Úloha IV.P ... to pravé gravitační zrychlení

5 bodů; průměr 3,15; řešilo 40 studentů

Faleš chtěl v Praze (V Holešovičkách 2 v přízemí) určit hodnotu gravitačního *zrychlení z experimentu, kdy pouštěl kulatý míček z výšky pár metrů na Zemi. Rozmyslete si, jaké korekce musel při zpracování měření zahrnout. Poté navrhněte vlastní experiment na stanovení gravitačního zrychlení a diskutujte jeho přesnost.*

Karel přemýšlel nad rozdílem mezi tíhovým zrychlením a gravitační silou.

Nejdůležitější chyby, které musí vzít Faleš v úvahu, jsou chyby způsobené neideálností jeho přístrojů a neideálností jeho samotného. Jeho stopky totiž nedokáží přesně změřit čas a přesto, že má rychlost reakcí jako buddhistický mnich, nedokáže přesně určit, kdy míček doopravdy spadl. Posuďte sami, zda byste dokázali vypnout stopky například do tisíciny sekundy po pádu. Obvykle můžeme uvažovat, že stopky jsme schopni zastavit s přesností na 0,2 s, což je, jak ještě uvidíme, pro zahrnutí korekcí docela dlouhý časový úsek.

Musíme si nejprve uvědomit, co Faleš ve skutečnosti měří a co je to gravitační zrychlení. Gravitační zrychlení je zrychlení způsobené gravitací Země na jejím povrchu. Když ale měříme pád míčku, hrají roli i jiné efekty než hmota planety. Nejdůležitější je odstředivá síla na povrchu Země. Kombinaci odstředivého a gravitačního zrychlení se říká tíhové zrychlení. Faleš tedy změří zrychlení tíhové.

Vypočtěme nyní vliv rotace naší planety. Země se otočí 1,00krát za 24 hodin (skutečná hodnota není přesně 1,00, nýbrž spíše 1,002 7krát, nám ovšem stačí takto zaokrouhlená hodnota), což odpovídá úhlové rychlosti $\omega = 7{,}29 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$. Souřadnice MFF UK V Holešovičkách jsou zhruba $50°6'$ S, $14°26'$ V, my ovšem budeme potřebovat pouze zeměpisnou šířku. Dále bychom potřebovali co nejpřesněji určit vzdálenost tohoto místa od středu Země. Zemi budeme považovat za homogenní kouli (přestože ve skutečnosti se jedná o nehomogenní elipsoid) a vzhledem k tomu, jak náročné by bylo zahrnout do úvah veškeré nehomogenity, smíříme se s tím, že korekce nebude úplně přesná. Vzdálenost od středu jsme schopni určit s přesností zhruba na 10 km, což při uvažovaném poloměru Země 6 378 km není ani setina a vzhledem k tomu, že korekce bude také maximálně v řádu setin, tak nám tato nepřesnost (která by ve výsledku byla jedna desetitisícina) nebude vadit. Pro vypočtení odstředivého zrychlení potřebujeme určit vzdálenost od osy otáčení Země, což, pokud budeme zeměpisnou šířku brát jako úhel φ, bude $R_\mathrm{Z}\cos\varphi$. Ještě zbývá udělat průmět tíhového zrychlení do směru gravitace, jelikož takto vypočtené zrychlení bude mířit směrem od osy rotace. Pro průmět musíme hodnotu opět vynásobit členem $\cos\varphi$. Odstředivé zrychlení nyní můžeme tedy vypočítat jako

$$a_\mathrm{od} = \omega^2 (R_\mathrm{Z}\cos^2\varphi) = 0{,}014\,0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,.$$

Aby tíhové zrychlení přepočítal na gravitační, musí tedy připočíst tuto hodnotu a_od.

Dále musí samozřejmě uvažovat odpor prostředí. Ač to často pro zjednodušení uvažujeme, nepohybujeme se ve vakuu. Proti míčku působí odpor vzduchu. Odpor prostředí lze určit pomocí Newtonova vztahu. V tomto vztahu se celkem rozumně očekává, že pro překonání odporové síly musí těleso vykonat stejnou práci, jako je kinetická energie vzduchu, kterou vzduch získal od prolétajícího tělesa. Odporovou sílu tedy určíme ze vzorce

$$F_\mathrm{odp} = C\frac{1}{2}\varrho v^2 S\,,$$

kde C je součinitel odporu (pro kouli je roven 0,5) a S obsah průřezu kolmého na směr pádu. Pro přesné vyřešení musíme vyřešit pohybovou rovnici

$$ma = -mg + C\frac{1}{2}\varrho v^2 S\,,$$

jejíž řešení s počátečními podmínkami $v(0) = 0$, $y(0) = h$ je

$$y(t) = h - \frac{v_\infty^2}{g}\ln\left(\cosh\left(\frac{gt}{v_\infty}\right)\right)\,, \tag{1}$$

kde jsme substituovali za limitní rychlost

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2mg}{\varrho CS}}\,.$$

Toto je již ovšem poměrně náročná matematika.

My známe dobu pádu, tedy čas t_0, pro který platí $y(t_0) = 0$. Z rovnice (1) pak dokážeme po vrácení substituce vyjádřit zrychlení

$$g = \frac{2m}{\varrho CS t_0^2}\operatorname{argcosh}^2\left(\mathrm{e}^{(h\varrho CS)/(2m)}\right)\,.$$

Při tíhovém zrychlení $9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ by míček o hmotnosti 100 g a průměru 5 cm při hustotě vzduchu $1{,}29\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ padal ze dvou metrů 0,639 9 s. Kdyby gravitační zrychlení počítal se zanedbáním odporu vzduchu podle vzorce

$$g = \frac{2h}{t_0^2}\,,$$

získal by výsledek $9{,}769\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, což se celkem znatelně liší od skutečného v uvažované situaci. Pokud tedy Faleš chce počítat s přesností na více než dvě desetinná místa, měl by počítat i s odporem vzduchu.

Přítomnost atmosféry nám přináší i další problémy – například působící vztlaková síla. Ta bude po celou dobu konstantní a dle Archimédova zákona je rovna tíze kapaliny tělesem vytlačené, tedy

$$F_{\mathrm{vz}} = V\varrho g\,.$$

Pohybová rovnice přejde na tvar

$$ma = -mg\left(1 - \frac{V\varrho}{m}\right) + C\frac{1}{2}\varrho v^2 S\,.$$

To znamená, že výsledný vzorec pro g je potřeba vydělit hodnotou $1 - V\varrho/m$. Pro představu je toto pro náš míček zhruba 0,999. Uvědomme si ale, že pokud zvážíme míček na vzduchu, bude samotné vážení zatíženo chybou vážení na vzduchu (kilo peří bude na váhách „lehčí“ než kilo železa). Ve vahách je vždy malé vlastní závaží – etalon. Jelikož i na etalon působí vztlaková síla, naměřená hmotnost je závislá na hustotě tohoto etalonu. Pro skutečnou hmotnost m poté platí vzorec:

$$m = \frac{1 - \frac{\varrho_a}{\varrho_c}}{1 - \frac{\varrho_a}{\varrho}}W\,,$$

kde ϱ je hustota našeho závaží, ϱ_a je hustota vzduchu a ϱ_c je hustota etalonu. Předpokládejme ale, že Faleš si míček zvážil v některé z laboratoří MFF UK a zná hmotnost s vysokou přesností (mohl ho například změřit pod vývěvou ve vakuu).

Zanedbatelný vliv může mít i Slunce, Měsíc a ostatní planety Sluneční soustavy, ale tento vliv je opravdu pouze zanedbatelný. Koho by výpočet této korekce zajímal, může se podívat na vzorové řešení úlohy III.1 z 26. ročníku.

Uvědomme si také, že gravitační zrychlení se mění z výškou, ve které ho měříme. Pro ilustraci si spočtěme, jak rychle se gravitační zrychlení mění dle Newtonova gravitačního zákona. Zrychlení dle Newtonova gravitačního zákona bude

$$F_\mathrm{G} = G\frac{M}{R^2}\,,$$

kde $G \approx 6{,}673\,84 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3{\cdot}kg^{-1}{\cdot}s^{-2}}$ a R je vzdálenost od středu planety (tento vzorec můžeme použít pouze nad povrchem planety, nikoliv v jejím nitru). Pokud budeme počítat s poloměrem Země $6\,378\,\mathrm{km}$, tak nám je asi hned zřejmé, že 1 nebo 2 metry nebudou hrát výrazný rozdíl, ten bude zhruba $3 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

Celkově tedy můžeme říci, že zdaleka největší vliv mají na měření gravitačního zrychlení odporové síly působící na padající míček. Pak následují korekce z tíhového zrychlení na zrychlení gravitační. Ostatní vlivy jsou zanedbatelné.

Klasickým experimentem pro měření tíhového zrychlení je měření periody kyvadla. Mějme závaží kmitající s malými výchylkami a periodou T. Pro tuto periodu platí vztah $T = 2\pi\sqrt{J/(mgR)}$, kde J je moment setrvačnosti tělesa vůči ose otáčení, R je vzdálenost těžiště od osy otáčení a m je hmotnost tělesa.

Při výpočtu momentu setrvačnosti ovšem může být zanesena relativně velká chyba. Proto se například v praktiku u nás na Matfyzu měří tíhové zrychlení pomocí takzvaného reverzního kyvadla. Pro objasnění potřebujeme zavést veličinu $l_\mathrm{r} = J/(mR)$ a budeme jí říkat *redukovaná délka kyvadla.* Po zavedení této veličiny můžeme psát

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_\mathrm{r}}{g}}\,.$$

Redukovanou délku můžeme ovšem určit i bez znalosti momentu setrvačnosti kyvadla. V případě, že těleso kmitá kolem dvou rovnoběžných os se stejnou periodou, tak vzdálenost těchto dvou os je právě naše redukovaná délka. Tíhové zrychlení bychom poté mohli dopočíst ze vzorce

$$g = l_\mathrm{r}\frac{4\pi^2}{T^2}\,.$$

Jak takové reverzní kyvadlo vypadá si můžete prohlédnout například na videu.[1] Nejprve se kyvadlo otáčí kolem jedné osy a poté je otočeno. Čočky na kyvadle jsou následně nastaveny tak, aby perioda kmitů kolem obou os byla stejná.

Za běžných podmínek jsme schopni redukovanou délku kyvadla určit s přesností zhruba $\pm 0{,}1\,\mathrm{cm}$. Pokud bude redukovaná délka například $0{,}5\,\mathrm{m}$, je tedy chyba $0{,}2\,\%$. Dobu kmitu jsme schopni určit velmi přesně, použijeme-li světelnou závoru pro zapnutí a vypnutí stopek. Světelná závora je mechanizmus, který kontroluje, zda jde do detektoru světlo. Světlo umístíme tak, aby svítilo do detektoru skrz rovnovážnou polohu kyvadla. Ve chvíli, kdy kyvadlo projde

[1] `http://youtu.be/6wFIxz2p_Cs`

touto rovnovážnou polohou, dráha paprsků jdoucích do detektoru je přerušena a světelná závora spustí stopky. Počkáme na deset period kyvadla a ve chvíli, kdy kyvadlo znovu projde rovnovážnou polohou, stopky se zastaví. Je důležité, že čas měříme v rovnovážné poloze. V rovnovážné poloze má totiž kyvadlo největší rychlost. Tím pádem dokážeme velmi přesně vždy určit, že je kyvadlo ve stejné poloze. Kdybychom chtěli měřit od okamžiku, kdy má kyvadlo největší výchylku, bude kyvadlo bránit paprskům v průchodu po mnohem delší čas. Bude tedy možné, že se stopky budou spouštět v různých polohách. Světelná závora čas změří poměrně přesně, ale kdybychom měřili ručně, bylo by opravdu obtížné určit, zda se kyvadlo opravdu nachází v té samé poloze, ve které jsme stopky spustili.

Pokud měříme veličinu g závislou na veličinách l_r a T, určíme celkovou chybu měření podle vzorce

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial l_\mathrm{r}}\sigma_{l_\mathrm{r}}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T}\sigma_T\right)^2}\,,$$

kde σ vždy značí chybu veličiny, která je uvedena v dolním indexu. Po vypočtení získáme vzorec

$$\sigma = \sqrt{\frac{16\pi^4}{T^4}\sigma_{l_\mathrm{r}}^2 + l_\mathrm{r}^2\frac{64\pi^4}{T^6}\sigma_T^2}\,.$$

S pomocí světelné závory budeme schopni určit T s přesností zhruba na tisícinu sekundy. Doba kmitu bude zhruba 1,5 s. Dosaďme tedy do vzorce pro výpočet chyby a dostaneme

$$\sigma \doteq 0{,}02\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}\,,$$

přičemž pouze minimum chyby je způsobeno nepřesností určení času (pokud bychom čas měřili úplně přesně, byla by chyba $0{,}017\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$). Vidíme, že největší problém nám tvoří nepřesnost způsobená určením l_r. Pokud bychom měřili čas ručně, můžeme očekávat, že stopky zastavíme s přesností na jednu desetinu sekundy (0,1 s). Pokud změříme 10 period, rozloží se chyba mezi jednotlivé periody a jednu periodu tedy budeme schopni určit s přesností 0,01 s. V tuto chvíli již přestane být chyba způsobená nepřesností měření času zanedbatelná – celkově budeme schopni g určit s přesností $\pm 0{,}12\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Tomáš Bárta
tomas@fykos.cz