

Úloha IV.5 ... kulky

4 body; průměr 1,77; řešilo 53 studentů

O kolik se zvýší teplota stejných ocelových kulek po jejich vzájemné srážce? Pohybují se stejným směrem rychlostmi $v_1 = 0,7c$ a $v_2 = 0,9c$, kde c je rychlost světla. Uvažujte konstantní tepelnou kapacitu a uvažujte, že kulky jsou stále v pevném skupenství.

Lukáš vymýšlel úlohu do Fyziklání online a pak ji obměnil do série.

Vieme, že pri zrážke sa zachová energia a hybnosť, len ich obe musíme chápať relativisticky. V relativite sa používa takzvaný γ faktor popisujúci „relativistickosť“ častice s rýchlosťou v . Je definovaný ako

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

Energia častice s pokojovou hmotnosťou¹ m je potom γmc^2 . Jej hybnosť je jej klasická hybnosť vynásobená γ , teda hybnosť s relativistickou hmotnosťou. Faktory γ dvoch častíc očísľujeme dolnými indexmi ako zo zadania a smelo môžeme písať zákony zachovania. Nesmieme zabudnúť, že výsledná častica môže mať všeobecne hmotnosť M , jej rýchlosť označíme v_0

$$\gamma_0 M c^2 = E_1 + E_2 = \gamma_1 m c^2 + \gamma_2 m c^2 = m(\gamma_1 + \gamma_2) c^2.$$

Častice letia rovnakým smerom. Príslušná zložka hybnosti má teda rovnaké znamienko

$$\gamma_0 M v_0 = p_1 + p_2 = \gamma_1 m v_1 + \gamma_2 m v_2.$$

Z týchto dvoch rovníc môžeme napríklad jednoducho vyjadriť

$$v_0 = \frac{\gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2}{\gamma_1 + \gamma_2}.$$

Odtiaľ ľahko spočítame

$$M = m \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_0} = m(\gamma_1 + \gamma_2) \sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2} = m \sqrt{(\gamma_1 + \gamma_2)^2 - (\gamma_1 v_1/c + \gamma_2 v_2/c)^2}$$

a ak roznásobíme výraz pod odmocninou a využijeme definíciu γ , dostaneme

$$M = m \sqrt{2 + 2\gamma_1 \gamma_2 (1 - v_1 v_2/c^2)}.$$

Po dosadení by sme dostali

$$\frac{M}{m} = \sqrt{2 + \frac{74}{\sqrt{969}}} \doteq 2,092.$$

Vidíme, že výsledná pokojová hmotnosť bude väčšia ako súčet pokojových hmotností pôvodných gúl — asi o 5%. Teraz sa musíme zamyslieť, čo to v skutočnosti znamená.

To, že sa spojená guľa zohreje je zrejme už z našich klasických predstáv. Pri klasickej zrážke (pomalých) gúl väčšinou zanedbávame energiu, ktorá unikne v podobne zvukovej energie, rovnako urobme aj tu (aj keď by to bola poriadna rana). Pri relativistických rýchlostiach nastáva ešte ďalšia možnosť, a to rozpad alebo fúzia jadier. Túto možnosť tiež nebudeme uvažovať. Takýto proces totiž nevieme dobre popísať (unikalo by podstatné množstvo energie).

¹Značiť relativistickú hmotnosť, teda γm , nejak špeciálne vedie iba k zmatkom.

Ak teda zrazíme rovnaké gule, každá s N atómami, výsledná guľa bude mať presne $2N$ atómov — tu samozrejme nie sú žiadne relativistické korekcie. Presnejšie povedané, bude to pravda práve, ak neuvažujeme jadrové reakcie. Každý z týchto atómov má samozrejme rovnakú pokojovú hmotnosť ako tie v pôvodnej guľi, pretože pokojová hmotnosť je vlastnosť konkrétneho izotopu. To sa ale nedá povedať o zotrvačnosti týchto atómov. Práve pri zrážke sa rapidne zrýchlia. Toto zrýchlenie teda spôsobí zmenu nameranej hmotnosti spojeného telesa.²

Zrýchlenie pohybu častíc sme už ale videli aj v klasickej fyzike, tam ho interpretujeme práve ako ohrievanie. Dodané teplo je teda práve rovné pridanej energii častíc, ktorá je jednoducho $(M - 2m)c^2$. Už len potrebujeme tepelnú kapacitu ocele³ $c_m = 466 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ a získanú energiu na kilogram

$$u = \frac{(M - 2m)c^2}{2m} = \left(\frac{1}{2} \frac{M}{m} - 1\right) c^2 = \left(\frac{\sqrt{2 + \frac{74}{\sqrt{969}}}}{2} - 1\right) c^2 \doteq 4,1 \text{ PJ}\cdot\text{kg}^{-1}.$$

Nakoniec len podelíme energetický prírastok kapacitou a získame

$$\Delta T = \frac{u}{c_m} \doteq 8,9 \text{ TK}.$$

Takýto výsledok si zaslúži krátky komentár, terakelviny nestretávame každý deň. Ukazuje to na naše predpoklady, ktoré sú veľmi nefyzikálne: aj keby pri zrážke nenastala jadrová reakcia, každopádne by sme namiesto pevného objektu pozorovali oblak častíc rozlietajúci sa na všetky strany.

Poznámky k riešeniam

Najčastejšia chyba bola neuvažovanie zmeny pokojovej hmotnosti pri nepružnej zrážke⁴. Chválim každého, kto na to nezabudol a menovite Martina Štykse, ktorý sa ako jediný dopracoval ku správne výsledku.

Veľa ľudí úplne zabudlo na relativitu alebo nesprávne skladalo rýchlosti. Naopak, zopár riešiteľov riešilo všeobecnejší prípad s koeficientom reštitúcie pri zrážke.

Ján Pulmann
janci@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.

²Teraz by ste sa mali spýtať otázku, prečo meriame relativistickú a nie pokojovú hmotnosť atómov v látke? Odpoveď je v spôsobe merania hmotnosti: väčšinou položíme teleso na váhu a meriame tlak, ktorým na ňu pôsobí. Ak sa teda zvýši relativistická hmotnosť častíc, rovnako sa zvýši aj ich hybnosť, a teda aj hybnosť, ktorú budú predávať váhe. Dobrá otázka je, ako do toho vstupuje gravitácia. Odpoveď je, že gravitácia pôsobí na celkovú energiu, práve vďaka čomu sa teleso zohriatím neodrazí od svojej podložky.

³http://en.wikipedia.org/wiki/Heat_capacity#Table_of_specific_heat_capacities

⁴Ak by sme chceli znieť pompézne, povieme, že aj teplo má zotrvačnosť