

## Úvodem

Milí FYKOSáci,

blíží se čas vánočních svátků, což je ideální příležitost pozastavit se, rozjímat a řešit FYKOS, takže určitě oceníte, že se vám dostalo do drápků zadání třetí série.

Bohužel ještě není hotové jedno vzorové řešení z minulé série, za což se omlouváme.

Veselé Vánoce a spoustu skvělých nápadů při řešení přejí

*Organizátoři*

## Aktuality

Akcí, kterou byste rozhodně neměli prošvihnout, je blížící se *FYKOSí Fyziklání*, takže nezapomeňte dát dohromady tým, ať můžete 14. 2. 2014 strávit se svou milou fyzikou.

Zveme vás též na *Jeden den s fyzikou*<sup>1</sup>, který se uskuteční 6. 2. 2014. Jde o specializovaný den plný přednášek, exkurzí, experimentů – prostě neobvyklé setkání s fyzikou v historických budovách MFF na Karlově nebo v areálu MFF v Tróji.



Zadání III. série



Termín uploadu: 21. 1. 2014 20.00

Termín odeslání: 20. 1. 2014

### Úloha III.1 ... zatmění

2 body

Kolem hvězdy obíhá po kruhové dráze planeta a kolem ní obíhá taktéž po kruhové dráze měsíc, a to v rovině jejího oběhu. Víme, že při zatmění slunce je úhlová velikost měsíce stejná jako úhlová velikost slunce, pozorováno z planety (tj. měsíc slunce přesně zakryje). Dále ještě víme, že při zatmění měsíce naopak planeta přesně zakryje měsíc. Určete, jaký je poměr poloměrů planety  $R$  a měsíce  $r$ , jestliže je vzdálenost planety od hvězdy mnohem větší než vzdálenost měsíce od planety  $L$  a ta je zase řádově větší než rozměry  $R$ ,  $r$ .

### Úloha III.2 ... Středozevní moře

2 body

Jak rychle v průměru teče voda Gibraltarským průlivem, když umožňuje střídání přílivu a odlivu ve Středozevní moři? Potřebné údaje si najdete na internetu a nezapomeňte citovat!

### Úloha III.3 ... pohárkovo vanová

4 body

Vezmeme prázdný válcový kelímeček. Otočme ho dnem vzhůru a tlačme ho pod klidnou vodní hladinu. Jak vysoký bude vzduchový sloupec v kelímku v závislosti na jeho ponoření?

<sup>1</sup><http://www.mff.cuni.cz/jdf>

**Úloha III.4 ... Ani k stáru, ani k stáru...**

4 body

Balón i s košem má hmotnost  $M$ . Koš balónu se ponoří do přehrady a nateče do něj voda. Nyní trochu přitopíme a zvýšíme vztlak balónu na  $Mg + F$ . Koš má tvar hranolu se čtvercovou podstavou o hraně  $a$  a je ponořený do hloubky  $H$ . Otvory v koši tvoří  $p \ll 1$  z celkové plochy koše, o kterém předpokládáme, že je prázdný (kromě vody). Zanedbejme viskozitu vody a vlastní objem koše. Jak rychle se bude koš vynořovat v závislosti na hloubce ponoření?

*Bonus* Za jak dlouho se vynoří?

*Nápověda* Střední rychlost výtoku vody z části koše nad hladinou je rovna  $2/3$  maximální rychlosti výtoku.

**Úloha III.5 ... mig-mig!**

5 bodů

Chudák hladový kojot chce ulovit proradného ptáka Uličníka a přichystal na něj následující past: na pevné lano přiváže 500tunovou kovadlinu, přehodí ji přes větev tak, aby visela nad silnicí, a bude čekat. Kolikrát musí lano kolem větve obtočit, jestliže chce kovadlinu udržet ve vzduchu pouze vlastní vahou? Předpokládejte, že hmotnost lana je vůči hmotnosti kojota zanedbatelná.

**Úloha III.P ... solární pohon**

5 bodů

Mohlo by letadlo létat na solární pohon?

**Úloha III.E ... viskozoidní**

8 bodů

Každá kapalina má svou specifickou viskozitu. Pokuste se doma vyrobit průtokový viskozimetr a změřit relativní viskozitu několika vhodných tekutin (alespoň tří) vůči vodě. Vaše výsledky porovnejte s údaji vyhledanými na internetu.

**Úloha III.S ... aplikační**

6 bodů

- a) V textu seriálu jsme využili přibližný vztah pro  $\sqrt{1+h^2}$ , kde  $h$  je malá hodnota. Zkoumejte, jak přesná je to aproximace. Jak moc se může  $h$  lišit od nuly, aby se aproximovaná a přesná hodnota lišily o méně než deset procent? Podobnou aproximaci můžeme provést pro libovolnou rozumnou funkci pomocí tzv. Taylorova rozvoje. Pokuste se na internetu najít Taylorův rozvoj například pro funkce  $\cos h$  a  $\sin h$  kolem bodu  $h = 0$ , zanedbejte členy vyšší než  $h^2$  a najděte přibližnou mezní hodnotu  $h$ , kdy se aproximovaná a přesná hodnota liší o  $0,1$ .
- b) Uvažujme vlnovou rovnici pro klasickou strunu ze seriálu a necht' je struna pevně upevněna na jednom konci v bodě  $[x; y] = [0; 0]$  a na druhém konci v bodě  $[x; y] = [l; 0]$ . Pro jaké hodnoty  $\omega$ ,  $\alpha$ ,  $a$  a  $b$  je výraz

$$y(x, t) = \sin(\alpha x) [a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)]$$

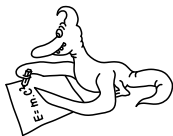
řešením vlnové rovnice?

*Tip* Dosadte do pohybové rovnice a využijte okrajové podmínky.

- c) V minulém díle seriálu jsme porovnávali hodnoty akce pro různé trajektorie částice. Nyní vypočítejte hodnotu Nambu-Gotovy akce pro uzavřenou strunu, která od času  $0$  do času  $t$  stojí na místě v rovině  $(x^1, x^2)$  a má tvar kruhu o poloměru  $R$ . Máme tedy

$$X(\tau, \sigma) = (c\tau, R \cos \sigma, R \sin \sigma, 0)$$

pro  $\sigma \in \langle 0, 2\pi \rangle$ . Načrtněte dále, jak vypadá světoplocha této struny (na poslední, nulovou komponentu zapomeňme) a jak vypadají čáry konstantního  $\tau$  a  $\sigma$ .



## Řešení II. série

### Úloha II.1 ... Twix

2 body; průměr 1,79; řešilo 119 studentů

*Tyčinka Twix obsahuje 32 % polevy. Jde o váleček průměru 10 mm. Neuvažujte polevu podstavy. Jak je poleva tlustá?*

Bonus *Uvažujte lepší model tyčinky.*

*Lukáše překvapil objem.*

V úloze budeme počítat s objemovými procenty, ačkoliv údaj na obalu tyčinky bude spíše hmotnostní – výpočet by nebyl o moc složitější, jenom bychom museli znát (pravděpodobně změřit) hustotu použité čokolády, karamelu a sušenky.

Podle zadání má tyčinka poloměr  $r = 5$  mm. Uvažujme, že tyčinka má délku  $h$ , poloměr vnitřku (tedy toho, kde není poleva)  $r_i$  a poleva má tloušťku  $t$  (takže platí  $r = r_i + t$ ). Objem polevy se spočítá jako

$$V_p = h\pi(r^2 - r_i^2) = h\pi(r^2 - (r - t)^2),$$

objem celé tyčinky pak  $V_T = h\pi r^2$ . Mezi těmito objemy platí vztah  $V_p = PV_T$ , kde  $P = 0,32$  je poměr, který máme zadán.

Dosadíme-li do tohoto vztahu objem polevy a tyčinky, dostaneme

$$r^2 - (r - t)^2 = Pr^2.$$

Odtud vyjádříme tloušťku polevy jako

$$t = (1 - \sqrt{1 - P})r = (1 - \sqrt{0,68})r \doteq 0,88 \text{ mm}.$$

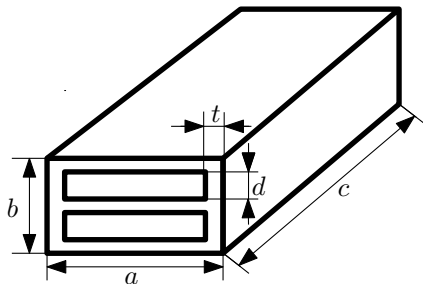
Pro vyřešení bonusu je nejlepší koupit si tyčinku a podívat se, jak vypadá, abychom věděli, co máme vylepšit. Pozorujeme, že tyčinka připomíná spíš kvádr než válec. Rozkrojíme-li tyčinku postupně podél všech os, všimneme si, že poleva není jen na povrchu tyčinky, ale dělí tyčinku na dvě části – sušenku a karamel. Jako vylepšený model tedy zvolíme tvar, jež můžeme, i s průřezem (a označením) vidět na obrázku. Uvažujme, že tyčinka je politá čokoládou celá (tedy ze všech stran), že tloušťka polevy je všude stejná a že tloušťka sušenky je stejná jako tloušťka karamelu. Zaoblené rohy a vlnky na polevě uvažovat nebudeme.

Objem celé tyčinky je  $V_T = abc$ , objem polevy je  $V_p = abc - 2(a - 2t)(c - 2t)d$ , kde  $b = 2d + 3t$ . Mezi těmito objemy platí výše uvedený vztah, do kterého dosadíme, po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici pro  $t$

$$-8dt^2 + (3ac + 4ad + 4cd - 3acP)t - 2acdP = 0.$$

Odtud můžeme spočítat  $t$  pomocí známého vzorečku pro kořeny kvadratické rovnice (vybereme správný kořen)

$$t = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A},$$



Obr. 1: Tyčinka Twix.

kde  $A = -8d$ ,  $B = 3ac + 4ad + 4cd - 3acP$ ,  $C = -2acdP$ .

Když si tyčinku (přibližně) přeměříme, zjistíme, že  $a = 17$  mm,  $c = 140$  mm,  $d = 5$  mm, a odtud můžeme spočítat tloušťku polevy jako  $t \doteq 0,96$  mm, což opravdové tyčince vcelku odpovídá, nicméně výsledek není příliš odlišný od jednoduchého modelu.

#### Komentáře k došlým řešením

V řešeních se až příliš často objevovala ta známá chyba – platné číslice. Svůj výsledek byste měli uvádět na takový počet platných číslic, jako máte zadané údaje – rozhodně jich tam nechceme vidět deset! Dále si pořádně přečtete zadání, neplette si poloměr s průměrem (11 řešitelů!) a obsah s obvodem. Svoje řešení řádně komentujte, pište postup, označujte veličiny, ať je z toho vidět, jak jste k řešení došli – správné řešení bez vysvětleného postupu není za plný počet bodů a za špatné řešení bez postupu se těžko dávají body.

Z vylepšených modelů tyčinek se často objevovaly různé formy půlválce, někdy v kombinaci s dolní postavou hranatou. Zvlášť podrobné bylo řešení Anny Kufové.

*Dominika Kalasová*  
dominika@fykos.cz

#### Úloha II.2 ... létavé dřevo

2 body; průměr 1,68; řešilo 93 studentů

Máme dřevěnou kuličku ve výšce  $h = 1$  m nad Zemí o poloměru  $R_Z = 6378$  km a hmotnosti  $M_Z = 5,97 \cdot 10^{24}$  kg. Kulička má poloměr  $r = 1$  cm a je ze dřeva o hustotě  $\rho = 550$  kg·m<sup>-3</sup>. Předpokládejte, že Země má náboj  $Q = 5$  C. Jaký náboj  $q$  by musela mít kulička, aby se mohla vznášet nad Zemí? Jak tento výsledek závisí na výšce  $h$ ?

*Karel přemýšlel, co zadat jednoduchého.*

Aby se kulička mohla volně vznášet, musí platit podmínka, že výslednice působících sil je nulová. Působící síly jsou v našem případě dvě – gravitační a elektrostatická. To, že Země rotuje, nás v tomto případě nijak neomezuje – předpokládáme-li, že Země je homogenní koule, kuličku nic nenutí setrvávat nad jedním místem na Zemi, nemusíme se tedy zamýšlet nad přítomností odstředivé síly. Dále je vhodné předpokládat, že náboj je na Zemi rozložen symetricky kolem středu.

Potom můžeme velikosti gravitační a elektrostatické síly položit sobě rovné

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{d^2} = G \frac{M_Z m}{d^2},$$

kde  $\epsilon_0$  je permitivita vakua,  $G$  je gravitační konstanta,  $Q$  resp.  $q$  je náboj Země resp. kuličky,  $M_Z$  resp.  $m$  je hmotnost Země resp. kuličky a  $d$  je obecně vzdálenost dvou těles, které na sebe silově působí.

Že na obou stranách rovnice opravdu vyjadřuje  $d$  stejnou veličinu, zjistíme ze slupkového teorému. Ten tvrdí, že gravitační pole vně tenké kulové slupky je stejné, jako kdyby veškerá její hmota byla soustředěna v jejím středu. Kouli si pak můžeme představit jako součet mnoha takových slupek. Podobný slupkový teorém platí i pro elektrostatické silové působení (přímo vyplývá z Gaussova zákona), což je velice výhodné – nemusíme řešit, jestli je náboj na Zemi rozložen rovnoměrně po povrchu nebo v celém objemu (a tedy zamýšlet se nad tím, jak dobrý je Země vodič), stačí nám předpokládat, že náboj je rozložen symetricky kolem středu. Vidíme, že obě strany rovnice jsou nepřímo úměrné  $d^2$ . Výsledná hodnota  $q$  tedy jistě nebude závislá na  $d$ .

Z výše uvedených rovnic pak jednoduše vyjádříme

$$q = \frac{4\pi\epsilon_0 G M_Z m}{Q}.$$

Zbývá dosadit za  $m$

$$m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho,$$

kde  $r$  je poloměr kuličky a  $\rho$  je její hustota. Pak dostaneme výsledný výraz

$$q = \frac{16\pi^2 \epsilon_0 G M_Z r^3 \rho}{3Q},$$

do kterého dosadíme  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$  a  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$ .

Správný výsledek je potom  $q = 20,4 \text{ C}$ .

**Zdeněk Jakub**

zdenekjakub@fykos.cz

### Úloha II.3 ... týrání pístu

4 body; průměr 2,68; řešilo 76 studentů

Máme nádobu o konstantním průřezu, která obsahuje ideální plyn a píst ve výšce  $h$ . Píst nejprve rychle (tzn. prakticky adiabaticky) stlačíme do výšky  $h/2$ , podržíme ho, než nastane tepelná rovnováha s okolím, a pak ho pustíme. Do jaké výšky píst vystoupá ihned? Do jaké výšky vystoupá za dlouhou dobu? Nakreslete  $pV$  diagram. *Karel přemýšlel nad pístem.*

Najprv si uvedomíme celkom zjavnú vec. Keď má nádoba konštantný prierez  $S$ , tak jej aktuálny objem  $V_a$  je priamo úmerný aktuálnej výške piestu  $h_a$

$$V_a = S h_a. \quad (1)$$

Stav plynu v nádobe budú charakterizovať stavové veličiny: objem  $V$ , tlak  $p$  a teplota  $T$ . Plyn prešiel nasledujúcim procesom. Na začiatku bol v stave 1 s piestom vo výške  $h$ . Potom prešiel adiabatickým stlačením do stavu 2 s piestom vo výške  $h/2$  (objem sa zmenšil, tlak a teplota

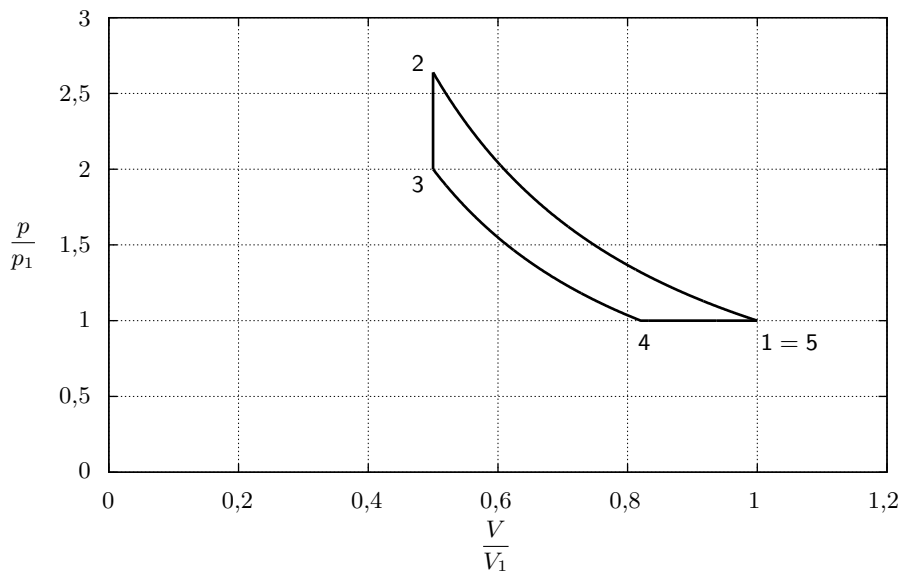
zvýšili). Potom sa izochoricky ochladil na okolitú (počiatočnú) teplotu do stavu 3 (objem sa nemenil, teplota i tlak klesli). Uvoľnením piesta sa adiabaticky rozťahol na okolitý tlak do stavu 4 (objem stúpol, tlak a teplota klesli). Nakoniec sa izobaricky zohrial na okolitú teplotu do stavu 5 (tlak sa nemenil, teplota a objem stúpli).

Ideálny plyn sa správa podľa stavovej rovnice

$$p_i V_i = nRT_i, \quad (2)$$

kde  $i$  je index pre rôzne stavy. Látkové množstvo plynu  $n$  sa v nádobe nemení, preto je pre všetky stavy rovnaké a nemusí sa špecifikovať indexom.

Najprv si ukážeme, že stavy 1 a 5 sú tie isté. V stave 1 mal plyn stavové veličiny  $p_1$ ,  $V_1$  a  $T_1$  a splňal stavovú rovnicu (2). Potom, čo plyn prešiel jeden vyššie popísaný proces, sa teplota plynu vyrovnala s okolím ( $T_5 = T_1$ ) a tlak plynu bol rovnaký ako okolitý ( $p_5 = p_1$ ). Podľa stavovej rovnice (2) musí teda byť aj objem rovnaký  $V_5 = V_1$  a stavy 1 a 5 sú rovnaké. Vieme teda povedať, že po dlhom čase vystúpa piest na pôvodnú výšku  $h$ .



Obr. 2: Relatívny  $pV$  diagram cyklu plynu v nádobe pod piestom.

Aby sme zistili, do akej výšky vystúpi piest ihneď, potrebujeme vedieť, z akého stavu sa adiabaticky rozťahuje. V stave 3 je teplota rovnaká ako teplota okolia ( $T_3 = T_1$ ) a piest držíme v polovičnej výške, preto bude aj objem polovičný oproti počiatočnému ( $V_3 = V_1/2$ ). Použitím stavovej rovnice (2) vieme dopočítať, že tlak bude dvojnásobný oproti okolitému ( $p_3 = 2p_1$ ).

Zo stavu 3 sa plyn adiabaticky rozopne na okolitý tlak ( $p_4 = p_1$ ). Pri adiabatickom deji platí

$$p_3 V_3^{\kappa} = p_4 V_4^{\kappa},$$

kde  $\kappa$  je Poissonova konstanta plynu. Dosazením výrazů  $p_3$ ,  $V_3$  a  $p_4$  a vyjádřením  $V_4$  dostaneme

$$V_4 = V_1 \cdot 2^{\frac{1-\kappa}{\kappa}}.$$

Keďže sú objemy plynu a výšky priamoúmerné podľa (1), vieme povedať, do akej výšky  $h_4$  piest vystúpa

$$h_4 = h \cdot 2^{\frac{1-\kappa}{\kappa}},$$

čo vychádza napríklad pre vzduch ( $\kappa \approx 1,4$ ) približne 82 % pôvodnej výšky  $h$ .

Keď si celý proces vykreslíme v  $pV$  diagrame, dostaneme cyklus ako na obrázku 2.

$pV$  diagram je urobený pre dvojatómový plyn (vzduch). Tlak i objem sú vyjadrené relatívne vzhľadom na počiatkové podmienky.

**Jakub Kocák**

`jakub@fykos.cz`

## Úloha II.4 ... hvězdná velikost Měsíce 4 body; průměr 2,72; řešilo 43 studentů

Je známo, že Měsíc v úplňku má zdánlivou hvězdnou velikost přibližně  $-12$  mag a Slunce na denní obloze zase  $-27$  mag. Pokuste se odhadnout, jakou hvězdnou velikost má Měsíc těsně před zatměním Slunce, pokud víte, že albedo Země činí 0,36 a albedo Měsíce 0,12. Předpokládejte, že světlo se po odrazu rozptyluje stejným způsobem na povrchu Země i Měsíce.

*Jančí byl oslepený.*

Prvně si musíme uvědomit, jakým mechanismem je vlastně Měsíc těsně před zatměním Slunce, tedy v novu, osvětlen. Kdo už slyšel o tzv. popelavém svitu, ten ví, že je to způsobeno světlem odraženým od Země.

Světelný tok dopadající na Zemi od Slunce je

$$L_1 = \frac{L_S \pi R_Z^2}{4\pi a^2},$$

kde  $L_S$  je světelný tok jdoucí od Slunce,  $a$  je vzdálenost Země od Slunce a  $R_Z$  je poloměr Země.

Teď nastává další zádrhel. Pro určení světelného toku dopadajícího na Měsíc musíme vědět, s jakým albedem máme počítat. V astronomii se používají dvě albeda:

- Bondovo albedo – udává poměr mezi celkovou odraženou a dopadající intenzitou světla
- geometrické albedo – udává poměr mezi jasností tělesa při nulovém fázovém úhlu<sup>2</sup> a jasností disku o stejném průměru, který je natočen kolmo k pozorovateli a světlo rozptyluje Lambertovsky<sup>3</sup>.

Bondovo a geometrické albedo se liší pouze o multiplikační konstantu, která závisí na typu rozptylu. Navíc se o (jinou) multiplikační konstantu liší i světelný tok dopadající na Lambertovský disk a světelný tok od něj rozptýlený do určitého směru. Protože je v našem případě fázový úhel nulový jak v případě Země, tak i Měsíce, a u obou těles nastává stejný typ rozptylu, můžeme veškeré tyto konstanty shrnout do jedné, která bude stejná pro Zemi i pro Měsíc a bude nám v dalších výpočtech jedno, jestli je zadané albedo geometrické, nebo Bondovo. Tuto konstantu si označme  $k$ .

<sup>2</sup>Úhel mezi směrem dopadajícího paprsku a směrem k pozorovateli.

<sup>3</sup>Rozptyl je Lambertovský tehdy, když se světlo odráží izotropně a jeho intenzita je úměrná kosinu fázového úhlu.

Pak bude světelný tok dopadající na Měsíc

$$L_2 = \frac{A_Z k L_1 \pi R_M^2}{2\pi r^2},$$

kde  $A_Z$  je albedo Země,  $R_M$  poloměr Měsíce a  $r$  vzdálenost Měsíce od Země. V čitateli je povrch polokoule, protože „za Zemi“ se světlo nerozptýlí, v zásadě jsme tam ale mohli dát klidně povrch koule, nebo čtvrtkoule, ona dvojka by se akorát zahrnula do  $k$ . Pak ho ale musíme ve všech výpočtech používat stejně.

Světelný tok dopadající od Měsíce znovu na Zem je

$$L_3 = \frac{A_M k L_2 \pi R_Z^2}{2\pi r^2} = L_1 \frac{A_M A_Z k^2 R_M^2 R_Z^2}{4r^4}.$$

Z Pogsonova vztahu určíme výslednou hvězdnou velikost Měsíce těsně před zatměním

$$\begin{aligned} m - m_S &= 2,5 \log_{10} \frac{L_1}{L_3}, \\ m &= m_S - 2,5 \log_{10} \frac{A_M A_Z k^2 R_M^2 R_Z^2}{4r^4}, \end{aligned} \quad (3)$$

kde  $m_S$  je zdánlivá hvězdná velikost Slunce.

Zbývá určit konstantu  $k$ . Musíme najít situaci, kde známe výslednou hvězdnou velikost, kde vystupují odrazy pouze u Země nebo Měsíce a všechny fázové úhly jsou nulové. Nabízí se hvězdná velikost Měsíce v úplňku

$$m_M - m_S = 2,5 \log_{10} \left( \frac{L_S \pi R_Z^2}{4\pi a^2} \frac{4\pi (a+r)^2 2\pi r^2}{L_S k A_M \pi R_Z^2 \pi R_M^2} \right).$$

Oprávněně můžeme položit  $(a+r)^2 \approx a^2$ , pak máme

$$\begin{aligned} m_M - m_S &= 2,5 \log_{10} \frac{2r^2}{k A_M R_M^2}, \\ k &= \frac{2r^2}{A_M R_M^2} 10^{0,4(m_S - m_M)}. \end{aligned}$$

Pokud dosadíme zpět do vztahu (3), dostaneme výsledný vzorec

$$m = 2m_M - m_S - 2,5 \log_{10} \frac{A_Z R_Z^2}{A_M R_M^2}.$$

Po dosazení vyjde  $m = -1,0$  mag.

*Lukáš Timko*  
lukast@fykos.cz



## Úloha II.5 . . . kelímek na vodě

5 bodů; průměr 2,73; řešilo 51 studentů

Kužel obrácený podstavou vzhůru může držet ve vzduchu na stříkajícím proudu vody, který vychází ze země s konstantním hmotnostním průtokem a počáteční rychlostí  $v_0$ . V jaké výšce nad zemí se bude kužel v rovnováze vznášet?

Bonus Vyšetřete stabilitu kužele v této poloze.

*Radomír pil až do dna.*

Označme hmotnost kužele jako  $M$ , poloměr podstavy kužele  $r$ , jeho výšku  $h$  a jeho vrcholový úhel  $2\alpha$ , kde  $\operatorname{tg} \alpha = r/h$ .

Zaměříme se nejdříve na proud vody stříkající ze země. Aby byla úloha jednoduše řešitelná, zavedeme následující předpoklady.

- Proud má u země horizontální řez ve tvaru kruhu. Z axiální symetrie problému je potom zřejmé, že průřez proudu zůstane kruhový ve všech výškách nad zemí.
- Osa kužele souhlasí s osou symetrie vodního proudu.
- Rozměry kužele jsou dostatečně malé, abychom si mohli dovolit položit horizontální složku rychlosti proudu v okolí kužele rovnu nule.<sup>4</sup>
- Tlak v celém proudu vody je přibližně konstantní<sup>5</sup>.

Označíme-li  $v_0$  rychlost vodního proudu u země, vidíme ze zákona zachování energie (připomeňme, že tlak vody v celém proudu považujeme přibližně za konstantní), že jeho rychlost ve výšce  $H$  nad zemí v okolí osy proudu bude

$$v(H) = \sqrt{v_0^2 - 2Hg},$$

a tedy, že jednotkou vodorovné plochy ve výšce  $H$  proteče za jednotku času hmotnost  $\mu(H) = \rho v(H)$ , kde  $\rho$  jsme označili hustotu vody (zde pro změnu uplatňujeme předpoklad o nulové horizontální složce rychlosti proudu). Rovněž vidíme, že pro

$$H_m = \frac{v_0^2}{2g}$$

máme  $v(H_m) = 0$ . Voda ale někam odtéct musí, takže pro místa při vrcholu proudu náš předpoklad o nulové horizontální složce selhává. Budeme tedy uvažovat pouze případ, kdy se kužel nenachází v blízkosti vrcholu proudu.

Dále si musíme zvolit model srážky proudu s kuželem. Poslouží nám přiblížení, kdy budeme požadovat zachování složky rychlosti proudu, která je tečná k povrchu kužele (tedy žádné tření). Pro normálovou složku pak uvážíme obecný případ nepružné srážky, kdy  $v'_\perp = ev_\perp$  ( $v'_\perp$  resp.  $v_\perp$  značí normálové rychlosti před srážkou resp. po srážce a  $0 \leq e \leq 1$  je koeficient restituice). Ve skutečnosti je to skoro jisté o hodně složitější a museli bychom se ponořit do studia mechaniky kontinua, abychom se mohli následně vypořít s realističtější modelem obtékání kužele. Proto se ani nebudeme snažit započítávat jiné síly působící na kužel (hydrostatickou, vztlakovou apod.) než tíhovou sílu a reakci na srážkou s proudem vody.

Při výpočtu síly, kterou proud vody působí na kužel, postupujeme tak, že si plochu pláště rozsekáme na koaxiální prstýnky o poloměru  $x = y \operatorname{tg} \alpha$ , kde projekce jejich šířky do vodorovné

<sup>4</sup>Jelikož očekáváme, že vertikální složka rychlosti proudu bude s rostoucí výškou klesat, bude se dle rovnice kontinuity proud rozšiřovat a rychlosti elementů vody budou obecně mít nenulovou horizontální složku. Tato horizontální složka však zřejmě bude klesat směrem k ose symetrie, kde musí být nulová.

<sup>5</sup>Pokud bychom se rozhodli řešit problém exaktně pomocí rovnic pro nestlačitelnou tekutinu v homogenním gravitačním poli, mohli bychom zjistit podmínky, za kterých je tento předpoklad splněn. To zde ovšem dělat nebudeme, neboť je to vysoce nad rámec toho, co by i šikovný středoškolák měl zvládnout.

roviny (aneb účinný průřez ve vertikálním směru) je  $\text{tg } \alpha \, dy$ . Za jednotku času potom na plochu jednoho prstýnku dopadne element vody o hmotnosti

$$dm = 2\pi x \mu(H + y) \text{tg } \alpha \, dy \, dt = 2\pi y \mu(H + y) \text{tg}^2 \alpha \, dy \, dt,$$

jehož rychlost se při srážce v normálovém směru změní o  $(1 + e)v(H + y) \sin \alpha$ . Z druhého Newtonova zákona pak ihned víme, že na plochu prstýnku působí v normálovém směru síla o velikosti

$$dF_{\perp} = 2\pi(1 + e) \sin \alpha \text{tg}^2 \alpha \mu(H + y)v(H + y)y \, dy.$$

Integrujeme-li tuto sílu po povrchu kužele, zjistíme, že horizontální složky se nám vyruší a zbude nám pouze celková vertikální síla působící na kužel, jejíž velikost vyjde (dosazujeme za  $\mu(H + y)$  a  $v(H + y)$ )

$$F_{\text{vert}} = 2\pi \rho(1 + e) \sin^2 \alpha \text{tg}^2 \alpha \int_0^h (v_0^2 - 2gH - 2gy) y \, dy,$$

kde předpokládáme, že se kužel nenachází poblíž vrcholu proudu a tedy, že voda dopadá na celý jeho plášť. Po triviální integraci pak dostáváme

$$F_{\text{vert}} = 2\pi \rho h^2(1 + e) \sin^2 \alpha \text{tg}^2 \alpha \left( \frac{v_0^2}{2} - gH - \frac{2}{3}gh \right).$$

Pro rovnovážnou výšku nad zemí  $H_{\text{eq}}$  platí (porovnáme  $F_{\text{vert}}$  s tíhovou silou působící na kužel  $Mg$ , ze symetrie je rovněž zřejmé, že výsledný moment síly působící na kužel je automaticky nulový)

$$H_{\text{eq}} = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{2}{3}h - \frac{M}{2\pi \rho h^2(1 + e) \sin^2 \alpha \text{tg}^2 \alpha},$$

neboli po dosazení  $H_{\text{m}} = v_0^2/2g$  a  $S_{\text{eff}} = \pi r^2 = \pi h^2 \text{tg}^2 \alpha$  (účinný průřez kužele ve vertikálním směru),

$$H_{\text{eq}} = H_{\text{m}} - \frac{2}{3}h - \frac{M}{2\rho S_{\text{eff}}(1 + e) \sin^2 \alpha}. \quad (4)$$

Selský rozum nám říká, že  $H_{\text{eq}}$  by měla růst s rostoucí  $v_0$  (ekvivalentně s rostoucí  $H_{\text{m}}$ ), klesat s rostoucí  $M$ , růst s rostoucím  $e$ , růst s rostoucím  $S_{\text{eff}}$  a také že  $H_{\text{eq}} \leq H_{\text{m}}$ . Všechny tyto vlastnosti vztah (4) splňuje, což je pro nás znamením, že jsme na správné cestě.

Skutečně, pokud nevychází  $H_{\text{eq}} \approx H_{\text{m}}$ , je náš předpoklad, že se kužel nenachází poblíž vrcholu proudu, validní a vztah (4) můžeme považovat za náš konečný výsledek. Zvolíme-li přibližné kritérium platnosti této podmínky jako  $H_{\text{eq}} \gtrsim H_{\text{m}} - h$ , pak tato podmínka přestává platit pro

$$h \gtrsim \frac{3M}{2\rho S_{\text{eff}}(1 + e) \sin^2 \alpha}.$$

Tuto nerovnost můžeme vyčíslit pomocí předem definovaných parametrů problému. Pokud zjistíme, že neplatí, selže náš předpoklad o nulovosti horizontální složky rychlosti proudu a my musíme přistoupit k exaktnímu řešení problému. Jak jsme ale napsali výše, to zde provádět nebudeme.

Na závěr se pokusme adresovat otázku stability takovéto rovnovážné polohy (předpokládáme zjednodušující podmínky zmíněné výše).

Nejdříve, z předpokládané symetrie vůči horizontálnímu posunutí, je zřejmé, že rovnovážná poloha je indiferentní vůči horizontálním výchylkám translačního charakteru.<sup>6</sup> Stejně tak je poloha indiferentní vůči malým pootočením kolem osy kužele (axiální symetrie problému).

Dále, vychýlíme-li kužel o malou vzdálenost  $\eta$  ve vertikálním směru, máme velikost výslednice sil působících na kužel

$$F = M\ddot{\eta} = 2\rho S_{\text{eff}}(1+e)\sin^2\alpha\left(gH_m - gH_{\text{eq}} - g\eta - \frac{2}{3}gh\right) - Mg,$$

což po dosazení za  $H_{\text{eq}}$  dává

$$M\ddot{\eta} = -\left[2g\rho S_{\text{eff}}(1+e)\sin^2\alpha\right]\eta,$$

kde  $k = 2g\rho S_{\text{eff}}(1+e)\sin^2\alpha > 0$ , takže síla je namířena proti výchylce a rovnovážná poloha je tedy stabilní. Rovnou můžeme rovněž odečíst úhlovou frekvenci kmitů kužele kolem rovnovážné polohy  $\omega = \sqrt{k/M}$ , kde  $k$  je definované výše.

Konečně, fixujeme těžiště a pootočíme kužel o malý úhel kolem libovolné osy kolmé na osu kužele (úhel měříme od směru vzhůru). Nakreslíme-li si přehledný obrázek, na kterém si pootočený kužel rozdělíme vertikální rovinou kolmou na pootočení a procházející těžištěm kužele, jasně vidíme, že pro dostatečně malé úhly (tak, aby plášť kužele na opačné straně od pootočení ještě nebyl rovnoběžný s vertikálou) je účinný průřez té části kužele, který se od těžiště nachází ve směru pootočení, větší než účinný průřez opačné části (navíc, ve směru pootočení dopadá proud na kužel více kolmo, takže se vertikální složka hybnosti přenáší efektivněji). Výsledný moment síly je tedy namířen proti směru pootočení a poloha je tedy *stabilní* vůči výchylkám tohoto druhu (při pootočení rovněž mírně klesne celkový účinný průřez, takže kužel klesne ve vertikálním směru, ale jak jsme ukázali výše, poloha je ve vertikálním směru stabilní). Pro větší výchylky pak předpokládáme přítomnost druhé, *labilní*, rovnovážné polohy.

**Kuba Vošmera**  
kuba@fykos.cz

## Úloha II.E ... kutululů

8 bodů; průměr 4,02; řešilo 45 studentů

*Máme nakloněnou rovinu, na které postrčíme míček, aby se začal kutálet bez prokluzování směrem nahoru po nakloněné rovině. Změřte závislost rychlosti míčku na čase a určete závislost ztráty energie na čase. Nakloněná rovina nechť svírá úhel s vodorovnou rovinou úhel  $\alpha \sim 10^\circ$ . Nezapomeňte popsat parametry vašeho míčku.*

*Karel se zamyslel nad výrokem „koulelo se koulelo“.*

### Teorie

Máme určit závislost ztráty energie na čase, proto se nejprve musíme zamyslet nad tím, jaké druhy energie budeme započítávat do ztrát a jaké nikoli. Do ztrát budeme započítávat různá tření (o vzduch, podložku), ale nebudeme započítávat energii potenciální, kinetickou a rotační.

<sup>6</sup>Přestaneme-li ignorovat horizontální složku rychlosti, tato symetrie nám zmizí a je navíc zřejmé, že takovéto výchylky budou labilní, neboť ve směru posunutí budou vektory rychlosti proudu natočené více od kolmice k povrchu pláště kužele (a hybnost se bude přenášet méně efektivněji, viz faktor  $\sin^2\alpha$  v (4)) a naopak, na druhé straně budou vektory rychlosti proudu natočené více ke kolmici, takže se hybnost bude přenášet efektivněji. Výsledná horizontální síla na kužel tedy bude podporovat výchylku v růstu.

Zákon zachování mechanické energie říká

$$E_k + E_p = E = \text{konst} ,$$

tedy součet energie potenciální a kinetické translační a rotační by měl být konstantní, pokud by šlo o pohyb beze ztrát, tj. všechny působící síly by byly konzervativní.

Proto můžeme ztrátovou energii v čase  $t$  definovat dle vztahu

$$E_z(t) = E_k(t) + E_p(t) - (E_k(t=0) + E_p(t=0)) ,$$

kde  $E(t=0)$  je energie v čase  $t=0$  a  $E(t)$  je daná energie měřená v čase  $t$ . Poslední dva členy můžeme anulovat vhodnou volbou nulové hladiny potenciální energie. Nulovou hladinu potenciální energie volíme v místě, kam by kulička došla v případě, že by pohyb probíhal bez tření. Proto pro ztrátovou energii můžeme napsat

$$E_z = E_k + E_p .$$

Pokud kulička rotuje okolo osy kolmé na směr pohybu a paralelní k nakloněné rovině a označíme-li  $I$  moment setrvačnosti kuličky vůči této ose, můžeme pro  $E_k$  a  $E_p$  napsat

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 - mgh , \\ E_z &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I \left( \frac{v}{R} \right)^2 - mgh , \\ E_z &= \frac{1}{2}mv^2 \left( 1 + \frac{I}{mR^2} \right) - mgs \sin \alpha , \end{aligned}$$

kde jsme označili:  $\alpha$  sklon nakloněné roviny,  $h$  vertikální vzdálenost od nulové hladiny potenciální energie,  $s$  vzdálenost po nakloněné rovině od místa obratu,  $m$  hmotnost kuličky a  $g$  tíhové zrychlení (definujeme  $h, s > 0$ ).

Pro kouli platí  $I/(mR^2) = 2/5$ , tj. pro ztrátovou energii můžeme psát

$$\frac{E_z}{m} = \frac{7}{10}v^2 - gs \sin \alpha . \quad (5)$$

Nyní určíme moment setrvačnosti pro homogenní kulovou slupku o vnitřním poloměru  $R_1$  a vnějším  $R_2$ . Vztah pro moment setrvačnosti koule můžeme přepsat do tvaru

$$I_k = \frac{2}{5}mR^2 = \frac{2}{5}\rho \frac{4}{3}\pi R^5 = \frac{8\pi}{15}\rho R^5 .$$

Moment setrvačnosti kulové slupky bude rozdílem momentů setrvačnosti koulí o poloměrech  $R_2$  a  $R_1$ . Hmotnost této slupky je

$$M = \frac{4}{3}\pi\rho (R_2^3 - R_1^3) .$$

Proto

$$I_s = I_{R_2} - I_{R_1} = \frac{8\pi}{15}\rho (R_2^5 - R_1^5) = \frac{2}{5}M \frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^3 - R_1^3} .$$

Pro tenkou slupku pak proto platí

$$I_{ts} = \frac{2}{3}MR^2 .$$

Pro energetické ztráty kulové slupky pak platí

$$\frac{E_z}{m} = \frac{5}{6}v^2 - gs \sin \alpha. \quad (6)$$

Nyní určíme vzdálenost, do které by kulička vyjela od počátku, pokud bychom neuvažovali tření, tj. hladinu nulové potenciální energie. Je-li zrychlení kuličky  $a_k = (5/7)g \sin \alpha$  (lze odvodit ze silového rozkladu), pak vzdálenost teoretického bodu obratu je

$$s_{\max} = \frac{v_0^2}{2a_k}, \quad (7)$$

kde  $v_0$  je rychlost, kterou jsme kuličce na začátku udělili.

### Měření

Vyrobili jsme nakloněnou rovinu, na které byly připevněny špejle zaručující pohyb kuličky pouze v přímém směru, viz obrázek 3. Délka nakloněné roviny byla  $s_0 = (1\,500 \pm 5)$  mm, výška byla  $h_0 = (66 \pm 1)$  mm, proto je sklon  $\alpha = (2,52 \pm 0,04)^\circ$ . Úhel jsme volili záměrně menší, aby měly odporové síly větší vliv.



Obr. 3: Fotografie nakloněné roviny

Na nakloněné rovině jsme měli připevněno též délkové měřítko, abychom mohli přepočítat souřadnici v pixelech na polohu kuličky na nakloněné rovině.

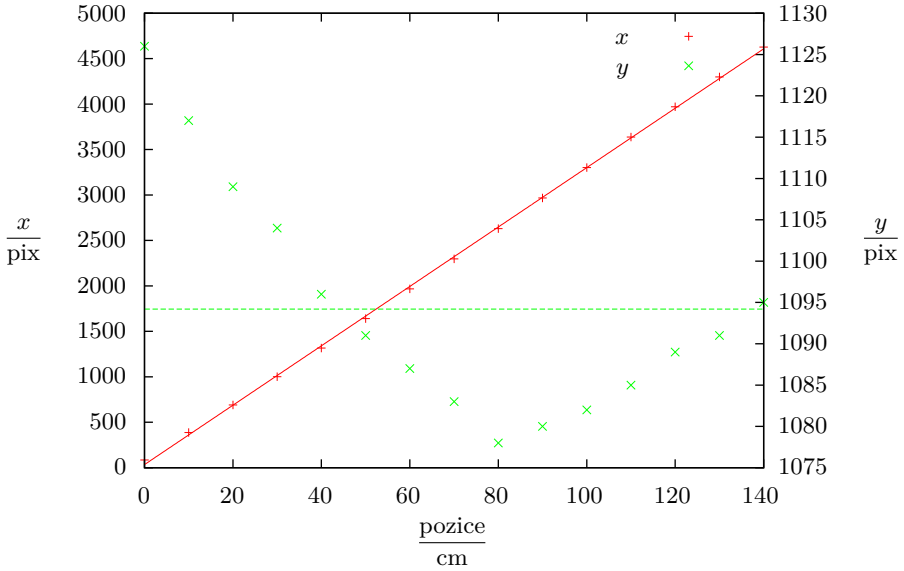
Pro kalibraci jsme stejnou situaci vyfotili v rozlišení  $5\,184 \times 3\,456$ . Zaznamenali jsme si  $x$ -ovou a  $y$ -ovou souřadnici bodů na měřítku, a to po deseti centimetrech. Na grafu 4 je uvedena závislost  $x$ -ové a  $y$ -ové souřadnice na poloze na měřítku. Na levé ose je  $x$ -ová souřadnice a na pravé ose je  $y$ -ová. Odchylka od kalibračních přímek je menší než 50 pixelů, což odpovídá 1,5 cm, tedy chyba je v řádu procenta. Upozorňujeme, že na levé a pravé ose je jiná škála. Výsledkem lineární kalibrace je škálovací faktor  $\xi = (32,7 \pm 0,2)$  pix·cm<sup>-1</sup>.

K měření jsme použili dvě různé kuličky, jednak kuličku z myši, jednak kuličku z deodorantu. Kulička z myši byla plná, kulička z deodorantu byla prázdná, proto jsme si v teorii připravovali též momenty setrvačnosti pro kulovou slupku.

Pomocí programu Tracker jsme určili závislost polohy a rychlosti na čase. Abychom odstranili šum, vypočítali jsme vždy průměr 7 okolních hodnot. Pak dle vztahu (5) určíme závislost energetické ztráty na poloze kuličky z myši a podle vztahu (6) určíme energetické ztráty kuličky z deodorantu.

Na grafech jsou uvedeny měrné ztráty energie, tedy vydělené hmotností odpovídající kuličky. Graf závislosti energetických ztrát pro kuličku z myši je uveden na obrázku 5, též výsledek pro kuličku z deodorantu je uveden na obrázku 6. Poloha v pixelech byla přepočítána pomocí kalibrace  $\xi$  a informace, že kamera zabírala stejnou oblast, ale místo 5 184 pixelů měla pouze 1 280 pixelů, dává škálovací faktor pro kameru  $\xi_k = (8,06 \pm 0,04)$  pix·cm<sup>-1</sup>. Video bylo pořizováno s frekvencí 50 fps.

Nejzajímavějším výsledkem by samozřejmě bylo určení závislosti zrychlení kuličky na rychlosti pohybu. Tyto závislosti jsou uvedeny na obrázku 7.



Obr. 4: Kalibrační křivky

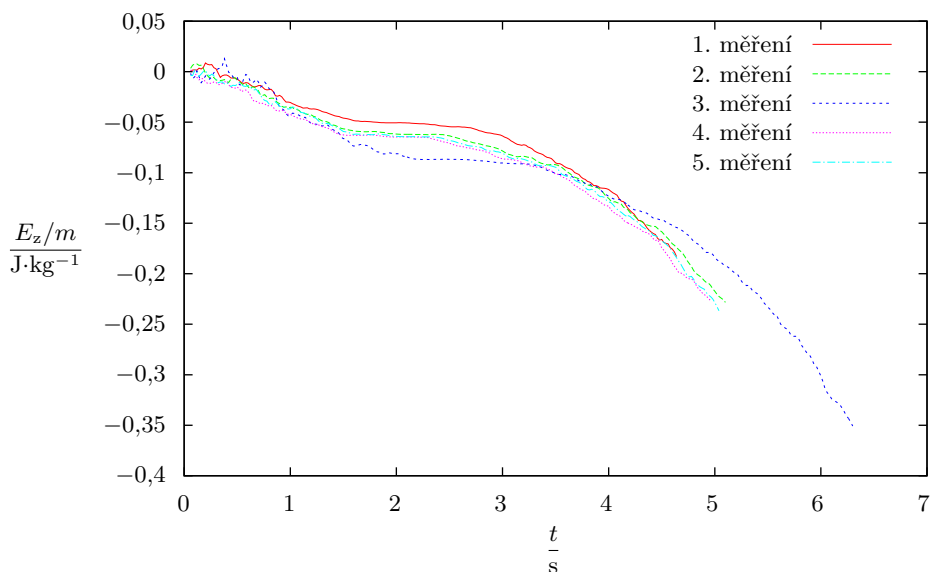
### Diskuse

Křivky závislosti ztrátové energie na čase jsou značně zašumělé, protože určování polohy je limitováno jednak rozlišovací schopností kamery, jednak přesností identifikace polohy kuličky na videozáznamu. Tento šum je vidět, i když jsme použili filtrování. Toto filtrování není možné použít na větším rozsahu, protože by mohly být nesprávně shlazeny extrémy.

Pro kuličku myši odpovídají výsledky předpokladu, tj. ztrátová energie s časem klesá. Je zajímavé, že kulička přijde o větší část energie na sestupné části trajektorie. Odchytky mezi jednotlivými měřeními jsou způsobeny různými počátečními rychlostmi. Jistou malou odchytkou mohlo způsobit gumové opláštění kuličky, které zvětšovalo poloměr, ale nikoli moment setrvačnosti vůči středu. Další odchytkou mohly způsobit kolejničky, kvůli čemuž kulička musela rotovat rychleji. Tyto dvě systematické chyby se ale naštěstí odečítají.

Pro kuličku z deodorantu můžeme pozorovat strmý pokles ztrátové energie na počátku pohybu především pro první dvě měření. Tato odchylka od modelu se dá vysvětlit prokluzováním kuličky, tj. platí  $v \neq \omega R$ . Další zajímavostí je vysoký peak pozorovaný při druhém měření. Tento je způsoben právě vyhodnocováním polohy kuličky pomocí programu Tracker — referenční bod se posunul. Zajímavostí je, že pokud bychom pro výpočet ztrátové energie použili vztah (5) a nikoli (6), pozorovali bychom nárůst ztrátové energie okolo horní úvratí pohybu. Můžeme tedy toto měření použít i pro vyvrácení hypotézy o plnosti kuličky.

Závislost zrychlení na rychlosti je bohužel velmi zašumělá, a proto z ní něco usuzovat lze pouze velmi těžší. Je zde vidět, že zrychlení se blíží k nule pro  $v \rightarrow -\infty$ . Tato asymptotika je pochopitelná, protože po dlouhé době, kdy jede kulička po nakloněné rovině dolů, dosáhne ustáleného stavu a bude se pohybovat s nulovým zrychlením. Jednoduše nevysvětlitelná je



Obr. 5: Závislost ztrátové energie na čase pro kuličku z myši

ale pravá část grafu, kde můžeme pozorovat klesající velikost zrychlení pro velké (počáteční) rychlosti. Jedním z vysvětlení je vyrovnávání momentu hybnosti a hybnosti třením o podložku, v této době není splněn předpoklad  $v = \omega R$ .

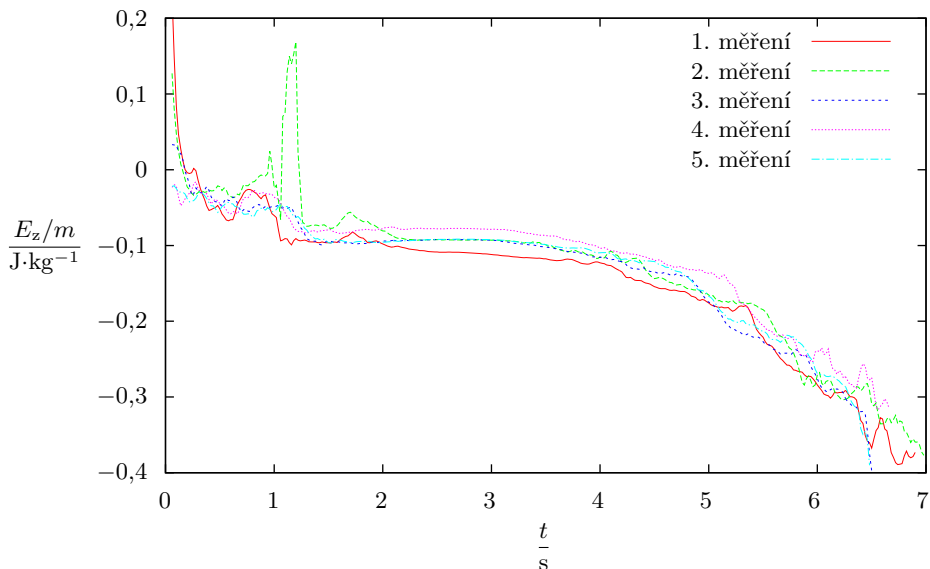
Pokud by tyto hodnoty nebyly zatíženy šumem, mohli bychom tvořit hypotézy, jaké jsou původní třecích sil působících v systému.

### Závěr

Změřili jsme závislost ztrátové energie na čase pro kuličku z myši, viz graf 5, a také pro dutou kuličku z deodorantu, viz graf 6. Pokusili jsme se analyzovat původ třecích sil, ale bohužel neúspěšně, viz graf 7.

### Poznámky k došlým řešením

Nejčastější chybou v došlých řešeních bylo nepochopení základního principu úlohy a následně zanedbání odporových sil působících na míček. Místo ztrát mechanické energie se pak v řešeních často objevoval prostý vývoj hodnoty kinetické energie v čase. Dalším častým problémem bylo opomenutí složky kinetické energie při rotaci, což vedlo také k nesprávnému odvození vztahu pro zrychlení. Někteří řešitelé si také neuvědomili, že pro sestrojení grafu závislosti rychlosti na čase je potřeba proměřit závislost polohy na čase v několika krátkých úsecích, a místo toho měřili pouze průměrnou rychlost. Mnoho řešitelů také opominulo tu část pohybu míčku, kdy se vrací zpět do startovní pozice. Velmi často se také vyskytovaly problémy s počtem platných číslic, popisováním os grafu a podobně. Nakonec bychom rádi vyzdvihli řešení Martina Štykse,



Obr. 6: Závislost ztrátové energie na čase pro kuličku z deodorantu

kteřý provedl pečlivé měření pro tři různé míčky či míče, a dále řešení Jakuba Kvorcky a Filipa Ayaziho, kteří dodali nejlepší řešení po stránce teoretické.

*Michal Červeňák*  
miso@fykos.cz

*Lukáš Ledvina*  
lukasl@fykos.cz

## Úloha II.S . . . akční

6 bodů; průměr 3,22; řešilo 49 studentů

- a) Jaký je fyzikální rozměr akce? (Jaké má tato veličina jednotky?) Má stejnou jednotku jako některá z fundamentálních konstant z první otázky k minulému dílu seriálu? Která?
- b) Od Nielse Bohra – Uvažujte pohyb hmotného bodu po kružnici s dostředivou silou

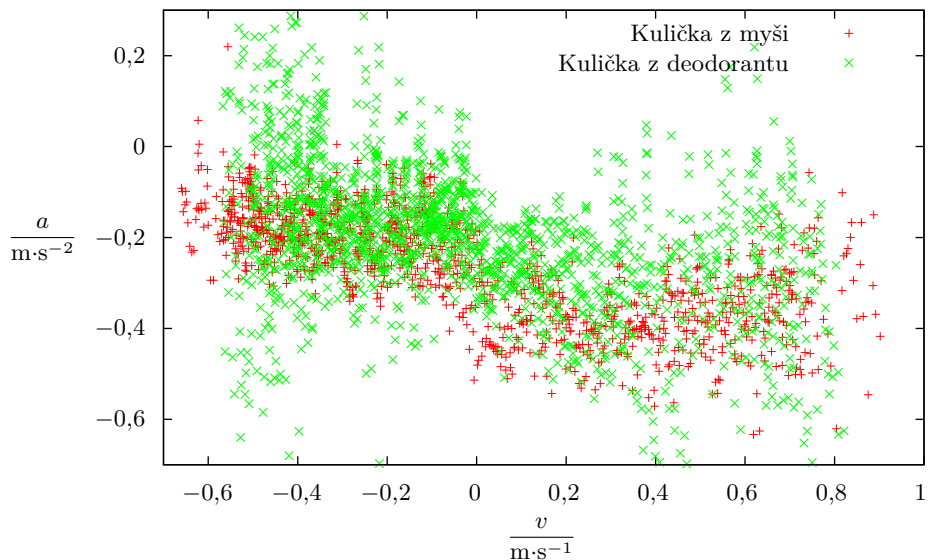
$$F_d = ma_d = \frac{\alpha}{r^2},$$

kde  $r$  je poloměr kružnice a  $\alpha$  nějaká konstanta. Pak

1. Spočítejte redukovanou akci  $\mathcal{S}_0$  pro jeden oběh po kružnici jako funkci jejího poloměru  $r$ .
2. Určete hodnoty  $r_n$ , pro které je hodnota  $\mathcal{S}_0$  přirozeným násobkem konstanty z podúlohy a).
3. Celková energie hmotného bodu je  $E = T + V$ . Pro tuto sílu je  $V = -\alpha/r$ . Vyjádřete energii  $E_n$  částic v závislosti na poloměrech  $r_n$  za pomoci uvedených konstant.

Tip Jistě jste ve fyzice probírali pohyb po kružnici a odpovídající vztahy mezi pohybovými veličinami. Použijte je a pak se integrace akce po obvodu kružnice s konstantním  $r$  podstatně zjednoduší (veličiny konstantní při integraci můžete před integrál vytknout). Nezapomeňte také, že samotný dráhový integrál „ničeho“ je prostě délka zintegrované dráhy.





Obr. 7: Závislost zrychlení na rychlosti

- c) Poslední podúloha může znít komplikovaně, ale je pouhým cvičením na derivaci a integraci jednoduchých funkcí. Vystačíte si se základními tabulkovými derivacemi a integrály. Ověřte, že plná akce  $S$  pro volnou částici pohybující se z bodu  $[0; 0]$  do bodu  $[2; 1]$  je pro trajektorii odpovídající přímočarému pohybu (první případ) minimální, tedy je větší v ostatních dvou případech

$$\mathbf{y}(t) = (2t, t),$$

$$\mathbf{y}(t) = \left( 1 - \cos(\pi t) + \frac{1}{\pi} \sin 2\pi t, t \right),$$

$$\mathbf{y}(t) = \left( 2t, \frac{e^t - 1 + t^2(t - 1)}{e - 1} \right),$$

kde  $e$  je Eulerovo číslo.

Tip Nejprve spočítejte derivaci  $\mathbf{y}(t)$ , dosadte do výrazu pro akci a zintegrujte.

- a) Rozměr integrované veličiny určíme vždy jako rozměr toho, co je integrováno, krát rozměr toho, přes co je integrováno. Když se tedy podíváme na definici redukované akce, je její rozměr [hybnost·délka], což dává  $\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$  nebo též J·s. Stejně tak má lagrangian rozměr energie a je integrován přes čas, takže i pro neredukovanou akci získáváme rozměr J·s. Jediná ze tří konstant  $G$ ,  $h$ ,  $c$  má takovýto rozměr, a to Planckova konstanta  $h$ .
- b) *Od Nielse Bohra*

1. Abychom spočítali redukovanou akci, potřebujeme nejdříve vyjádřit hybnost, a tudíž i rychlost částice na kružnici. Pro rovnoměrný pohyb s rychlostí  $v$  a dostředivým zrychlením  $a_d$  po kružnici s poloměrem  $r$  máme

$$\frac{v^2}{r} = a_d = \frac{F_d}{m} = \frac{\alpha}{mr^2}. \quad (8)$$

Získáváme tedy úpravou  $p = mv = \sqrt{\alpha m/r}$ . To je ovšem výraz konstantní pro celý kruhový pohyb, a tudíž dostáváme po integraci redukované akce podél kružnice

$$S_0 = \int_{\bigcirc} p \, ds = \sqrt{\alpha m/r} \int_{\bigcirc} ds = 2\pi r \sqrt{\alpha m/r}. \quad (9)$$

2. Akci (9) upravíme a položíme pro nějaké poloměry  $r_n$  rovnu  $n$ -násobkům Planckovy konstanty  $h$  (viz výsledek podúlohy a)):

$$2\pi\sqrt{\alpha m r_n} = nh. \quad (10)$$

Umocněním celé rovnice (10) na druhou a převedením všech členů kromě  $r_n$  dělením na pravou stranu získáváme

$$r_n = \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 m \alpha}.$$

3. Vyjádříme si nejdříve kinetickou energii částice na kružnici pomocí již použitých vztahů (8)

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ma_d r = \frac{1}{2} \frac{\alpha}{r}.$$

Protože  $V = -\alpha/r$ , dostáváme pro celkovou energii  $E = T + V = -\alpha/2r$ . Dosazením  $r_n$  a krácením dostáváme

$$E_n = -\frac{2\pi^2 m \alpha^2}{n^2 h^2}.$$

Zkuste si za  $\alpha$  dosadit  $e^2/4\pi\epsilon_0$ , kde  $e$  je náboj elektronu a  $\epsilon_0$  permitivita vakua, a za  $m$  hmotnost elektronu – dostanete energetické hladiny elektronu v atomu vodíku. Pokud jste se dostali až sem, gratulujeme. Právě jste totiž spočítali něco, za co dostal Niels Bohr před 91 lety Nobelovu cenu.

- c) V této podúloze je potřeba znát derivace mocnin  $(t^n)' = nt^{n-1}$ , sinů  $(\sin t)' = \cos t$  a kosinů  $(\cos t)' = -\sin t$  a exponenciální funkce  $(e^t)' = e^t$  a derivaci funkce s přenásobeným argumentem  $(f(\alpha t))' = \alpha f'(\alpha t)$ , kde derivaci podle  $t$  značíme v celém řešení čárkou. Dále potřebujeme znát primitivní funkce k mocninám  $\int t^n dt = t^{n+1}/(n+1)$ , sinu  $\int \sin t dt = -\cos t$  a kosinu  $\int \cos t dt = \sin t$  a exponenciální funkci  $\int e^t dt = e^t$  spolu se substitucí  $\int f(\alpha t) dt = (1/\alpha) \int f(t) dt$  a integrací per-partes zmíněnou již v textu seriálu. Všechny tyto vztahy naleznete v libovolném textu k diferenciálnímu a integrálnímu počtu.

Všimněte si, že každá z trajektorií je v čase  $t = 0$  v bodě  $[0; 0]$  a v čase  $t = 1$  v bodě  $[2; 1]$  (argumenty sinu a kosinu jsou v radiánech). Víme, že akce je integrál z  $(my'^2)/2$ , ale protože  $m/2$  je jen pouhá konstanta, bude nám úplně stačit porovnávat integrál

$$\int_0^1 y'^2 dt$$

pro každou zadanou trajektorii. Pro první trajektorii získáme derivaci podle  $t$  rychlost  $\mathbf{y}' = (2, 1)$ . Vynásobením na druhou získáváme  $y'^2 = \mathbf{y}' \cdot \mathbf{y}' = 5$ . Integrál z pětky přes interval o délce jedna je snadný, je to prostě  $5 \cdot 1$ . Celkově tedy musíme ověřit, že ostatní integrály z kvadrátu rychlosti jsou větší než 5.

Derivace pro druhou trajektorii je už těžší, ale při správném použití všech zmíněných pravidel získáváme

$$\mathbf{y}' = (\pi \sin(\pi t) + 2 \cos 2\pi t, 1) .$$

Musíme tedy spočítat integrál

$$\int_0^1 ((\pi \sin(\pi t) + 2 \cos 2\pi t)^2 + 1) dt .$$

Integrál z jedničky spočteme opět snadno. Po roznásobení závorčky dostaneme tři členy, které lze zintegrovat velmi podobně. Integrace těchto tří členů je trochu pracnější a nám stačilo, když jste si příslušné integrály našli na internetu. Ukažme si jako příklad, jak integrovat jeden z těchto členů. Integrál můžeme přepsat následovně

$$\int_0^1 \sin^2(\pi t) dt = \int_0^1 \frac{1 - \cos(2\pi t)}{2} dt ,$$

což plyne z identit  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$  a  $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$  jejich vzájemným odečtením. První člen výše opět zintegrujeme snadno, protože jde o konstantu, a druhý člen je již tabulkový integrál. Primitivní funkci ke kosinu jsme si uvedli výše a pro náš integrál máme tedy

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 \cos(2\pi t) dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} (\sin(2\pi \cdot 1) - \sin(2\pi \cdot 0)) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} .$$

Podobně vypočteme zbylé dva členy a celkově dostáváme hodnotu 5,27, což je větší než předchozích 5.

V posledním případě máme derivaci rovnou

$$\mathbf{y}' = \left( 2, \frac{e^t + 2(t-1)t + t^2}{e-1} \right) .$$

Dosadíme-li do výrazu pro akci, zjistíme, že musíme po umocnění zintegrovat výrazy tvaru  $t^n$  pro  $n = 2, 3, 4$ ,  $e^t$ ,  $te^t$  a  $t^2e^t$ . První dva případy jsou přímo tabulkové integrály. Druhé dva integrály lze spočítat pomocí metody per partes. Ukažme si první případ. Druhý je zcela analogický. Dostáváme

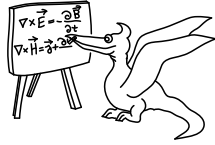
$$\int_0^1 te^t dt = 1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0 - \int_0^1 e^t dt = e - (e^1 - e^0) = 1 .$$

Spočteme-li poctivě všechny integrály, dostaneme hodnotu akce 5,23, což je opět více než původních 5.

V této podúloze jsme si tedy uvědomili, že akce každé trajektorii přiřadí nějaké číslo. Fyzikální trajektorie, podél které se částice pohybuje, odpovídá pak extrémální hodnotě akce. Ukázali jsme si, jak spočítat pár základních derivací a integrálů a věříme, že se vám tyto znalosti budou v budoucnu hodit.

*Vojtěch Witzany*  
witzanyv@fykos.cz

*Miroslav Rapčák*  
miro@fykos.cz



## Seriál: Aplikační

Tento díl seriálu bude tak trochu aplikační. Minule jsme si pověděli úvod k variačním metodám ve fyzice, nyní bychom rádi nabyté znalosti aplikovali na tři speciální případy. Povíme si něco o variační úloze pro klasickou strunu, pro relativistickou částici a na závěr zavedeme slavnou Nambu-Gotovu akci pro relativistickou strunu. Znalost této akce nám otevře brány ke všem tajům teorie strun. Začneme ale od počátku.

### Klasická struna

Každý z nás už v minulosti viděl nějaký strunný hudební nástroj. Položili jste si někdy otázku, jak se struna při brknutí hýbe? Odpověď je snadná. Jak jsme si v minulém díle řekli, pohybuje se tak, že je hodnota akce příslušející tomuto pohybu extrémální. Jak ale akce pro naši strunu vypadá?

Připomeňme, že jsme akci pro částici definovali jako integrál

$$\mathcal{S}[\mathbf{x}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t), t) dt,$$

kde rozdíl  $L = T - V$  kinetické energie  $T$  a potenciální energie  $V$  jsme nazvali Lagrangiánem. Uvažujme nyní strunu délky  $l$  a celkové hmotnosti  $m$ , která se pohybuje v rovině  $[x; y]$ . Struna je natažena mezi body  $A[a; 0]$  a  $B[b; 0]$ , kde  $b = a + l$ . Tvar struny v daném čase můžeme popsat funkcí  $y(x)$  pro  $x$  z intervalu  $(a, b)$  tak, jak jsme to dělali v předchozím díle seriálu pro řetízek v gravitačním poli. Jelikož se však tvar struny může v čase měnit, je ve skutečnosti výchylka závislá jak na souřadnici  $x$ , tak na čase  $t$  a píšeme  $y \equiv y(x, t)$ .

Zde poznamenejme, že máme-li funkci více proměnných (v našem případě tedy  $y(x, t)$ ), pak se zavádí *parciální derivace* jakožto veličina charakterizující změnu funkce při malé změně jedné z proměnných. Například parciální derivace  $y(x, t)$  podle  $x$ , kterou zapisujeme jako

$$\frac{\partial y}{\partial x} \equiv \partial_x y \equiv y_x,$$

by nám charakterizovala změnu  $y(x, t)$  při malé změně  $x$ . Prakticky to znamená, že při parciálním derivování  $y(x, t)$  podle  $x$  derivujeme funkci stejně jako v případě obyčejné derivace a druhou proměnnou  $t$  považujeme za konstantu. Podobně postupujeme i pro derivaci podle  $t$ .

Spočtíme nejprve kinetickou energii naší struny. Strunu můžeme rozdělit na malinké kousíčky délky  $dx$  o hmotnosti  $dm = (m/l) dx$ , kde  $m$  je celková hmotnost struny. Jde-li o dostatečně malinké kousky, můžeme každý kousíček v daném čase  $t$  považovat za hmotný bod s polohou  $(x, y(x, t))$ , jehož kinetickou energii známe

$$dT(x, t) = \frac{1}{2} v(x, t)^2 dm = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dm.$$

Přesčítáme-li přes všechny malé elementy, získáme celkovou kinetickou energii struny. V případě infinitezimálně malých elementů přejde tato suma v integrál

$$T = \int_A^B dT = \frac{1}{2} \int_A^B \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dm = \frac{m}{2l} \int_a^b \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx.$$

Dále musíme určit potenciální energii odpovídající dané konfiguraci. Jsou-li deformace malé, lze uvažovat s dobrou přesností, že je v celé struně konstantní napětí  $T_0$ . Při natažení má struna tendenci vrátit se do původního stavu s délkou  $l$  a příslušná energie odpovídající prodloužení  $\Delta l$  bude úměrná tomuto prodloužení, takže  $V = T_0 \Delta l$ . Nám zbývá určit toto prodloužení. Opět rozdělme strunu na malé kousíčky a každý aproximujme malou úsečkou. Délka takového úsečky bude z Pythagorovy věty

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} dx,$$

kde  $dx$  odpovídá délce kousíčku podél osy  $x$  a  $dy$  příslušné délce podél osy  $y$ . Vidíme, že v důsledku naivního dělení diferenciálů se nám pod odmocninou objevila parciální derivace  $y(x, t)$  podle  $x$  jakožto sklon struny v daném čase. Jelikož uvažujeme jen malé výchylky, je tento sklon velmi malý a můžeme tedy psát přibližný vztah

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2,$$

o jehož platnosti pro malé  $\frac{\partial y}{\partial x}$  se lze snadno přesvědčit. Celkovou změnu délky struny pak získáme opět integrací přes celou strunu a dostáváme potenciální energii

$$\begin{aligned} V = T_0 \Delta l &= T_0 \left( \int_A^B dl - l \right) = T_0 \left( \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} dx - l \right) \approx \\ &\approx T_0 \left( \int_a^b dx + \frac{1}{2} \int_a^b \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx - l \right) = \frac{T_0}{2} \int_a^b \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx, \end{aligned}$$

kde jsme využili znalosti délky struny

$$\int_a^b dx = l.$$

Celkově tedy máme akci pro strunu vyvíjející se z času  $t_1$  do času  $t_2$  ve tvaru

$$\mathcal{S}[y(x, t)] = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_a^b \left( \frac{m}{2l} \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 - \frac{T_0}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \right) dx dt.$$

Všimněme si, že akce struny na rozdíl od akce pro částici obsahuje dva integrály. Funkce v závorce je funkcí nejen času, ale také polohy na struně a integrací přes celou strunu pak získáváme Lagrangián. Je přirozené veličinu v závorce nazvat hustotou Lagrangiánu a označit

$$\mathcal{L}(\partial_x y, \partial_t y) = \frac{m}{2l} \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 - \frac{T_0}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2.$$

Analogicky, jako jsme minule odvodili z akce pro volnou částici její pohybové rovnice, můžeme odvodit pohybovou rovnici pro klasickou strunu. Uvažujme strunu, která se vyvíjí z počátečního času  $t_1$ , kde má tvar popsaný funkcí  $y(x, t_1) \equiv y_1(x)$ , do času  $t_2$ , kde má tvar popsaný funkcí  $y(x, t_2) \equiv y_2(x)$ , a pokusme se najít „trajektorii“, po které se struna vyvíjí, jakožto extrémů naší akce. Připomeňme, že v případě bodové částice, jejíž trajektorii parametrizujeme

parametrem  $p$ , jsme prováděli změnu  $y(p)$  pro každé  $p$  o malou hodnotu  $\delta y(p)$  a dostali jsme tak trajektorii  $y(p) + \delta y(p)$  nepatrně odlišnou od trajektorie  $y(p)$ . V případě struny máme však funkci dvou proměnných a musíme provést malou změnu v každém čase  $t$  a v každém bodě  $x$  struny. Musíme tedy provést variaci  $y(x, t) \rightarrow y(x, t) + \delta y(x, t)$ . Na tuto změnu však musíme naložit dvě podmínky. Předně musí být  $\delta y(x, t_1) = 0 = \delta y(x, t_2)$ , protože počáteční i koncový tvar struny máme pevně zadáný. Dále jsme fixovali krajní body struny, takže v každém čase musí být také  $\delta y(a, t) = 0 = \delta y(b, t)$ .

Nyní už nám nic nebrání v odvození pohybových rovnic pro klasickou strunu. Najdeme tedy variaci akce a položíme ji rovnu nule. Máme

$$\begin{aligned} \delta S[y(x, t)] &= \int_{t_1}^{t_2} \int_a^b \left( \frac{m}{2l} \left( \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \delta y}{\partial t} \right)^2 - \frac{T_0}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial x} \right)^2 \right) dx dt - \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_2} \int_a^b \left( \frac{m}{2l} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - \frac{T_0}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right) dx dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_a^b \left( \frac{m}{l} \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial \delta y}{\partial t} - T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial \delta y}{\partial x} \right) dx dt, \end{aligned}$$

kde jsme roznásobili obě závorky, jeden z takto získaných členů se odečetl s druhým členem a členy obsahující druhou mocninu variace  $\delta y$  jsme pro jejich malost zanedbali.

Stejně jako v minulém díle provedeme nyní pro každý z členů integraci per partes a dostáváme

$$\begin{aligned} \delta S[y(x, t)] &= \frac{m}{l} \int_a^b \left( \frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{t=t_2, x} \delta y(t_2, x) - \frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{t=t_1, x} \delta y(t_1, x) \right) dx - \\ &\quad - T_0 \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=b, t} \delta y(b, t) - \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=a, t} \delta y(a, t) \right) dt - \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_2} \int_a^b \left( \frac{m}{l} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \delta y - T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \delta y \right) dx dt, \end{aligned}$$

kde svislicí značíme vyhodnocení parciálních derivací v daných bodech. Dostali jsme tak tři členy. První dva jsou ale nulové z okrajové, počáteční a koncové podmínky, které vyžadují  $\delta y(x, t_1) = \delta y(x, t_2) = \delta y(a, t) = \delta y(b, t) = 0$ . Dostáváme tedy podmínku

$$0 = \delta S[y(x, t)] = - \int_{t_1}^{t_2} \int_a^b \left( \frac{m}{l} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \delta y dx dt,$$

což musí platit pro všechna  $\delta y$ . Toho docílíme jen tehdy, pokud je výraz v závorce nulový a dostáváme tak rovnici

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} - \frac{T_0 l}{m} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = 0,$$

kteřá je pohybovou rovnicí pro klasickou strunu a nazývá se vlnovou rovnicí. Poznamenejme zde ještě, že odmocnina z konstanty stojící před druhým členem odpovídá rychlosti šíření vlny na struně.

## Relativistická částice

Druhým příkladem tohoto dílu seriálu je volná relativistická částice, tedy částice, na kterou nepůsobí žádná síla. V prvním díle jsme si povídali o teorii relativity a řekli jsme si, že fyzikální zákony musí být nezávislé na inerciálním systému, ve kterém studovaný jev popisujeme. Matematicky řečeno musí být konzistentní fyzikální teorie invariantní vůči Lorentzovým transformacím.

Nyní bychom rádi vyšetřili pohyb volné relativistické částice. Tento pohyb bude opět dán jakožto extrémála nějakého funkcionálu. Abychom dostali správnou relativistickou teorii, je přirozené uvažovat také relativisticky invariantní akci. Položme si tedy otázku: známe nějaký invariant vůči Lorentzově transformaci? Známe! Příkladem je čtyřinterval, jak jsme diskutovali v úloze k prvnímu dílu našeho seriálu. Podívejme se na konstrukci akce trochu detailněji.

Rádi bychom našli akci pro částici pohybující se z bodu časoprostoru **A** se souřadnicemi  $(x_1^0, x_1^1, x_1^2, x_1^3)$  do bodu **B** se souřadnicemi  $(x_2^0, x_2^1, x_2^2, x_2^3)$ . Částice se pohybuje v časoprostoru po světočáře  $\mathbf{x}(\lambda) = (x^0(\lambda), x^1(\lambda), x^2(\lambda), x^3(\lambda))$ , kde  $\lambda$  je libovolný parametr určující polohu na světočáře (v předešlém značený  $p$ ), jak jsme diskutovali již v prvním díle seriálu, a nabývá hodnoty  $\lambda_1$  v bodě **A** a  $\lambda_2$  v bodě **B**. Rozdělíme-li tuto trajektorii na malé kousíčky, pak můžeme pro každý element spočítat příslušný čtyřinterval

$$(ds)^2 = - (dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2, \quad (11)$$

který je, jak víme, invariantní vůči Lorentzově transformaci.

Akci nyní získáme integrací přes celou trajektorii. K tomu potřebujeme odmocnit vztah (11). Již z úlohy k prvnímu dílu seriálu víme, že výraz na pravé straně je záporný pro částici pohybující se rychlostí menší, než je rychlost světla. Proto si musíme při odmocňování dát pozor na znaménko a psát

$$S[\mathbf{x}(s)] = -mc \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{-(ds)^2},$$

kde  $m$  je klidová hmotnost částice a  $c$  je rychlost světla a  $s$  jsme zvolili jako parametr světočáry nabývající hodnot  $s_1$  v bodě **A** a  $s_2$  v bodě **B**. Prefaktor  $mc$  jsme museli do definice akce přidat, aby měla správný rozměr.

Vyvstává otázka, jaký má nalezená akce fyzikální význam. Víme, že nezávisí na tom, v jakém systému počítáme  $(ds)^2$ . Představme si tedy, že sedíme přímo na pohybující se částici. V tom případě se vůči nám poloha částice nemění a tedy  $(dx^1)^2 = (dx^2)^2 = (dx^3)^2 = 0$ . V tomto případě je nenulová jen jedna složka  $(ds)^2 = -(dx^0)^2 = -c^2 d\tau^2$ , kde  $\tau$  je vlastní čas pozorovatele pohybujícího se s částicí. Potom dostáváme

$$S[\mathbf{x}(\tau)] = -mc^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau$$

a akce je tedy rovna (až na prefaktor) vlastnímu času, který je potřeba, aby se částice po dané trajektorii dostala z bodu **A** do bodu **B**.

Už jsme zběhlí v počítání variací a odvozování pohybových rovnic. Provedme to i pro tento případ. Uvažujme variaci trajektorie  $x^\mu(\lambda) \rightarrow x^\mu(\lambda) + \delta x^\mu(\lambda)$  mezi body **A**, **B** s hodnotami parametru  $\lambda_1$  a  $\lambda_2$ .<sup>7</sup> Jako obvykle, fixujeme počáteční a koncovou polohu částice, takže  $\delta x^\mu(\lambda_1) =$

<sup>7</sup>Připomeňme, že za index  $\mu$  můžeme dosadit 0, 1, 2 nebo 3.

$= 0 = \delta x^\mu(\lambda_2)$ . Vzpomeneme-li si na první díl seriálu, kde jsme zavedli metriku  $\eta_{\mu\nu}$ , můžeme psát

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{S}[\mathbf{x}(\lambda)] &= -\delta\left(mc\int_{s_1}^{s_2}\sqrt{-(ds)^2}\right) = \\ &= -\delta\left(mc\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\sqrt{-\sum_{\mu,\nu}\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}}d\lambda\right) = \\ &= -mc\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\sqrt{-\sum_{\mu,\nu}\eta_{\mu\nu}\left(\frac{dx^\mu}{d\lambda}+\frac{d\delta x^\mu}{d\lambda}\right)\left(\frac{dx^\nu}{d\lambda}+\frac{d\delta x^\nu}{d\lambda}\right)}d\lambda - \mathcal{S}[\mathbf{x}(\lambda)] = \\ &= -mc\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\sqrt{-\sum_{\mu,\nu}\eta_{\mu\nu}\left(\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}+2\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{d\delta x^\nu}{d\lambda}\right)}d\lambda - \mathcal{S}[\mathbf{x}(\lambda)],\end{aligned}$$

kde jsme v posledním řádku využili symetrie  $\eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu}$ . Nyní „vtáhneme“ diferenciál  $d\lambda$  zpět pod odmocninu, dosadíme za  $\mathcal{S}[\mathbf{x}(\lambda)]$ , vzpomeneme si, že  $\sqrt{-(ds)^2} = c d\tau$ , a dostaneme

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{S}[\mathbf{x}(\lambda)] &= -mc\int_{s_1}^{s_2}\sqrt{-(ds)^2-2\sum_{\mu,\nu}\eta_{\mu\nu}dx^\mu d(\delta x^\nu)}+mc\int_{s_1}^{s_2}\sqrt{-(ds)^2} = \\ &= -m\int_{\tau_1}^{\tau_2}\sqrt{1-2\sum_{\mu,\nu}\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{d(\delta x^\nu)}{d\tau}}d\tau+m\int_{\tau_1}^{\tau_2}d\tau \approx \\ &\approx m\int_{\tau_1}^{\tau_2}\sum_{\mu,\nu}\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{d\delta x^\nu}{d\tau}d\tau = m\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\sum_{\mu,\nu}\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{d\delta x^\nu}{d\lambda}d\lambda,\end{aligned}$$

kde jsme opět využili přibližného vztahu jako výše a zanedbali příspěvky vyšších řádů v  $\delta x^\mu$ . Je přirozené definovat relativistickou (čtyř)hybnost v analogii s klasickou hybností jako

$$p^\mu = m\frac{dx^\mu}{d\tau}.$$

Tuto hybnost můžeme dosadit to vztahu výše a provést integraci per partes. Dostáváme tak

$$\begin{aligned}0 = \delta\mathcal{S}[\mathbf{x}(\lambda)] &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\sum_{\mu,\nu}\eta_{\mu\nu}p^\mu\frac{d\delta x^\nu}{d\lambda}d\lambda = \\ &= \sum_{\mu,\nu}\eta_{\mu\nu}[p^\mu(\lambda_2)\delta x^\nu(\lambda_2)-p^\mu(\lambda_1)\delta x^\nu(\lambda_1)] - \int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\sum_{\mu,\nu}\eta_{\mu\nu}\frac{dp^\mu}{d\lambda}\delta x^\nu d\lambda,\end{aligned}$$

kde první člen je opět nulový díky pevné počáteční a koncové poloze  $\delta x^\nu(\lambda_1) = 0 = \delta x^\nu(\lambda_2)$ . Jelikož musí tato rovnost platit jinak pro všechny variace  $\delta x^\nu$ , dostáváme pohybové rovnice ve tvaru

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = 0.$$



Podobně jako v klasické mechanice se zde tedy zachovává čtyřhybnost volné částice. Pohybuje-li se částice malou rychlostí, je vlastní čas částice přibližně roven času pozorovatele  $t \approx \tau$  a můžeme psát pro  $i = 1, 2, 3$

$$0 = \frac{dp^i}{d\tau} \approx \frac{dp^i}{dt} = m \frac{d^2 x^i}{dt^2}.$$

V limitě malých rychlostí tedy opravdu dostáváme pohybovou rovnici pro klasickou volnou částici z minulého dílu seriálu.

Jak by vypadala akce pro volnou částici v obecné teorii relativity? Akce by měla naprosto stejný tvar, jen by nyní nemělo  $ds$  tvar (11), ale mělo by obecný tvar z prvního dílu seriálu, který odpovídá obecně zakřivenému časoprostoru. Teď tedy konečně vidíme, co se myslí tím, že se částice pohybuje v zakřiveném časoprostoru po nejrovnějších možných drahách. Myslíme tím to, že délka měřená čtyřintervalem  $ds$  je extrémální.

### Relativistická struna

Naše diskuze akce nyní vyvrcholí studiem akce pro relativistickou strunu, tedy jednorozměrný provázek pohybující se v časoprostoru. Naše akce bude přímým zobecněním úvah o relativistické částici.

Pohyb částice v časoprostoru, kterému odpovídá světočára, je určen čtveřicí funkcí  $\mathbf{x}(\tau) = (x^0(\tau), x^1(\tau), x^2(\tau), x^3(\tau))$  vlastního času  $\tau$ . Podobně bude pohybující se struně odpovídat světloplocha v časoprostoru a bude parametrizována dvěma parametry

$$\mathbf{X}(\tau, \sigma) = (X^0(\tau, \sigma), X^1(\tau, \sigma), X^2(\tau, \sigma), X^3(\tau, \sigma)).$$

Parametr  $\tau$  odpovídá časupodobnému směru na světloploše (odpovídá tedy času nějakého pozorovatele), zatímco parametr  $\sigma$  odpovídá prostorupodobnému směru. Přesuneme-li se do soustavy spojené s pozorovatelem, jehož vlastní čas je  $\tau$ , pak pro nějaké  $\tau = \tau_0$  konstantní určuje funkce  $(X^1(\tau_0, \sigma), X^2(\tau_0, \sigma), X^3(\tau_0, \sigma))$ , podobně jako v případě klasické struny, její tvar v tomto čase. Parametr  $\sigma$  pak odpovídá parametru  $x$  v klasickém případě a parametrizuje strunu v daném čase. Na funkci  $\mathbf{X}(\tau, \sigma)$  tedy můžeme nahlížet jako na funkci, která každému bodu z prostoru parametrů  $[\tau, \sigma] \in \langle \tau_1, \tau_2 \rangle \times \langle 0, l \rangle$  přiřadí jeden bod na světloploše struny jako na obrázku 8.

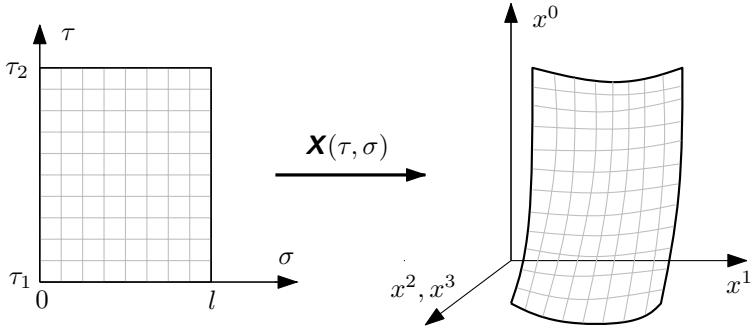
Zobecnění akce je nyní nasnadě. V případě relativistické částice byla akce (až na konstantní prefaktory) rovna Lorentzovsky invariantní délce světočáry. V případě relativistické struny máme v časoprostoru dvourozměrnou světloplochu a akce bude úměrná plošnému obsahu této světloplochy.

Akce relativistické částice vznikla vysčítáním přes čtyřintervaly malých elementů podél trajektorie částice. V případě struny budeme počítat plošné obsahy malých elementů světloplochy. Rozdělme si prostor parametrů  $\langle \tau_1, \tau_2 \rangle \times \langle 0, l \rangle$  na malinké obdélníčky o délce stran  $d\tau$  a  $d\sigma$ . Změna parametru  $\tau$  o element  $d\tau$  odpovídá zřejmě změně polohy

$$dX_1^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} d\tau$$

na světloploše. Podobně bude posunutí  $\sigma$  o element  $d\sigma$  v prostoru parametrů odpovídat změně polohy

$$dX_2^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} d\sigma$$



Obr. 8: Prostor parametrů a funkce  $\mathbf{X}(\tau, \sigma)$  přiřazující každému bodu z prostoru parametru jeden bod světloplochy. Na světloploše jsou také vyobrazeny souřadnice odpovídající konstantnímu  $\tau$  resp.  $\sigma$ . Integrace v akci odpovídá sčítání obsahů všech zobrazených elementárních rovnoběžníků.

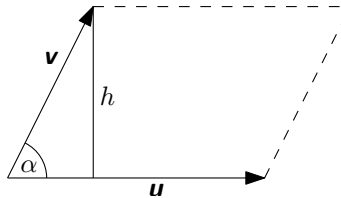
na světloploše. Každému malému obdélníčku  $d\tau d\sigma$  bude odpovídat na světloploše v časoprostoru malinký rovnoběžník určený čtyřvektory  $d\mathbf{X}_1$  a  $d\mathbf{X}_2$ . My bychom si přáli spočítat plochu tohoto rovnoběžníku a sečíst plochy všech takovýchto malých rovnoběžníků.

Vypočteme tedy plošný element na světloploše v prostoru parametrů odpovídající obdélníčku  $\langle \tau, \tau + d\tau \rangle \times \langle \sigma, \sigma + d\sigma \rangle$ . Velikost a skalární součin příslušných čtyřvektorů v časoprostoru  $d\mathbf{X}_1$  a  $d\mathbf{X}_2$  počítáme pomocí metriky, kterou jsme si zavedli v prvním díle seriálu. Zde využijeme následujícího značení

$$|d\mathbf{X}_1|^2 = \sum_{\mu, \nu} \eta_{\mu\nu} dX_1^\mu dX_1^\nu, \quad |d\mathbf{X}_2|^2 = \sum_{\mu, \nu} \eta_{\mu\nu} dX_2^\mu dX_2^\nu, \quad d\mathbf{X}_1 \cdot d\mathbf{X}_2 = \sum_{\mu, \nu} \eta_{\mu\nu} dX_1^\mu dX_2^\nu.$$

Jak ale vypočítat obsah rovnoběžníku zadaného dvěma vektory  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}$ ? Ze školy víme, že obsah rovnoběžníku spočteme jako velikost základny krát výška. Pohledem na obrázek 9 vidíme, že pro obsah  $S$  musí platit

$$\begin{aligned} S &= |\mathbf{u}|h = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin\alpha = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \\ &= \sqrt{|\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2\cos^2\alpha} = \sqrt{|\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2}. \end{aligned}$$



Obr. 9: Obrázek k výpočtu obsahu rovnoběžníku zadaného dvěma vektory.

Použijeme-li tento vzorec v našem případě, dostaneme plochu našeho malého elementu ve tvaru<sup>8</sup>

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{(d\mathbf{X}_1 \cdot d\mathbf{X}_2)^2 - |d\mathbf{X}_1|^2 |d\mathbf{X}_2|^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma}\right)^2 - \left|\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau}\right|^2 \left|\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma}\right|^2} d\tau d\sigma. \end{aligned}$$

Nyní už stačí integrovat přes celou plochu a přenásobit prefaktorem se správným rozměrem a dostáváme slavnou Nambu-Gotovu akci

$$\mathcal{S}[\mathbf{X}(\tau, \sigma)] = -\frac{T_0}{c} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^l \sqrt{\left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma}\right)^2 - \left|\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau}\right|^2 \left|\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma}\right|^2} d\sigma d\tau.$$

Poznamenejme nyní, že funkce  $\mathbf{X}(\tau, \sigma)$  není určena jednoznačně. Relevantní je výsledný tvar světoplochy, ale nezávisí na tom, jak budou na světoploše vypadat křivky konstantního  $\tau$  a  $\sigma$ . Pokud je zvolíme tak, aby byly na sebe vždy kolmé, bude první člen pod odmocninou výše nulový a my máme akci

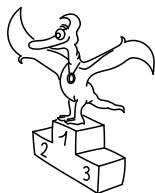
$$\mathcal{S}[\mathbf{X}(\tau, \sigma)] = -\frac{T_0}{c} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^l \sqrt{-\left|\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau}\right|^2 \left|\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma}\right|^2} d\sigma d\tau.$$

Variaci této akce a odvození příslušných pohybových rovnic si necháme až na jindy. Výpočet bude velmi podobný jako v případě relativistické částice, ale diskuze pohybových rovnic pro strunu a jejich řešení si žádá vlastní díl.

V tomto díle jsme se tedy seznámili se třemi významnými akcemi a ukázali si, jak postupovat v odvození příslušných pohybových rovnic. V dalším díle odhlédneme od akce a povíme si něco o kvantové mechanice. K Nambu-Gotově akci se pak vrátíme v pátém díle, kde nás čeká odvození pohybových rovnic, jejich řešení a kvantování celé struny.

---

<sup>8</sup>Všimněme si, že jsme museli pod odmocninou, stejně jako v případě relativistické částice, prohodit znaménko, abychom odmocňovali kladnou veličinu.



## Pořadí řešitelů po II. sérii



Kompletní výsledky najdete na <http://fykos.cz>.

## Kategorie prvních ročníků

jméno Student Pílný	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	II	%	Σ
		4	4	4	4	5	4	8	6	<b>39</b>	100	<b>79</b>
1. Matěj Mezera	G Havlíčkův Brod	6	4	4	4	6	3	6	5	<b>38</b>	89	<b>70</b>
2. Jan Preiss	G, Lovosice	4	4	4	3	3	4	8	3	<b>33</b>	84	<b>66</b>
3. Martin Štyks	G Jana Keplera, Praha	4	4	4	2	3	2	8	4	<b>31</b>	78	<b>62</b>
4. Jáchym Bártík	G Havlíčkův Brod	2	2	2	4	4	4	6	4	<b>28</b>	72	<b>57</b>
5. Lucie Hronová	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	2	4	2	1	3	–	5	4	<b>21</b>	64	<b>48</b>
6. Jozef Lipták	G Tajovského, B. Bystrica	4	4	4	3	2	4	–	1	<b>22</b>	66	<b>44</b>
7. Přemysl Štastný	G, Žamberk	2	4	3	–	1	4	4	1	<b>19</b>	60	<b>42</b>
8. Daniela Pittmerová	G L. Svobodu, Humenné	4	4	–	3	4	4	1	–	<b>20</b>	67	<b>39</b>
9. Petr Jakubčík	PORG, Praha	4	4	–	–	4	–	3	2	<b>17</b>	63	<b>37</b>
10.–11. Jozef Burkuš	G, Rožnava	4	4	1	2	3	–	–	–	<b>14</b>	62	<b>34</b>
10.–11. Klára Ševčíková	G Uherské Hradiště	4	4	4	–	–	4	–	2	<b>18</b>	69	<b>34</b>
12. Hana Lounová	G, Olomouc – Hejčín	4	4	3	3	–	–	–	–	<b>14</b>	63	<b>32</b>
13.–14. Simona Gabrielová	G, Jírovcova, České Budějovice	2	–	–	–	–	–	–	–	<b>2</b>	66	<b>29</b>
13.–14. Adam Poloček	G, Havlíčkova, Český Těšín	4	2	2	3	–	3	–	1	<b>15</b>	59	<b>29</b>
15. Erik Wetter	Bilingválné G, Sučany	4	4	1	–	1	2	–	3	<b>15</b>	52	<b>28</b>
16.–17. Jaroslav Janoš	G, Lesní čtvrť, Zlín	4	4	1	2	–	4	–	–	<b>15</b>	84	<b>27</b>

## Kategorie druhých ročníků

jméno Student Pílný	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	II	%	Σ
		4	4	4	4	5	4	8	6	<b>39</b>	100	<b>79</b>
1. Petr Hrubý	G, Polička	6	4	4	2	3	3	4	3	<b>29</b>	75	<b>59</b>
2. Jiří Jarošík	G J. Vrchlického, Klatovy	6	4	3	3	3	3	6	4	<b>32</b>	83	<b>57</b>
3. Jakub Jambřích	G J. A. Raymana, Prešov	4	4	2	3	1	3	5	4	<b>26</b>	63	<b>50</b>
4.–5. Dominika Ďurovčíková	G Hlohovec	4	4	1	2	3	2	6	5	<b>27</b>	75	<b>49</b>
4.–5. Tomáš Hrbek	G J. Ressela, Chrudim	4	4	1	0	2	4	3	4	<b>22</b>	62	<b>49</b>
6.–7. Anna Kufová	G M. Koperníka, Bílovec	6	4	1	4	1	2	5	1	<b>24</b>	58	<b>41</b>
6.–7. Samuel Obuch	G Jána Hollého, Trnava	4	2	2	2	3	2	2	1	<b>18</b>	52	<b>41</b>
8. Pavel Kůs	G J. Š. Baara, Domažlice	4	4	3	4	–	2	4	–	<b>21</b>	75	<b>38</b>
9. Klára Stefanová	G B. Němcové, HK	2	4	4	1	4	4	–	1	<b>20</b>	67	<b>35</b>
10.–11. Vojtěch Jelínek	G, Neumannova, Žďár n. S.	4	4	2	–	3	1	2	1	<b>17</b>	49	<b>33</b>
10.–11. Minh Tran Anh	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	4	4	3	2	–	4	–	–	<b>17</b>	67	<b>33</b>
12. Daniela Šimánková	G, Pelhřimov	4	2	2	–	3	3	3	–	<b>17</b>	71	<b>32</b>
13. Kuba Pilař	G J. Ressela, Chrudim	6	4	1	–	–	–	–	1	<b>12</b>	62	<b>31</b>
14.–16. Martin Gažo	G, Pankúchova, SR	–	–	–	–	–	–	–	–	–	88	<b>28</b>
14.–16. Marek Otýpka	G, Židlochovice	6	2	1	–	–	3	1	1	<b>14</b>	45	<b>28</b>
14.–16. Pavel Souček	G, Nymburk	4	4	3	–	–	2	–	–	<b>13</b>	74	<b>28</b>

## Kategorie třetích ročníků

jméno <i>Student Pílný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	II	%	Σ
		2	2	4	4	5	4	8	6	35	100	71
1. <i>Filip Ayazi</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	3	1	4	4	6	4	8	6	36	96	68
2. <i>Luboš Vozdecký</i>	G a SOŠZZE Vyškov	2	2	4	2	4	4	3	7	28	85	60
3.–4. <i>Jozef Bucko</i>	G PdC, Piešťany	3	1	2	3	3	3	7	5	27	83	59
3.–4. <i>Mojmír Poprocký</i>	G Matyáše Lercha, Brno	2	2	4	2	5	3	5	5	28	83	59
5. <i>Pavel Peterka</i>	G P. de Coubertina, Tábor	3	2	2	4	5	2	7	4	29	80	57
6. <i>Tomáš Kremel</i>	G J. Škody, Přerov	2	2	3	–	–	–	4	7	18	86	50
7. <i>Jakub Dolejší</i>	G B. Němcové, HK	2	3	4	2	5	–	5	4	25	83	49
8. <i>Jakub Sláma</i>	G Opatov, Praha	2	2	4	2	4	4	4	2	24	66	47
9. <i>Václav Skála</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	2	1	3	3	3	3	2	1	18	61	43
10. <i>Tomáš Fiala</i>	G, SOŠ a VOŠ, Ledec n. Sáz.	2	2	–	–	2	–	2	6	14	74	40
11. <i>Jakub Maruška</i>	G Andreja Vrábla, Levice	2	2	4	2	4	–	–	–	14	81	38
12.–13. <i>Pavel Blažek</i>	G a ZUŠ, Šlapanice	3	2	4	4	–	1	–	3	17	77	37
12.–13. <i>Martin Vančura</i>	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	2	1	4	–	2	3	–	3	15	73	37

## Kategorie čtvrtých ročníků

jméno <i>Student Pílný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	II	%	Σ
		2	2	4	4	5	4	8	6	35	100	71
1. <i>Jakub Kvorka</i>	G, Dubnica n. Váhom	2	2	4	4	5	4	8	7	36	99	70
2. <i>Markéta Vohníková</i>	PORG, Praha	3	2	2	2	2	–	–	6	17	76	45
3. <i>Ondřej Zelenka</i>	SPŠ a SOŠGS Most	2	2	4	5	4	–	–	6	23	82	41
4. <i>Zuzana Vlasáková</i>	G, Rumburk	2	2	–	–	–	2	4	4	14	73	36
5. <i>Michal Belina</i>	G Volgogradská, Ostrava	2	2	–	3	–	4	2	–	13	65	33
6.–7. <i>Lýdia Janítorová</i>	G, Šrobárova, Košice	3	2	1	4	–	–	4	1	15	56	30
6.–7. <i>Tomáš Tměj</i>	G, Arabská, Praha	0	2	3	–	3	–	–	–	8	79	30
8. <i>Patrik Turzák</i>	G Poštová, Košice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	89	24
9.–10. <i>Denisa Lampášová</i>	G, Považská Bystrica	3	–	–	–	–	–	–	–	3	81	21
9.–10. <i>Ján Ondráš</i>	G Grösslingova, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	75	21
11.–13. <i>Peter Hojnoš</i>	G Školská, Spišská Nová Ves	2	1	–	–	–	–	–	–	3	76	19
11.–13. <i>Norbert Šlívka</i>	G Tajovského, B. Bystrica	–	–	–	–	–	–	–	–	–	79	19
11.–13. <i>Karolína Šromeková</i>	ŠpMNDaG, SR	–	–	–	–	–	–	–	–	–	68	19



FYKOS

UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta

Ústav teoretické fyziky

V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

www: <http://fykos.cz>e-mail: [fykos@fykos.cz](mailto:fykos@fykos.cz)

FYKOS je také na Facebooku   
<http://www.facebook.com/Fykos>

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.