Úloha III.5 ... mig-mig!

5 bodů; průměr 1,69; řešilo 54 studentů

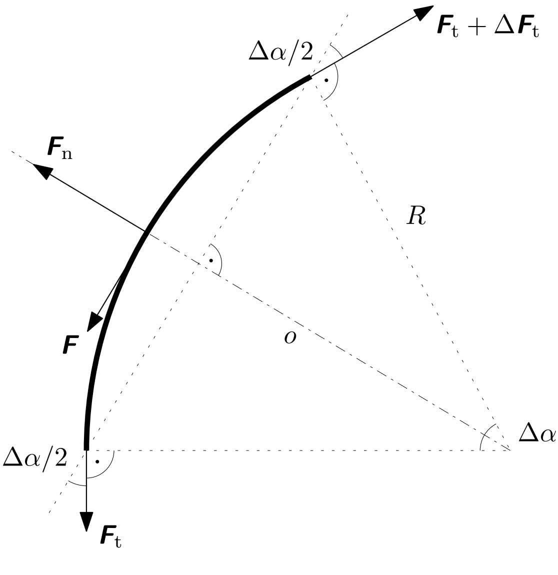
Chudák hladový kojot chce ulovit proradného ptáka Uličníka a přichystal na něj následující past: na pevné lano přiváže 500tunovou kovadlinu, přehodí ji přes větev tak, aby visela nad silnicí, a bude čekat. Kolikrát musí lano kolem větve obtočit, jestliže chce kovadlinu udržet ve vzduchu pouze vlastní vahou? Předpokládejte, že hmotnost lana je vůči hmotnosti kojota zanedbatelná.

Mirek vždy fandil kojotovi.

Je jasné, že musí existovať nejaký fyzikálny jav, ktorý umožní urdžať lano s nákovou obmotané okolo konára. Týmto javom je trenie medzi lanom a konárom. Označme si príslušný koeficient statického trenia f. Ešte si označme hmotnosť nákovy M, hmotnosť kojota m a polomer konára R.

Uvažujme veľmi malý kúsok lana dĺžky Δl, ktorý je obmotaný okolo konára a vymedzený uhlom $\Delta\alpha = \Delta l/R$ ako vidno na obrázku. Tento kúsok lana susedné kúsky napínajú silami veľkosti F_t a $F_\mathrm{t} + \Delta F_\mathrm{t}$ (bez ujmy na všeobecnosti môžeme teraz predpokladať, že $\Delta F_\mathrm{t} > 0$). Konár naň pôsobí výslednou normálovou silou s veľkosťou F_n.

Na náš kúsok lana pôsobí okrem toho výsledná trecia sila s veľkosťou $F = fF_\mathrm{n}$. Ak by neexistovala, lano by sa odtáčalo v smere sily $F_\mathrm{t} + \Delta F_\mathrm{t}$ (lebo proti smeru tohto pohybu pôsobí iba sila F). Ak si volíme Δl veľmi malé, bude situácia prakticky symetrická, teda výsledná normálová aj trecia sila budú pôsobiť v strede nášho kúska.



Obr. 1: Rozbor síl pôsobiacich na malý kúsok lana.

Aby sa náš kúsok nehýbal, musí byť naňho pôsobiaci výsledný moment síl nulový. Keďže konár má tvar valca, stačí, aby bola výslednica síl pozdĺž obvodu konára nulová. Vplyv gravitačnej sily na lano môžeme zanedbať. Platí teda

$$(F_\mathrm{t} + \Delta F_\mathrm{t}) - F_\mathrm{t} - F = 0\,. \tag{1}$$

Lano je pevne navinuté, preto aj výslednica síl v smere osi o nášho kúska je nulová

$$F_\mathrm{n} - (F_\mathrm{t} + \Delta F_\mathrm{t}) \sin \frac{\Delta\alpha}{2} - F_\mathrm{t} \sin \frac{\Delta\alpha}{2} = 0\,. \tag{2}$$

Pre malé uhly $\Delta\alpha$ približne platí $\sin(\Delta\alpha/2) \approx \Delta\alpha/2$ a sily $F_\mathrm{t} + \Delta F_\mathrm{t}$ a F_t sú približne rovnaké. Preto môžeme z (2) vyjadriť

$$F_\mathrm{n} = (2F_\mathrm{t} + \Delta F_\mathrm{t}) \sin \frac{\Delta\alpha}{2} \approx 2F_\mathrm{t} \frac{\Delta\alpha}{2} = F_\mathrm{t}\Delta\alpha$$

a dosadením do (1) dostaneme

$$\Delta F_\mathrm{t} = F = fF_\mathrm{n} = fF_\mathrm{t}\Delta\alpha = \frac{fF_\mathrm{t}}{R}\Delta l\,.$$

Táto rovnica nám hovorí, ako sa zmení napäťová sila v lane na vzdialenosti Δl.

Konce lana s kojotom, resp. nákovou sú napínané tiažovou silou $F_{\mathrm{g},1} = mg$, resp. $F_{\mathrm{g},2} = Mg$. Môžeme teda čakať, že pri minimálnej dĺžke lana L_0 bude sila F_t postupne od kojota po nákovu rásť.[1] A ako vlastne bude rásť? Ak sa Δl blíži k nule, prechádza zlomok $\Delta F_\mathrm{t}/\Delta l$ na deriváciu

$$\frac{\mathrm{d}F_\mathrm{t}}{\mathrm{d}l} = \frac{fF_\mathrm{t}}{R}\,,$$

z čoho integrovaním dostaneme

$$\int_{F_{\mathrm{g},1}}^{F_{\mathrm{g},2}} \frac{1}{F_\mathrm{t}}\,\mathrm{d}F_\mathrm{t} = \int_0^{L_0} \frac{f}{R}\,\mathrm{d}l\,,$$

$$\ln\frac{M}{m} = \frac{fL_0}{R}\,.$$

Konce lana budú visieť dole, preto bude v skutočnosti lano navinuté k-krát o uhol 2π okolo celého konára a ešte raz o π okolo jeho vrchnej polovice. My potrebujeme aspoň také k, pre ktoré je dĺžka lana $(2k+1)\pi R \geq L_0$. Počet prehodení lana bude potom

$$N = k + 1 = \frac{1}{2}\left\lceil 1 + \frac{L_0}{\pi R}\right\rceil = \frac{1}{2}\left\lceil 1 + \frac{1}{f\pi}\ln\frac{M}{m}\right\rceil\,.$$

Dosadením rozumných hodnôt $m = 10\,\mathrm{kg}$ a $f = 0{,}5$ dostaneme $N = 4$. Teda kojotovi stačí prehodiť lano okolo konára štyrikrát a nákovu udrží aj vlastnou, oveľa menšou, váhou.

Jakub Šafin
`xellos@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

[1] To, že kojot je ľahší ako nákova, snáď netreba spomínať.