Rýchlosť pohybu bodu vzdialeného a od stredu pneumatiky vypočítame z uhlovej rýchlosti, ktorá je rovná v/r. Celkový výkon ohrievajúci jednu pneumatiku je teda

$$P = Ta\frac{v}{r} = F_\mathrm{p}v\,,$$

kde sme pri druhej rovnosti použili vzťah na rovnosť momentov síl. Vidíme, že nám vyšiel rozumný záver, a to že brzdný výkon nezávisí od toho, kde je konkrétne umiestnený brzdový kotúč a platnička.

Silu F_p sme už ale dali do súvisu z rýchlosťou, takže môžeme vyjadriť výkon ako funkciu rýchlosti

$$P(v) = F_\mathrm{p}(v)v = \frac{mg\sin\alpha - kv^2}{4}v\,.$$

Pri ustálenej teplote práve tento výkon uniká a vieme, že unikajúci výkon je priamo úmerný rozdielu teploty kolesa a okolia Δt. Túto úmeru vyjadríme vzťahom $P = K\Delta t$ a dosadíme, aby sme získali teplotu kolesa v závislosti na rýchlosti auta.

$$\Delta t(v) = \frac{mg\sin\alpha - kv^2}{4K}v\,.$$

Našou, teraz už len matematickou, úlohou je nájsť maximum tejto funkcie.

Vidíme, že táto funkcia je nulová v nule a v bodoch

$$\pm v_0 = \pm\sqrt{\frac{mg\sin\alpha}{k}}\,.$$

kde pre nás zaujímavá kladná hodnota znamená, že auto nebrzdí vôbec a gravitačná sila je plne kompenzovaná odporom vzduchu. Medzi nulou a v_0 je to kladná funkcia a my hľadáme maximum práve tu. Hľadanie maxima funkcie je ale už dávno vyriešený problém a väčšine z vás by malo byť jasné, ako na to. Z funkcie $\Delta t(v)$ vyrobíme jej *deriváciu.* Je to opäť funkcia rýchlosti a jej hodnota hovorí, ako rýchlo *rastie* funkcia $\Delta t(v)$. Ak je táto hodnota pre nejakú konkrétnu rýchlosť veľká, vieme, že $\Delta t(v)$ je pre túto rýchlosť strmá. Ak je táto hodnota záporná, tak $\Delta t(v)$ klesá. Nás zaujíma špeciálny prípad, keď je derivácia rovná nule, čo znamená, že funkcia ani nerastie a ani neklesá. Toto je práve prípad maxím a miním funkcií.[1]

Za deriváciami stojí matematická teória, nám stačí vedieť, ako sa používajú.[2] Tu derivujeme len polynóm, deriváciu označíme čiarkou

$$\Delta t'(v) = \frac{mg\sin\alpha}{4K} - 3\frac{k}{4K}v^2\,,$$

podľa pravidla $(v^n)' = nv^{n-1}$. Po položení derivácie rovnej nule dostaneme maximálne Δt pre

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{mg\sin\alpha}{3k}} = \frac{\sqrt{3}}{3}v_0\,,$$

kde sme zahodili zápornú hodnoty (už pri zostavovaní pohybovej rovnice sme totiž použili predpoklad, že odporová sila vzduchu pôsobí proti gravitácii, čo by pre záporné rýchlosti neplatilo). Vidíme teda, že pre maximálny brzdný výkon musíme ísť asi 60% z maximálnej možnej rýchlosti pri vypnutom motore.

Ak chceme dosadiť, treba ešte odhadnúť konštantu k. Zo vzťahu na odporovú silu ale máme

$$k = \frac{1}{2}C\varrho S \approx 1\,\mathrm{N/(m{\cdot}s^{-1})^2}\,,$$

kde sme odhadli C približne 1, plochu približne $2\,\mathrm{m^2}$ a hustotu vzduchu $1\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.

Dosadíme ešte približnú hodnotu hmotnosti $1\,000\,\mathrm{kg}$ a sklon 10°

$$v_{\max} \approx 24\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \doteq 90\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}\,.$$

Treba ešte povedať, že pohon kolies sme neuvažovali. S ním by sme len zvýšili moment na kolesá a súčasne brzdnú silu T, čo by sme efektívne mohli chápať ako jazdu po strmšom svahu.

Poznámky

Možností ako hľadať minimum funkcie je skutočne viacero. Jeden trik je namiesto rýchlosti v vyjadriť výslednú teplotu cez pomer v/v_0. Takto dostaneme

$$\Delta t \propto \frac{v}{v_0}\left(1 - \frac{v^2}{v_0^2}\right)\,,$$

[1] Predstavte si, aká strmá je funkcia práve vo svojom maxime, podobne ako keď vyjdete na vrchol kopca, má tam nulovú strmosť.

[2] Odkazujem na dôkladné preštudovanie napríklad nášho seriálu v XVI. ročníku alebo na študijný text FO.

odkiaľ je už jednoduchšie získať $v_{\mathrm{max}} = v_0/\sqrt{3}\,$,.

Pekné riešenie, od Kuby Vošmery, je požadovať, aby rovnica

$$\Delta t = C\,,$$

mala práve dve riešenia, pre nejakú konštantu C. Pri pohľade na graf je zrejmé, že táto rovnica má dve riešenia práve ak je jedno z týchto riešení extrém našej závislosti $\Delta t(v)$. Toto riešnie musí dokonca byť aj dvojnásobným koreňom, práve kvôli tomu, že je to extrém dotýkajúci sa priamky (pre znalejších, aj derivácia je v tomto bode nulová, čo je ekvivalentné podmienke na viacnásobný koreň). Z Vietových vzťahov potom dostaneme existenciu dvojnásobného koreňa vtedy, keď má tento dvojnásobný koreň hodnotu

$$\frac{v}{v_0} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\,,$$

odkiaľ len vyberieme naše kladné riešenie.

Ján Pulmann
`janci@fykos.cz`