

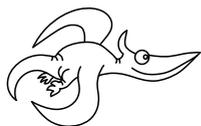
Úvodem

Milí řešitelé,

už nějaký ten pátek tu zase máme školní rok, ale není třeba kvůli tomu plakat, protože s ním jsou tu i FYKOSí série. První z nich je již za námi a je čas vrhnout se na další. Mimo to je podzim bohatý i na jiné FYKOSí akce, někteří z vás mají jistě mnoho celoživotních zážitků z proběhlého soustředění (Copak zážitky, ale jmelí!) a stále se můžeme těšit na TSAF. Probíhají také již tradiční přednášky¹ a neměli byste zapomenout ani na Fyziklání online,² které se uskuteční ve čtvrtek 4. 12. 2014, nicméně už teď můžete dávat dohromady svůj tým a registrovat se.

Ať se daří a hodně dobrých nápadů přeji

Organizátoři



Zadání II. série



Termín uploadu: 2. 12. 2014 20.00

Termín odeslání: 1. 12. 2014

Úloha II.1 ... svatá Anna chladna z rána

2 body

V chladném ranním oparu odcházáte z domu a zahradní branka funguje tak, jak má – na zmáčknutí kliky se otevře, po zavření a puštění kliky zůstane zavřená, zaklapnutá. Odpoledne se vracíte a říkáte si, který lump zase nezavřel... A ejhle, ono zavřít nejde. Ani po stisknutí kliky nezaleze ocelový jazýček natolik, aby prošel kolem hliníkového rámu. Branka je také z hliníku. Kde je problém? Co zapomněl výrobce při navrhování branky uvažovat? Navrhněte, jaké rozměry by měla mít branka při 20 °C, jestliže uvažujeme, že teplota během roku neklesá pod –30 °C a nepřesahuje 50 °C.

Úloha II.2 ... požívačná buňka

2 body

Odhadněte na základě znalostí pouze makroskopicky měřitelných veličin, počtu buněk v lidském těle a počtu částic v látkovém množství jednoho molu, kolik molekul kyslíku „spotřebuje“ denně jedna lidská buňka. Potřebné údaje k výpočtu si naleznete a svoje zdroje nezapomeňte citovat.

Úloha II.3 ... nedočkavé jádro

4 body

Jádro bismutu ²⁰⁹Bi sedí nedočkavě v pokoji na místě. V jednom okamžiku to nevydrží a rozpadne se. Zůstane nám z něj jádro thalia ²⁰⁵Tl a od něho letí pryč α částice. Jakou rychlostí by se pohybovala α částice, pokud by se energie uvolněná při rozpadu přeměnila pouze na její kinetickou energii? Jakou rychlostí se bude α částice pohybovat ve skutečnosti? Výsledky

¹<http://fykos.cz/akce/prednasky>

²<http://online.fyziklani.cz>

porovnejte. Klidové hmotnosti atomů jsou $M = m_{209\text{Bi}} = 208,980\,399\text{ u}$, $M' = m_{205\text{Tl}} = 204,974\,428\text{ u}$, $m = m_{4\text{He}} = 4,002\,602\text{ u}$. Nezapomeňte ověřit, jestli není potřeba používat relativistické vztahy.

Úloha II.4 ... Boeing

4 body

Uvažujte pneumatiku válcovitého tvaru o poloměru R s vnitřním otvorem o poloměru r šířky d huštěnou na tlak p . Pneumatiku zatížíme silou F . Při tomto zatížení se změní tvar pneumatiky z válce na válcovou úseč se stejným vnitřním i vnějším poloměrem. Předpokládejte, že se teplota pneumatiky zatížením nezmění. Určete plochu styku pneumatiky s vozovkou.

Úloha II.5 ... gravitační manévry

5 bodů

Máme družici, která obíhá Slunce po eliptické dráze. Pokud zmenšíme rychlost v afelu v_a na $4/5$ původní rychlosti (tj. na $4/5v_a$), jak se změní rychlost družice v periheliu? Vyjádřete novou rychlost za pomoci původní rychlosti v_p a parametrů elipsy (hlavní poloosa a a relativní excentricita ε).

Úloha II.P ... problém obchodního cestujícího

5 bodů

Když se začínaly prosazovat digitální mobilní telefony, byl často problém se příjmem hovorů v automobilu. Nyní se to nejvíce týká vlaků. Jaké faktory ovlivňují přenos dat v GSM síti a jak mohou ovlivnit dostupnost signálu operátora? Jak by se proti tomu dalo bojovat?

Úloha II.E ... vodní rozpad

8 bodů

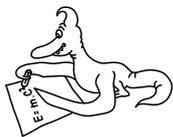
V jaké hloubce pod vodovodním kohoutkem se rozpadá pramínek vody na kapičky? Jak to závisí na průtoku vody?

Úloha II.S ... numerická

6 bodů

- Délkové veličiny zadáváme v metrech, časové v sekundách a hmotnostní v kilogramech. Úhlovou rychlost Ω zadáváme v radiánech za čas. Když vezmete ze seriálu rovnice pro pohyb míče, nachází se v nich ale ještě tři parametry: α , β , γ . Jaké jsou jejich rozměry?
- Uvažujte volný pád míče s $\Omega = 0$ a $v_x = 0$. Existuje pak konečná rychlost v_z^t , při které se vyrovná třecí síla a tíhové zrychlení a pád míče už nezrychluje.
 - Určete tuto rychlost pomocí parametrů z rovnic pohybu pro míč.
 - Obraťte tuto rovnost tak, aby vyjadřovala β . v_z^t se dá dobře měřit a pro fotbalový míč o hmotnosti $m = 0,5\text{ kg}$ je typicky okolo $25\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Kolik je pak β ?
- Vyjádřete si počáteční v_x a v_z pomocí úhlu výstřelu φ při fixní počáteční rychlosti $v = 10\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Sepište program podle seriálu a vyzkoušejte měnit počáteční podmínky a parametry následovně
 - Zvolte nějaké kladné β , vypněte rotaci $\Omega = 0$ a zjistěte, zda je úhel výstřelu, pod kterým doletí míč nejdál, menší nebo větší než 45° . Svoje zjištění demonstруйте pomocí grafů letu.
 - Zvolte nenulové kladné α s numerickou hodnotou v daných jednotkách stejnou jako β , $\gamma = 0,01$ (v daných jednotkách) a $\Omega = \pm 5\text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$. Jak se v daných případech změní optimální úhel výstřelu?

- c) *Bonus* Jak byste tedy nejdále dohodili kriketákem? Je náš model pro tuto úvahu dostatečný?



Řešení I. série

Úloha I.1 ... spotřeba antihmoty

2 body; průměr 1,69; řešilo 132 studentů

Jakou hmotnost antihmoty bychom potřebovali ročně, abychom pokryli spotřebu elektrické energie České republiky? Normální hmoty máme dost a uvažujme, že by se nám energii podařilo na elektrickou převádět beze ztrát. Karel se díval na Anděly a Démony od Dana Browna.

Pro zjištění, jaké množství antihmoty by bylo potřeba na roční pokrytí spotřeby elektrické energie České republiky, je třeba vyhledat alespoň přibližný údaj o tom, kolik tato spotřeba vlastně činí. Podle internetových zdrojů³ se pro rok 2013 jednalo přibližně o $E = 70\,177\text{ GWh} = 2,53 \cdot 10^{17}\text{ J}$.

Víme, že při anihilaci hmoty s antihmotou dojde k jejich úplné přeměně na energii dle notoricky známého vztahu $E = mc^2$, kde m je hmotnost toho, co anihiluje a c je rychlost světla. Nesmíme zapomenout pouze na to, že v našem případě m představuje součet hmotností antihmoty i hmoty, čili to, co vlastně chceme znát (jelikož se ptáme pouze na hmotnost antihmoty), bude $x = m/2$. Máme tedy

$$x = \frac{E}{2c^2},$$

číselně $x = 1,40\text{ kg}$.

Na pokrytí roční spotřeby elektrické energie ČR by bylo teoreticky potřeba asi 1,40 kg antihmoty.

Kristína Nešporová
kiki@fykos.cz

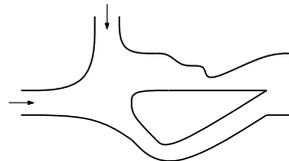
Úloha I.2 ... proudivé proudnice

2 body; průměr 1,44; řešilo 108 studentů

Nakreslete do obrázku proudnice. Do obou otvorů s šipkou vtéká stejné množství vody, všechna voda pak vytéká jediným, třetím otvorem. Proudění je ustálené a probíhá dostatečně pomalu, abychom ho mohli považovat za nevířivé. Při kreslení dbejte na pravidla, jimiž se tvar proudnic řídí a tato pravidla napište jako komentář k obrázku. Neočekáváme, že bude problém spočítán.

Poznámka Kreslete do většího obrázku dostupného z webu.

Karel, inspirace tím, že četl něco o odporu a proudnicích.



Nejprve si musíme uvědomit, co je to vlastně proudnice. Za předpokladu, že tekutina, ve které proudnice pozorujeme, je nestlačitelná a proudění v ní je ustálené (jako v našem případě, kdy vodu považujeme za nestlačitelnou), potom je proudnice trajektorie pohybu částice v proudici

³<http://energostat.cz/elektrina.html>

kapalině. Každým bodem proudící kapaliny prochází právě jedna proudnice a vektor rychlosti částice je vždy tečnou k příslušné proudnici.

Když nyní víme, co to proudnice je, musíme si uvědomit, že platí několik základních podmínek, které v žádném případě nesmí být porušeny:

- Proudnice se nesmí vzájemně křížit ani dotýkat, protože částice kapaliny skrz sebe nemohou prostupovat (nesmí se dotýkat ani okrajů, jimiž je kapalina ohraničena)
- Proudnice jsou spojité a „hladké“ křivky, rozhodně na nich nemohou být ostré zlomy (kapalina zatáčí postupně, ne skokově).
- Proudnice nikde nevznikají ani nezanikají, na začátku vstoupí do zkoumaného prostoru a stejný počet jich musí vystoupit. Jinak by to znamenalo, že se někde kapalina ztrácí a jinde se tvoří, když jako v našem případě neuvažujeme kapacitu prostředí (tzn. že by se někde mohla voda hromadit, aniž by odtud odtékala). Proudnice také nikdy neutvoří uzavřenou křivku (to by odpovídalo víru v kapalině).
- V užších místech jsou proudnice více nahuštěné, což odpovídá větší rychlosti proudění kapaliny.

Každému je jasné, že nemůžeme do obrázku zakreslit všechny proudnice (je jich příliš mnoho). Počet zakreslených proudnic proto volíme tak, aby byl obrázek přehledný a zároveň měl dostatečnou vypovídací hodnotu, přičemž proudnice musíme na vstupu do zkoumané oblasti rovnoměrně rozdělit, čímž zvyšujeme vypovídací hodnotu nákresu. V našem případě jsme zvolili 8 proudnic, což je tak akorát (s menším počtem už by nákres neměl moc velkou vypovídací hodnotu a s větším počtem už začíná být nepřehledný).

Poslední důležitá věc je, že když každým otvorem přitéká stejné množství vody, musí každým otvorem také vstupovat stejné množství proudnic (protože ty jsou na začátku rovnoměrně rozloženy).

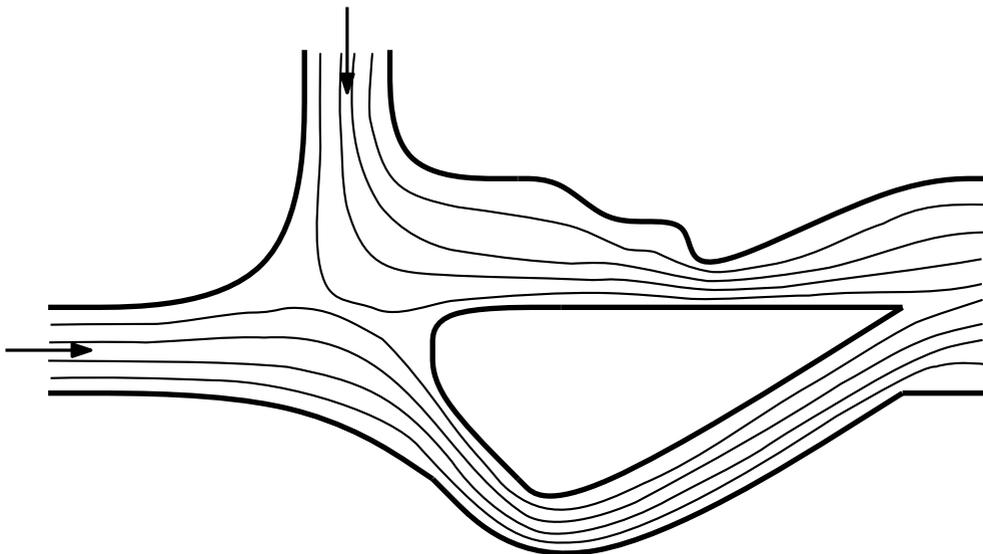
Obtékání předmětů kapalinou je obecně velmi těžká úloha, není vůbec snadné vyřešit, jak přesně budou vypadat proudnice v zatáčkách nebo v okolí překážek, ale to ani nebylo smyslem této úlohy. Pro udělení plného počtu bodů stačí, když se při kreslení obrázku budete držet všech pravidel, která jsme doposud zmínili.

Nyní už můžeme začít kreslit obrázek. Proudnice kreslíme od ruky, žádná velká přesnost se nevyžaduje. Výsledek může vypadat například jako na obrázku 1.

V obrázku 1 je ostrůvek vprostřed obtékán rovnoměrně (nad ním i pod ním vedou 4 proudnice), je možné, že ve skutečnosti by tomu tak nebylo (provedení přesného výpočtu nebo simulace by bylo velmi náročné), proto bude za správné řešení považováno i nerovnoměrné obtékání ostrůvku, pokud se dodrží všechna už zmíněná pravidla.

Při naší úvaze jsme nebrali v úvahu tření kapaliny o hrany (uvažujeme, že je velmi malé a jeho efekt můžeme tedy zanedbat), viskozitu kapaliny (předpokládáme, že je malá a rozměry trubice na obrázku dostatečně velké, aby se její vliv neprojevil), povrchové napětí kapaliny (jeho efekty budou velmi malé a také je zanedbáme) a mnoho dalších pro nás nedůležitých vlastností reálných kapalin.

Michal Nožička
nozicka@fykos.cz



Obr. 1: Znázornění vybraných proudnic.

Úloha I.3 ... zrychlujeme

3 body; průměr 1,75; řešilo 100 studentů

Vysvětlete, proč a jak se odehrají následující situace:

- V cisterně tvaru kvádrů s vodou plove na hladině míček. Popište pohyb míčku, začne-li se cisterna rozjíždět s konstantním zrychlením dostatečně malým, aby voda nepřetekla přes okraj.
- V cisterně tvaru kvádrů naplněné vodou se vznáší balónek naplněný vodou. Popište pohyb balonku, začne-li se cisterna rozjíždět s konstantním zrychlením dostatečně malým, aby voda nepřetekla přes okraj.
- V uzavřeném autobusu se vznáší u stropu balónek. Popište jeho pohyb, začne-li se autobus rozjíždět s konstantním zrychlením.

Dominika a Pikoš na zkoušce z fyziky.

Abyste mohli vyřešit tuto úlohu, je třeba znát 1. Newtonův zákon, jenž zní: *Jestliže na těleso nepůsobí žádné vnější síly nebo výslednice sil je nulová, pak těleso setrvává v klidu nebo v pohybu rovnoměrném přímočarém.* Tedy jestliže se snažíme změnit stav tělesa z klidu nebo z pohybu rovnoměrného přímočarého, působí proti nám setrvačná síla tělesa. Úloha nám nabízí tři různé situace.

V prvním případě balónek plove na hladině cisterny s vodou. Vzhledem k tomu, že platí Archimédův zákon, je jeho hustota nižší než hustota vody, a tedy zůstane po celou dobu na hladině. Hladina se pod vlivem konstantního zrychlení nakloní tak, aby byla kolmá na výslednici tíhového zrychlení a zrychlení působící proti směru pohybu. Balónek bude v indiferentní poloze a nedojde k dalšímu pohybu. Předpokládá se, že nedošlo k výraznému „šplouchnutí“ v cisterně při rozjíždění.

Druhá část úlohy nám zadává balónek, který se vznáší v kapalině v cisterně zaplněné po okraj. Dle Archimédova zákona má vznášející se balónek a kapalina identickou hustotu. Z toho vyplývá, že setrvačná síla působí stejnou silou jak na balónek, tak i na okolní prostředí. Balónek naplněný vodou můžeme brát jako element kapaliny (velkou molekulu vody). A tak ani v tomto případě nedojde k pohybu.

V poslední části úlohy se balónek vznáší u stropu v uzavřeném autobusu. Je tedy správně předpokládat, že má nižší hustotu nežli okolní vzduch. Začne-li se autobus rozjíždět s konstantním zrychlením, můžeme si představit, že potenciálová hladina vzduchu se stejně jako v prvním případě nakloní a balónek bude mít tendenci stoupat kolmo na ni, tedy bude tlačěn dopředu.

Ivo Vinklárek
ivo@fykos.cz

Úloha I.4 ... zkáza Titaniku

4 body; průměr 3,12; řešilo 99 studentů

Náry si vždy přál mít loďku, a tak si jednoho krásného dne pořídil jednu ve tvaru kvádrů bez horní podstavy (jako vana) s vnějšími rozměry a , b , c a tloušťkou stěny d , která byla vyrobena z voňavého dřeva o hustotě ρ (větší než hustota vody). Druhého krásného dne loďku spustil na vodu, ale zjistil, že má na dně díрку, kterou voda přitéká s průtokem Q_1 . To bylo nemilé, a protože je mužem činu, začal počítat, za jak dlouho se mu do loďky začne valit voda vrchem. Stejnou otázku klade i tato úloha. Zvažte i situaci, kdy by Náry o hmotnosti m v loďce seděl a mezi výpočty zoufale vyléval vodu svou botou s průtokem Q_2 . Loďka je celou dobu vodorovně.

Kiki zaslechla o problému s tím, že skoro všechny úlohy vymýšlí Karel.

Na Náryho loďku působí dve důležité síly, gravitačná a vztlaková. Rovno vieme povedať, že loď sa bude postupne ponárať, až kým sa nedostane jej horný okraj na úroveň hladiny. V tomto momente je vztlaková síla rovná

$$F_{vz} = V \rho_{\text{voda}} g,$$

kde sme označili $V \stackrel{\text{def}}{=} abc$ vonkajší objem lode. Ak zanedbáme vertikálne zrýchlenie lode⁴, platí v tomto momente pre gravitačnú silu F_G

$$F_{vz} + F_G = 0. \quad (1)$$

Hmotnosť lode M sa skladá z dreva a natečenej vody. Drevo má hmotnosť⁵

$$\rho (abc - (a - 2d)(b - 2d)(c - d)) = \rho V_{\text{dreva}}.$$

Natečená voda v čase t váži jednoducho $Q_1 \rho_{\text{voda}} t$. Gravitačná síla je

$$F_G = g (Q_1 \rho_{\text{voda}} t + \rho V_{\text{dreva}})$$

a z podmienky (1) dostávame vzťah pre čas potopenia t_1

$$\rho_{\text{voda}} abc = Q_1 \rho_{\text{voda}} t_1 + \rho V_{\text{dreva}},$$

⁴Správne by pohybová rovnica vyzerala $F_{vz} + F_G = M a_{\text{hore}}$. My dúfame, že platí aproximácia $F_G \gg M a_{\text{hore}}$, čo sa stane napríklad pre malé Q_1 .

⁵Rozmer c sme si zvolili ako výšku lode. Uvedomte si, že vnútrajšok lode má vo vodorovných smeroch stenu hrúbky d na oboch stranách, no vo zvislom smere ho znižuje len dno.

alebo

$$t_1 = \frac{abc - \frac{\rho V_{\text{dreva}}}{\rho_{\text{voda}}}}{Q_1}.$$

Tiež vidíme, že ak je drevo príliš ťažké ($\rho V_{\text{dreva}} > \rho_{\text{voda}} abc$), loď sa hneď potopí. V prípade s Nárym na palube je pridaná tiaž mg , no prítok vody je len $Q_1 - Q_2$ (prípád $Q_2 \geq Q_1$ je triviálny). Náryho hmotnosť pridáme ku hmotnosti dreva a rovno môžeme teda napísať, že sa loď potopí za čas

$$t_2 = \frac{abc - \frac{\rho V_{\text{dreva}} + m}{\rho_{\text{voda}}}}{Q_1 - Q_2}.$$

Pre zaujímavosť ešte dodajme, že podmienka $t_2 > t_1$ sa dá upraviť na

$$m < \frac{Q_2}{Q_1} (\rho_{\text{voda}} abc - \rho V_{\text{dreva}}).$$

Ján Pulmann
janci@fykos.cz

Úloha I.5 ... tisícročná včela

5 bodů; průměr 2,09; řešilo 66 studentů

Spočítejte, jaký výkon potřebuje včela, aby se udržela ve vzduchu, a odhadněte, jak dlouho se vydrží najedená včela vznášet v konstantní výšce.

Michalovi vyplynulo z diskuze o kvadroptérách.

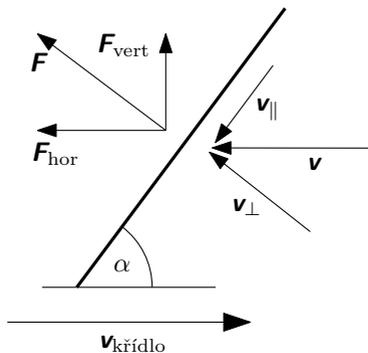
Ačkoli se v zadání hovoří o včele, mnozí z vás si jistě při čtení vzpomenli na v laických kruzích populární tvrzení, že není fyzikálně možné, aby čmelák létal. Jelikož čmelák zjevně je schopen letu, dalo by se usuzovat, že je s našimi poznatky v oblasti aerodynamiky něco v nepořádku. Nebudeme zde zastírat, že dynamika tekutin se jako obor fyziky stále rozvíjí a dokážeme v ní najít mnoho jevů, které nejsme schopni exaktně popsat – hlubší vhled do této problematiky dokáže poskytnout teorie chaosu, jak ukážou budoucí díly letošního seriálu. Mýtus o čmelákově však vznikl na základě několikaminutového výpočtu, který provedl během večere německý fyzik (jméno se nedochovalo) ve třicátých letech minulého století na přání jednoho biologa. Za předpokladu, že jsou křídla dokonale tuhá a hladká, došel k závěru, že čmelák není schopen vytvořit dostatečný vztlak, aby se mohl vznášet na místě. Přitom potřebné údaje o anatomii čmeláka na místě odhadl⁶.

My se zde pokusíme ukázat, že příčinou chybného závěru nebylo fyzikální zjednodušení, ale špatné odhady hodnot potřebných parametrů. Přitom zcela zanedbáme efekty tvorby vzdušných vírů a pohyby v mezní vrstvě vzduchu, která je „přilepená“ k tělesu (Magnusův jev). Tvorba vírů na jednu stranu spotřebovává energii generovanou máváním, na druhou stranu je možné při rychlých změnách úhlu náběhu tyto víry zužitkovat k vytvoření většího vztlaku. Ačkoli se tyto jevy významně projevují na výsledné efektivitě letu, musí být i v případech jejich zanedbání možné získat řádově správný výsledek. Jakmile budeme schopni určit vztlak křídel, snadno dopočteme i energetické ztráty spojené s jejich pohybem. Toliko úvod a nyní k vlastnímu výpočtu.

Nejprve si musíme uvědomit, jak se vlastně křídla včel během letu pohybují. Představa, že se v zásadě jedná o dvě horizontální plošky pohybující se nahoru a dolů, je mylná. Je zde důvod domnívat se, že tato chybná představa byla použita i při původním výpočtu, který dal

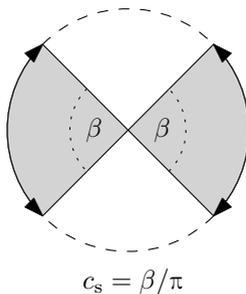
⁶<http://www.snopes.com/science/bumblebees.asp>.

za vznik mýtu. Před necelými sto lety neexistoval způsob, jak detailně zachytit pohyb hmyzích křídel během letu. V době vysokorychlostních kamer a Internetu stačí zadat na YouTube⁷ heslo „Bee in flight slow motion“ a ihned máme přístup k videím zachycujícím vznášející se včely v 7 000 FPS. Vidíme, že křídla mají velmi vysoký úhel náběhu α , tj. včela mává křídly spíše dopředu. Vertikální složka odporových sil tedy bude tvořit pouze malou část celkové síly, jak je znázorněno na obrázku 2. Úhel náběhu při pohybu vpřed uvažujeme konstantní. Pro zjednodušení výpočtu přitom budeme předpokládat (v souladu s videem), že se před zpětným pohybem křídla prudce převrátí tak, že úhel náběhu zůstane stále stejný. Také si zde uvědomme, že změna úhlu náběhu včely umožňuje regulovat svoji horizontální rychlost a setrvávat tak na místě.



Obr. 2: Rozbor sil působících na tuhé křídlo při mávání.

Dále si na videu všimneme, že křídla při rotačním pohybu v horizontální rovině kolem těla hmyzu neopisují plný úhel, ale jenom jeho část. Tuto skutečnost zohledníme koeficientem $c_s \leq 1$, který bude vyjadřovat opsaný úhel jako zlomek plného úhlu, viz obrázek 3. Další aproximací bude předpoklad konstantní úhlové rychlosti křídla, ačkoli ve skutečnosti se úhlová rychlost mění spíše harmonicky.



Obr. 3: Znázornění úhlu, který křídlo při mávnutí opíše (pohled shora).

⁷Zde vycházíme z videí <http://www.youtube.com/watch?v=2z9F6pVhR5o> a <http://www.youtube.com/watch?v=k3VPfZ6MHe8>.

Vztah pro výpočet vztlakové síly včelích křídel odvodíme následovně. Při rychlých kmitech včelích křídel je Reynoldsovo číslo Re nejméně v rádech tisíců, a uvážíme-li, že na Re lze pohlížet jako na poměr celkové změny hybnosti masy vzduchu a změny hybnosti molekul, můžeme psát

$$F = \dot{p} = \frac{d}{dt}(mv_{\perp}) = \frac{d}{dt}(\rho S v_{\perp} dx) = \rho S v_{\perp}^2 .$$

kde S je plocha křídla, ρ hustota vzduchu a v_{\perp} složka rychlosti křídla kolmá na jeho plochu. Ve vztahu by měl správně ještě vystupovat odporový koeficient, který je pro tenkou desku $> 0,6$. V dalších výpočtech ho pro jednoduchost položíme roven jedné.

S využitím velikosti celkové rychlosti v potom

$$F = \rho S v^2 \sin^2 \alpha .$$

Velikost horizontální složky síly budeme nazývat F_{drag} a vertikální F_{lift} a platí pro ně

$$\begin{aligned} F_{\text{lift}} &= \rho S v^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha , \\ F_{\text{drag}} &= \rho S v^2 \sin^3 \alpha . \end{aligned}$$

Celkový vztlak vypočteme integrací sil působících na infinitesimální elementy křídla přes délku křídla l . Dokonale tuhé křídlo má po celé délce úhlovou rychlost ω , takže rychlost daného elementu vzdáleného r od osy rotace je $v = \omega r$. Pro jednoduchost si nyní představujeme křídlo jako obdélník šířky b , potom $dS = b dr$. Element vztlakové síly je vyjádřen vztahem

$$dF_{\text{lift}} = b \rho \omega^2 r^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha dr .$$

Integrací přes obě křídla dostaneme

$$F_{\text{lift}} = 2 \int_0^l b \rho \omega^2 r^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha dr = \frac{2}{3} b \rho \omega^2 l^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha .$$

Pro lepší srovnání s pozorováními budeme pracovat s frekvencí kmitů $f c_s = \omega/2\pi$ (zde jsme vzpomněli na koeficient vyjadřující úhel opsaný křídly). Vztah pro velikost vztlakové síly pak nabude tvar

$$F_{\text{lift}} = \frac{8\pi^2}{3} b \rho c_s^2 f^2 l^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha .$$

Nyní požadujeme, aby se vztlak rovnal tíze včely Mg . Jelikož je frekvence mávání dobře měřitelným parametrem včelího letu, vyjádříme

$$f = \sqrt{\frac{3Mg}{8\pi^2 b \rho c_s^2 l^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha}} . \quad (2)$$

Zbývá nám už jen vyjádřit energetické ztráty způsobené máváním, tj. výkon potřebný k tomu, aby se včela vznášela. Pro element odporové síly máme

$$dF_{\text{drag}} = b \rho \omega^2 r^2 \sin^3 \alpha dr .$$

Budeme integrovat ztrátový výkon $F_{\text{drag}} v = F_{\text{drag}} \omega r$ přes obě křídla a dostaneme

$$P_{\text{loss}} = 2 \int_0^l b \rho \omega^3 r^3 \sin^3 \alpha dr = 4\pi^3 l^4 b \rho c_s^3 f^3 \sin^3 \alpha \approx \sqrt{\frac{M^3 g^3}{S \rho \cos^3 \alpha}} . \quad (3)$$

Tím jsme odvodili vztah potřebný pro vyřešení zadané otázky. Dostáváme se tak do části úlohy, která nemá s fyzikou mnoho společného – je potřeba zjistit hmotnost včely, rozměry včelího křídla, úhel jeho záběru a ještě odhadnout kalorickou hodnotu včelí potravy. Lze dohledat velké množství více či méně důvěryhodných zdrojů, ale i tak není možné dohledat uspokojivá čísla, protože parametry včelího těla se i u dělnic vnitrodruhově (*Apis mellifera*) dosti liší. Budeme převážně vycházet z informací na stránkách University of Michigan⁸, avšak získané údaje budeme brát pouze jako odhad.

- Délka křídla: $l = 12 \text{ mm}$
- Plocha křídla⁹: $S = 50 \text{ mm}^2$
- Hmotnost včely: $M = 100 \text{ mg}$
- Hmotnost nasbíraného pylu a nektaru: $m = 40 \text{ mg}$
- Kalorická hodnota včelí potravy¹⁰: $13\,000 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$
- Úhel náběhu: $\alpha \approx 50^\circ$

Pro výpočet doby, po kterou se včela vydrží vznášet, vyjdeme z poněkud naivní představy, že se bude živit nektarem, který sama nasbírala.¹¹ Za její hmotnost přitom budeme považovat aritmetický průměr hmotnosti těla a nasbíraného pylu (vzhledem k tomu, že provádíme velmi hrubé odhady, nedojde linearizací k žádné zásadní chybě). Hustota vzduchu při pokojové teplotě je s dostatečnou přesností $\rho = 1,2 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Nejprve ale spočítáme frekvenci kmitů včelích křídel. Z výše zmíněných videí odhadneme, že křídla kmitají s frekvencí 80 Hz–120 Hz.¹² Po dosazení odhadnutých hodnot potřebných veličin dostaneme na základě vztahu (2) výsledek

$$f \doteq 230 \text{ Hz}.$$

Vypočtená frekvence je oproti skutečnosti zhruba dvojnásobná. To je výborný výsledek, uvážíme-li, že jsme parametry včelího těla pouze velmi hrubě odhadovali. Z rovnice (3) určíme, že výkon potřebný ke vznášení je

$$P_{\text{loss}} \doteq 10 \text{ mW}.$$

A konečně z energie dostupné z 40 mg potravy získáme čas, po který se včela dokáže vznášet:

$$t_{\text{hover}} \doteq 14 \text{ h}.$$

To se může zdát jako lehce nadhodnocený odhad, ale jak už jsme zmínili, včela nekonzumuje nektar, který nese. Smysluplnější je spočítat hmotnost potravy potřebnou ke vznášení po jednotku času, vychází

$$\frac{m_{\text{food}}}{t_{\text{hover}}} = 3 \text{ mg}\cdot\text{h}^{-1}.$$

Pokud by včela pracovala osm hodin denně po jeden měsíc, spotřebovala by na let (předpokládejme pro teď, že je stejně energeticky náročný jako vznášení se) asi 0,8 g potravy. Přitom

⁸http://animaldiversity.ummz.umich.edu/accounts/Apis_mellifera/

⁹Vám obeznámeným s anatomíí blanokřídlých se může zdát divné, proč stále mluvíme o dvou křídlech, když má včela ve skutečnosti čtyři křídla. Uvažujeme prostě, že zadní křídlo je přiložené k přednímu, takže jejich celková plocha je součet mínus překryv a uvedená délka přísluší přednímu křídlu.

¹⁰Může se nezanedbatelně lišit podle kvetoucí rostliny. Zde zmíněný odhad se však zakládá na kalorické hodnotě medu podle stránky <http://en.wikipedia.org/wiki/Honey#Nutrition>.

¹¹Včelí dělnice je ve skutečnosti živena v úle a to pouze tak, aby dokázala létat řádově hodinu, přičemž podává extrémní výkony a zhruba po měsíci uhynie kvůli celkovému vyčerpání organismu.

¹²Různí autoři uvádějí i vyšší hodnoty (viz <http://hypertextbook.com/facts/1999/MichelleFinnegan.shtml>), je však pravděpodobné, že během letu musí včela kmitat křídly s vyšší frekvencí, než když se pouze vznášá.

za život vyprodukuje přibližně 0,5 g medu,¹³ takže úl našich fyzikálně zjednodušených včel by pracoval na dluh. Spotřeba však převyšuje výrobu méně než dvojnásobně, což je vzhledem k hrubosti našich odhadů velmi dobrý výsledek.

Komentáře k došlým řešením

Nadpoloviční většina řešitelů si neuvědomila, že včela není izolovaný systém a že při mávání křídly předává hybnost okolním masám vzduchu. Nebylo tedy možné položit vykonanou práci do rovnosti s rozdílem v potenciální energii během jedné půlperrody kmitů. Výsledek získaný tímto postupem dával odhad na maximální dobu vznášení několik měsíců, což je, jak nám zdravý rozum napoví, řádově špatně. Další častá chyba v řešení plynula z nepochopení definice mechanické práce. Celková práce je definována jako křivkový integrál ze skalárního součinu síly, která působí na zkoumaný bod (těleso), a dráhového elementu, po kterém se bod vlivem silového působení posunul. Není tedy možné do vztahu dosadit sílu, kterou působí křídlo na vzduch, a dráhu, kterou urazila včela během letu. Této chybě se šlo navíc snadno vyvarovat pozorným čtením zadání, v němž je uvedeno, že se včela pouze vznáší na místě, a tudíž nikam neletí.

Miroslav Hanzelka
mirek@fykos.cz

Úloha I.P ... Měsíc z Marsu

5 bodů; průměr 2,35; řešilo 69 studentů

Může být někdy vidět Měsíc z Marsu pouhým okem? Svou odpověď podpořte náležitými výpočty.
Kuba chtěl být stručný.

Úlohu si rozdělíme na několik podbodů:

- Bude Měsíc dostatečně jasný?
- Bude Měsíc úhlově rozlišitelný od Země?
- Nebude Měsíc přесvícen Zemí?
- Bude Měsíc při pozorování dostatečně úhlově vzdálen od Slunce?

Bude Měsíc dostatečně jasný?

Měsíc i Mars pro potřeby řešení posadíme na kruhové dráhy kolem Slunce ležící v jedné rovině. Označme si poloměr dráhy Měsíce a_1 , poloměr dráhy Marsu a_m a úhel mezi průvodiči těles α . Pak pro vzdálenost Měsíce a Marsu a_{1m} platí dle kosinové věty

$$a_{1m} = \sqrt{a_1^2 + a_m^2 - 2a_m a_1 \cos \alpha}.$$

Dále pro úhel φ sevřený mezi a_1 a a_{1m} platí

$$\varphi = \arccos \frac{a_1^2 + a_{1m}^2 - a_m^2}{2a_{1m}a_1}.$$

Poměr osvětlené části povrchu Měsíce viditelné z Marsu ku povrchu osvětlené části Měsíce při úplňku je roven

$$\frac{\pi - \varphi}{\pi}.$$

¹³<http://www.captainjohnshoney.com/trivia.htm>

Nyní můžeme sestavit Pogsonovu rovnici a zjistit hvězdnou velikost Měsíce při pozorování z Marsu. Pro světelný tok dopadající ze Slunce na jednotkovou plochu ve vzdálenosti Země platí

$$\Phi_S = \frac{L_S}{4\pi a_1^2},$$

kde L_S je celkový světelný výkon Slunce.

Pro světelný tok přicházející od Měsíce k Marsu platí

$$\Phi_1 = \Phi_S \pi R_1^2 \frac{A_1}{2\pi a_{1m}^2} \frac{\pi - \varphi}{\pi},$$

kde R_1 je poloměr Měsíce a $A_1 \doteq 0,136$ je Bondovo albedo Měsíce.¹⁴ Po dosazení do Pogsonovy rovnice dostaneme

$$m_1 = m_S + 2,5 \log \frac{2\pi a_{1m}^2}{A_1 R_1^2 (\pi - \varphi)},$$

kde m_S je zdánlivá hvězdná velikost Slunce při pozorování ze Země. Nyní můžeme zkusit nalézt minimum v závislosti na parametru α . Analytické nalezení minima by ale bylo velmi pracné, ne-li nemožné, určíme jej tedy numericky, například pomocí excelové funkce Řešitel. Po výpočtu vyjde $m_1 \doteq 1,4$ mag pro $\alpha \doteq 19,6^\circ$, což je dostatečná jasnost na pozorování okem.

Model, který jsme použili, je sice jednoduchý, v přírodě se ale nevyskytuje, proto zde ještě ukážeme fyzikálně správnější model.¹⁵ Pro rozptyl světla na měsíčním povrchu použijeme lambertovský model, který říká

$$I(\alpha) = I(0) \cos \alpha,$$

kde $I(0)$ je intenzita rozptýlená do stejného směru, ze kterého paprsek přišel, a α je fázový úhel, tedy úhel mezi dopadajícím paprskem a směrem, do kterého nás rozptyl zajímá.

Odvození pro náš případ je složité, omezíme se zde pouze na výsledný vzorec. Pro světelný tok dopadající z Měsíce na jednotkovou plochu ve vzdálenosti Marsu platí

$$\Phi_1 = \Phi_S \left(\frac{R_1}{a_{1m}} \right)^2 A_g \left[\left(1 - \frac{\varphi}{\pi} \right) \cos \varphi + \left(\frac{1}{\pi} \right) \sin \varphi \right],$$

kde R_1 je poloměr Měsíce a A_g je geometrické albedo Měsíce, což je poměr mezi skutečnou jasností tělesa při nulovém fázovém úhlu a jasností lambertovského disku o stejném průřezu.

Pro lambertovský rozptyl platí mezi geometrickým a Bondovým albedem vztah

$$A_g = \frac{2}{3} A_1.$$

Po dosazení do Pogsonovy rovnice a minimalizaci hvězdné velikosti dostaneme $m_1 \doteq 2,1$ mag pro $\alpha \doteq 43,5^\circ$.

¹⁴Zde uvažujeme zjednodušený model, kdy Měsíc rozptyluje světlo rovnoměrně do poloprostoru a plošná jasnost Měsíčního disku klesá rovnoměrně s rostoucím fázovým úhlem.

¹⁵Který ale v případě malých těles sluneční soustavy, kam řadíme i Měsíc, také není příliš přesný.

Bude Měsíc úhlově rozlišitelný od Země?

Úhlovou vzdálenost Měsíce od Země při pozorování z Marsu určíme jako

$$\psi \approx \frac{a_{z1}}{a_{lm}},$$

kde a_{z1} je vzdálenost Měsíce od Země. Po dosazení a převedení na stupně vyjde $\psi \doteq 8,4'$, což je více než rozlišovací schopnost lidského oka, která je běžně uváděna kolem $1'^{16}$

Nebude Měsíc přesvícen Zemí?

Musíme vyšetřit, jestli nebude Měsíc přesvětlen blízko stojící Zemí. Jde o efekt, kdy si vedle člověka držícího hořící svíčku stoupne člověk s reflektorem, a vy svíčku přestanete vidět. Protože tento efekt souvisí hlavně s fyziologií oka a se zpracováním obrazu v mozku, je takřka nemožné na tuto otázku podat kvantitativní odpověď.

Omezíme se proto na připodobnění situace k něčemu, co známe z pozemské oblohy, a podle toho odhadneme možnost pozorování. Pokud vypočítáme jasnost Země dle postupu uvedeného v předchozí sekci, dostaneme při albedu $A_e \doteq 0,306$ hvězdnou velikost Země $m_e \doteq -1,6$ mag, což je jasnost srovnatelná s jasností Siria. Jasnost Měsíce je přibližně srovnatelná s jasností Polárky. Úhel mezi Zemí a Měsícem je srovnatelný s dvojnásobkem úhlové vzdálenosti složek dvojhvězdy ε Lyr. Dle mého názoru by tedy Měsíc mohl být rozlišitelný, bude ale záležet na zraku pozorovatele a jeho zkušenostech.

Bude Měsíc při pozorování dostatečně úhlově vzdálen od Slunce?

Dále se ptáme, na jak temné obloze bude vlastně Měsíc pozorovatelný. Elongaci Měsíce¹⁷ vypočteme jako $\vartheta = 180^\circ - \alpha - \varphi$. Pro α z první části vyjde $\vartheta \doteq 41^\circ$. Na Zemi je astronomická noc definována jako doba, kdy je Slunce alespoň 18° pod obzorem, po tuto dobu je v podstatě dokonalá tma, co se týče rozptylu slunečních paprsků v atmosféře. Mars má daleko řidší atmosféru než Země, světlo se v ní tedy hůře rozptyluje. Pokud bychom si vhodně zvolili pozorovací stanoviště, bylo by možné, aby i za podmíněk „pozemské“ astronomické noci byl Měsíc až 23° nad obzorem, byl by tedy dobře pozorovatelný.

Komentář k došlým řešením

Mnoho z vás jako jediný relevantní parametr viditelnosti Měsíce uvažovalo úhlovou velikost Měsíce na obloze. Jde ale o parametr, který má zanedbatelný vliv. Ostatně všechny hvězdy na obloze mají daleko menší úhlový rozměr, než je rozlišovací schopnost oka, a přesto je vidíme jako bodové zdroje.

Lukáš Timko
lukast@fykos.cz

¹⁶Rozlišovací schopnost oka je dána hustotou tyčinek a čípků a dalšími fyziologickými vlastnostmi, ne difrakčním limitem, který je menší.

¹⁷Úhlovou vzdálenost od Slunce.

Úloha I.S ... nejistá

6 bodů; průměr 3,02; řešilo 48 studentů

1. Sepište si rovnice pro vrh v homogenním gravitačním poli (nemusíte je znovu řešit, ale musíte je umět správně použít). Navrhnete přístroj, který bude vrhat předmět dle vašeho uvážení a určete, pod jakým úhlem a jakou rychlostí tak činí. Můžete například vrhat pomocí pružiny, změřit její tuhost a hmotnost předmětu a vypočítat kinetickou energii, a tudíž i rychlost předmětu. V jakých rozmezích jste si s rychlostí a úhlem jistí? Dosadte tyto rozsahy do rovnic a ukažte, v jakých rozmezích v důsledku toho můžete očekávat vzdálenost dopadu od vašeho předmětu. Vrhnete svůj předmět daným přístrojem alespoň pětkrát a změřte vzdálenost dopadu – v jakých rozmezích jste si jistí danou vzdáleností? Ukažte, zda se vešly vaše výsledky do toho, co jste předpověděli. (Za odkaz na video s vrhem bonusový bod!)
2. Uvažte kyvadlo s výchylkou x , které se efektivně kývá harmonicky, ale frekvence jeho kyvů závisí na maximální výchylce x_0

$$x(t) = x_0 \cos[\omega(x_0)t], \quad \omega(x_0) = 2\pi \left(1 - \frac{x_0^2}{l_0^2}\right),$$

kde l_0 je nějaká délková škála. Myslíte si, že použijete kyvadlo z $x_0 = l_0/2$, ale ve skutečnosti jej vypouštíte z $x_0 = l_0(1 + \varepsilon)/2$. O kolik se liší argument kosinu od 2π po jedné námi předpokládané periodě? Po kolika periodách bude kyvadlo vychýlené na druhou stranu, než bychom předpokládali?

Tip Argument kosinu se bude v tu chvíli od předpokládaného lišit o víc než $\pi/2$.

3. Vezměte do ruky propisku a postavte ji na stůl na špičku. Proč spadne? A co rozhoduje o tom, že spadne spíš doprava, než doleva? Proč nedokážete předpovědět výsledek hodů kostkou, i když zákony fyziky by jej měly plně předurčit? Když hrajete kulečnick, je neschopnost dokončit hru pouze v jednom štouchu pouze v tom, že to nedokážete propočítat? Sepište svoje odpovědi a zkuste vyjmenovat fyzikální jevy ze života, které jsou v principu předpověditelné, ale ani dobrá znalost situace vám v předpovědi moc nepomůže.

1. Můžete si lehkou ověřit, že pokud vrhnete hmotný bod v homogenním gravitačním poli g s vertikální rychlostí v_y , dopadne na zem v čase

$$t = \frac{2v_y}{g}.$$

V horizontálním směru se však pohybuje rychlostí v_x a tudíž částice před dopadem dolétne do horizontální vzdálenosti $s = v_x t = 2v_x v_y / g$. Zároveň si ale můžeme složky rychlosti v_x , v_y vyjádřit pomocí velikosti rychlosti v a úhlu φ , který počáteční rychlost svírá s horizontálním směrem. Máme pak $v_x = v \cos \varphi$, $v_y = v \sin \varphi$ a s použitím $2 \sin \varphi \cos \varphi = \sin 2\varphi$ získáváme

$$s = \frac{v^2}{g} \sin 2\varphi.$$

Do tohoto vzorce pak můžete nasázet rozmezí své nejistoty a porovnávat s experimentem. Vidíte, že když máme chybu v rychlosti ε , posune se výsledek úměrně $(v + \varepsilon)^2 = v^2 + 2\varepsilon v + \varepsilon^2$, tj. pro hodně malá ε fakticky úměrně $2\varepsilon v$. U úhlu je to složitější, ale když si vykreslíte

funkci $\sin 2\varphi$ v radiánech, můžete zjistit, že posun δ v radiánech nezpůsobí nikdy v této funkci větší chybu než 2δ .

Největší problém je při experimentu s určením počáteční rychlosti v . Pokud máte například pružinu s tuhostí k , víte, že jejím stlačením o d a uvolněním získáte energii

$$E_p = \frac{1}{2}kd^2,$$

a s použitím vztahu pro kinetickou energii $E_k = mv^2/2$ jste mohli sestavit mrštidlo, které ideálně přesunulo všechnu energii pružiny do vrženého objektu. Změřením stlačení d byste pak získali jednoznačně rychlost v jako

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}}d.$$

Očekávatelný problém při mnoha realizacích takového pokusu ale je, že se energie všechna nepřesune do předmětu, ale ztratí se při výstřelu třením. Ve výsledcích tedy velmi pravděpodobně máte tendenci k nižším doletům.

2. Při $x_0 = l_0/2$ by se tedy kyvadlo mělo kývat s frekvencí $\omega_0 = 2\pi(1 - 0,25)$. Doopravdy se však kývá s frekvencí $\omega = 2\pi[1 - 0,25(1 + \varepsilon)^2]$. Jedna perioda je, když je argument kosinu násobek 2π , tedy když t je násobek $2\pi/\omega$. (Pozorný čtenář si jistě všimne, že v této úloze pracujeme s bezrozměrným časem.) Při předpokládané periodě bude však argument kosinu

$$2\pi \frac{\omega}{\omega_0} = 2\pi \frac{1 - 0,25(1 + \varepsilon)^2}{0,75} = 2\pi \left(1 - \frac{2\varepsilon + \varepsilon^2}{3}\right)$$

a argument se tedy od 2π liší o $2\pi(2\varepsilon + \varepsilon^2)/3$. Kyvadlo jsme tedy pustili s maximální výchylkou a postupně jej nalézáme po periodách níže a níže. V úloze se ptáme na to, kdy už při našich kontrolách nebude kyvadlo ani na té správné straně, ale už trochu vychýlené na druhou. Když se podíváme na graf kosinu, najdete tento bod, kdy funkce prochází na druhou stranu do záporných hodnot v bodě $\pi/2$. K výpočtu tedy stačí vzít $\pi/2$ a vydělit to získaným rozdílem. Zjistíme, že kyvadlo překročí tuto hranici vychýlenosti po

$$\frac{3}{4(2\varepsilon + \varepsilon^2)}$$

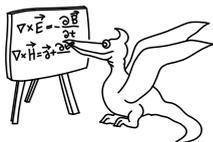
periodách, kde musíme zaokrouhlit nahoru, abychom dostali celočíselný počet period. Můžete si spočítat, že pokud bychom udělali třeba 10% chybu v měření a tudíž měli $\varepsilon = 0,1$, kyvadlo by se přechýlilo po čtyřech námi předpokládaných periodách. Obecnějším výpočtem lze ukázat, že pro kývání okolo malinkatých x_0/l_0 se obdobná chyba kumuluje podstatně pomaleji. Pokud pouštíme z $(1 + \varepsilon)l_0c$ a myslíme si, že z l_0c , dostaneme, že fázový posun kyvadla po jedné periodě bude

$$2\pi \frac{c^2}{1 - c^2} (2\varepsilon + \varepsilon^2).$$

3. Všechny tyto otázky se vás snaží upozornit na něco, čemu se říká *špatně podmíněné problémy* a jak v nich vystupuje naše konečná schopnost vystihnout situaci a počáteční podmínky. Špatně podmíněné problémy jsou okamžiky, kdy nás malá výchylka může svést na úplně scestí v jeho řešení, a přesně proto jsou takové problémy pro fyziku velká obtíž. Na tuto otázku neexistuje žádná vzorová odpověď snad až na snahu se kriticky zamyslet nad tím,

jaké fyzikální příčiny vedou k vyjmenovaným jevům – a podle toho je také tato otázka bodována. Budu o tomto tématu mluvit v příštím seriálu, takže se pro další objasnění se můžete podívat tam.

Vojtěch Witzany
witzanyv@fykos.cz



Seriál: Numerická kopaná

A je to tady, naučíme se dělat numerické simulace. Na příkladu rotujícího fotbaláku si ukážeme, jak numericky integrovat diferenciální rovnice v programu Octave. Plánoval jsem do tohoto dílu nacpat ještě nějaké historické povídání, ale možná více oceníte, pokud si opravdu důkladně projdeme krátký prográmeček k výpočtu tohoto problému. Pro člověka neožehnutého programováním může následující text vypadat dost hrozně, ale nestrachujte se, půjdeme krok po kroku a nemusíte všemu ihned rozumět. Pro řešení seriálových úloh stačí program opsat a měnit jen příslušné parametry.

Milión minikroků

Co to tedy znamená numericky integrovat? Jedná se fakticky o variaci na přiblížení derivace pomocí diskretní změny. Například rychlost je (pro jednorozměrný případ)

$$v = \frac{dx}{dt} \approx \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad (4)$$

a zrychlení je

$$a = \frac{dv}{dt} \approx \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad (5)$$

kde Δt je nějaký malý časový úsek, během kterého se daná poloha a rychlost změnilo o Δx , respektive Δv . S použitím $F(x) = ma$ a rovnic (4) a (5) tedy můžeme přibližně vypočítat, že

$$x(t + \Delta t) \approx x(t) + v(t)\Delta t \quad \text{a} \quad v(t + \Delta t) \approx v(t) + \Delta t \frac{F(x)}{m}. \quad (6)$$

Když pak použijeme hodně malé Δt a proceduru mnohokrát opakujeme, získáváme přibližný vývoj systému s integračním krokem Δt . Všimněme si, že bychom mohli v rovnici (6) použít bez velkých potíží $F(x + \Delta x)$ a tím získat přesnější aproximaci. Takovýchto triků a dalších metod existuje velmi mnoho – stačí si jen pamatovat, že numerická integrace přibližně řeší spojitou diferenciální rovnici pomocí jednoduchých diskretních kroků. Pro zmenšující krok se pak jedná o přesnější a přesnější aproximaci opravdového řešení. Pro dostatečně malý krok dostaneme v řadě případů numerickým řešením fakticky přesný vývoj daného systému.

Nadatlování do Octave

Pojďme se teď podívat na Octave. Po spuštění by se vám měl objevit terminál s příkazovou řádkou. Sám jsem si nainstaloval poslední vydání *Octave Forge* pro Windows a nezapomněl zaškrtnout balík *odepkg* při instalaci. Poslední řádek hned po spuštění pro mě pak vypadá takto:

```
octave-3.6.4.exe:1>_
```

Ve Windows 8 se musí poupravit zástupce programu Octave kliknutím pravým tlačítkem myši, zvolením *Vlastnosti* a přidáním `-i --line-editing` do pole *Cíl* – jinak se vám tato příkazová řádka nezobrazí. Můžete si přečíst základní tutoriál na <http://octave.cz> pro obecnější informace, my se rovnou vrhneme na integraci rovnic pro letící míč.

Než začneme zapisovat rovnice do programu, musím se omluvit za lehkou botu z minulého dílu – napsal jsem špatně znaménko u Magnusovy síly. Správně je Magnusova síla

$$\mathbf{F}_{\text{Magn}} = \alpha v (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}).$$

Rovnice z posledního dílu zformulujeme pro speciální případ, kdy míč dostane počáteční rychlost v rovině xz , a v ní také přesně rotuje, takže jej Magnusova síla strhává jen do směru xz , a trajektorie tedy nikdy z původní roviny nevybočí. Tj. $\vec{\Omega}$ ukazuje do směru osy y a

$$\vec{\Omega} \times \vec{v} = (0, \Omega, 0) \times (v_x, 0, v_z) = (\Omega v_z, 0, -\Omega v_x),$$

kde pokud zvolíme kladné Ω , znamená to, že se míč otáčí „dolů za nosem“, neboli že Magnusova síla strhává míč dolů při kladné v_x . Dá to trochu úsilí točit s prsty, aby si člověk zkonstruoval pravotočivé pořadí os a dobře zadefinoval směr vektoru úhlové rychlosti, ale doporučuji si ověřit, že Magnusova síla má s tímto znaménkem přesně takovýto efekt.

Zápis pohybových rovnic do Octave začneme napsáním příkazu

```
pkg load odepkg
```

čímž se načte balík na integraci diferenciálních rovnic. Pak pokračujeme definicí funkce časové derivace našich proměnných:

```
function xidot = f(t,xi)
    alfa = 0.1;
    beta = 0.4;
    gamma = 0.0001;
    g = 9.81;
    m = 1;
    r2 = 0.01;
    vx = xi(3);
    vz = xi(4);
    Omega = xi(5);
    v = sqrt(vx^2+vz^2);
    ax = v/m*(alfa*Omega*vz-beta*vx);
    az = -g+v/m*(-alfa*Omega*vx-beta*vz);
    Omegadot = -3*gamma*v^3/(2*m*r2)*Omega;
    xidot = [vx;vz;ax;az;Omegadot];
endfunction
```

Proměnné **alfa**, **beta**, **gamma**, **g**, **m**, **r2** odpovídají parametrům α , β , γ , g , m , r^2 z posledního dílu. Používáme zde trik, ve kterém ukládáme polohu, rychlost a úhlovou rychlost otáčení míče do jednoho vektoru

$$\xi = (x, z, v_x, v_z, \Omega),$$

kde v_x odpovídá **vx**, v_z odpovídá **vz** a Ω odpovídá **Omega**. Definujeme pak v tomto bloku funkci **f(t,xi)**, která definuje první časovou derivaci vektoru ξ , tj.

$$\dot{\xi} = (v_x, v_z, a_x, a_z, \dot{\Omega}).$$

Když se pak někde dále v programu objeví funkce **f**, bude navracet vektor **xi** dot tak, jak je sestavený v předposledním řádku.

K tomu, aby se nám integrace včas zastavila, musíme zadefinovat funkci, která integrátoru ohlásí okamžik, kdy míč dopadl na zem. Zvolíme si počátek souřadnic tak, že $x = 0$, $z = 0$ je startovací poloha míče na zemi a tudíž $z = 0$ je okamžik dopadu. Funkce **dopad** tedy bude vypadat takto:

```
function [hodnota,ukoncuje,smer] = dopad(t,xi)
    hodnota = xi(2);
    ukoncuje = 1;
    smer = 0;
endfunction
```

Tato funkce vrátí trojici čísel [**hodnota**,**ukoncuje**,**smer**]. Když ji vložíme do numerického integrátoru, při každém kroku integrace se podívá na **hodnota**, pokud je nulová, podívá se, jestli má běh ukončit na **ukoncuje** (1 znamená ano) a případně se dokáže rozhodnout podle **smer**, jestli ukončit podle toho, jestli k protnutí došlo z kladné nebo záporné **hodnota**. V našem případě je **hodnota** $\xi_2 = z$.

Třídvajedna integrace

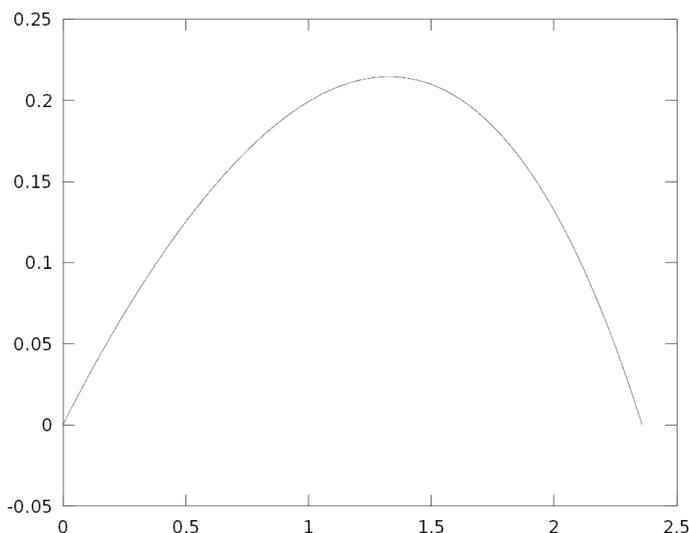
Teď už můžeme řešit rovnici ve třech řádcích:

```
nastaveni = odeset('Events',@dopad,'InitialStep', 0.00001,'MaxStep',0.0001);
pocPodminka = [0,0.0001,10,3,1];
reseni = ode45(@f,[0,10],pocPodminka,nastaveni);
```

kde **nastaveni** je pomocná proměnná, do které si ukládáme nastavení integrátoru **odeset**. Část **'Events',@dopad** určuje, že integrátor čeká zmíněným způsobem na funkci **dopad**. Možnosti **'InitialStep',0.00001,'MaxStep',0.0001** pak určují, v jakých rozmezích se pohybuje diskrétní integrační krok Δt .

pocPodminka určuje počáteční polohu, rychlost a rotaci pomocí pětisložkového vektoru ξ . Pro jednoduchost jsme nastavili počáteční $\xi_2 = z = 0,0001$, aby se nám okamžitě neseplatila podmínka dopadu.

Řádek **reseni=ode45(@f,[0,10],pocPodminka,nastaveni)**; už pak jen říká integrátoru **ode45**, aby zintegroval rovnice s danou počáteční podmínkou a nastavením, derivací **f(t,xi)** a s maximálním rozsahem času **[0,10]** (to můžete prodloužit, ale typicky míč spadne mnohem dříve). Výsledek se pak uloží pod proměnnou **reseni**. Pokud vše předcházející správně napíšete do příkazového řádku, spustí se integrace, která by na normálním počítači měla trvat pár desítek sekund. Po jejím skončení si můžete vykreslit výsledky příkazem:



Obr. 4: Trajektorie míče s danými parametry a počátečními podmínkami. Všimněte si, že osa z má úplně jinou škálu než osa x . Doopravdy je trajektorie mnohem „plošší“.

```
plot(reseni.y(:,1),reseni.y(:,2))
```

Výsledný objekt `reseni` totiž obsahuje sloupec čísel s časy t_i pod `reseni.x` a sloupec vektorů $\xi(t_i)$ v odpovídajících časech (zkuste napsat daná klíčová slova do příkazové řádky a Octave vám ukáže obsah těchto sloupců). Pod `reseni.y(i,j)` najdete j -tou složku vektoru ξ v čase t_i , tj. $\xi_j(t_i)$. `reseni.y(:,1)` pak znamená $\xi_1 = x$ ve všech časech a `reseni.y(:,2)` znamená $\xi_2 = z$ ve všech časech.

Dohromady tedy `plot(reseni.y(:,1),reseni.y(:,2))` říká, aby Octave načrtlo polohy x, z skrze všechny časové kroky t_i . Na obrazovce by vám po tomto příkazu měl vyskočit graf s trajektorií míče v rovině xz od výkopu až po dopad na zem – docela jako na obrázku 4.

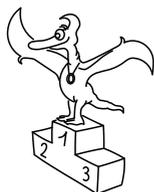
Řekneme si už jen poslední tip, v úlohách si budete muset trochu hrát s hodnotami různých konstant a s počátečními podmínkami, a proto by bylo dobré se naučit, jak toto vše Octave zadat pomocí jednoduchého skriptu. To uděláte tak, že vše předchozí sepišete do jednoho textového souboru s příponou `.m` (ve Windows například v programu Poznámkový blok) a uložíte do nějaké složky. Mějme například skript s cestou `C:/cesta/ksouboru/mujskript.m`. Pustíte si jej pak v Octave takto:

```
chdir('C:/cesta/ksouboru');
mujskript;
```

Doufám, že tento díl seriálu nebyl příliš vyčerpávající a že se vám program na integraci podařilo spustit. V případě obtíží mi napište na e-mail witzanyv@fykos.cz.

Příští díl bude oddechovější, dozvíte se o tom, jak James Clerk Maxwell, jeden z nejvýznamnějších teoretických fyziků vůbec, došel k závěru, že je příroda nevypočitatelná, ale že i přesto

žádný levhart nemůže změnit svoje skvrny! Co tím myslel? A jak to souvisí se slibovaným chaosem? Nechte se překvapit.



Pořadí řešitelů po I. sérii



Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	I	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	3	4	5	5	8	6	39	100	39
1.–2. Jan Došek	G, Brandýs n. L.	4	2	2	2	1	3	7	6	27	69	27
1.–2. Šimon Karch	G, Komenského, Havířov	4	4	–	4	2	3	6	4	27	75	27
3. Filip Čermák	G Golanova, Nitra	4	4	3	4	3	3	3	2	26	67	26
4. Jan Preiss	G, Lovosice	4	2	2	4	3	4	4	1	24	62	24
5. Viktor Rosman	G, Pelhřimov	2	4	1	4	4	3	4	–	22	67	22
6. Petr Jakubčík	PORG, Praha	4	2	1	3	2	3	1	5	21	54	21
7.–8. Denisa Chytilová	G J. Škody, Píseň	2	4	2	4	1	–	4	3	20	59	20
7.–8. David Němec	G, Tanvald	4	4	1	1	2	1	5	2	20	51	20
9. Ondřej Chloupek	G, Mostecká, Chomutov	4	4	2	2	2	3	–	2	19	61	19
10. Vít Beran	Masarykovo G, Plzeň	4	4	1	3	–	2	4	–	18	64	18
11. Patrik Novotný	G Opatov, Praha	2	4	2	2	1	3	1	2	17	44	17
12. Ladislav Nagy	G a SOŠZZE Vyškov	4	0	1	4	1	1	3	2	16	41	16
13.–15. Jan Pekař	G dr. J. Pekaře, Ml. Boleslav	4	2	1	1	3	1	3	–	15	45	15
13.–15. Jakub Sadílek	G, Litomyšl	2	2	1	2	1	3	3	1	15	38	15
13.–15. Dominik Starý	G, Benešov	4	2	–	4	2	3	–	–	15	68	15
16.–18. Jaroslav Páidar	SPŠ, Masarykova, Liberec	2	2	1	3	2	–	4	–	14	50	14
16.–18. Jakub Suchánek	G Opatov, Praha	2	4	2	4	2	–	–	–	14	70	14
16.–18. Lenka Vincenová	G, Olomouc – Hejčín	2	4	2	3	–	–	3	–	14	61	14
19. Filip Nácovský	G, Dvůr Králové n. L.	4	4	–	3	1	–	1	–	13	52	13
20. Antonín Krmíček	G Uherské Hradiště	2	4	3	3	–	–	–	–	12	80	12
21.–22. Matouš Pikous	Podještědské G, Liberec	4	4	–	2	–	1	–	–	11	65	11
21.–22. Jiří Vala	G, Mikulov	2	4	2	–	–	3	–	–	11	69	11
23.–24. Tomáš Dvořák	G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice	4	–	3	–	–	–	2	–	9	64	9
23.–24. Ondřej Knopp	G, Třeboň	4	–	1	4	–	–	–	–	9	82	9
25. Petr Kadlec	G Zábřeh	2	0	1	1	1	–	3	–	8	29	8
26.–29. Martin Hubata	G, Plzeň, Mikulášské n. 23	0	4	2	–	–	–	1	–	7	37	7
26.–29. Paulína Smolárová	ŠpMNDaG, SR	2	–	4	–	–	–	1	–	7	50	7
26.–29. Pavla Trembulaková	G, Jirovcova, České Budějovice	2	0	3	1	1	–	–	–	7	35	7
26.–29. Veronika Venclová	G J. Resslera, Chrudim	2	0	1	–	–	1	3	–	7	29	7
30.–32. Miloš Kubáček	G, F. Hajdy, Ostrava	4	0	1	–	–	–	–	–	5	45	5
30.–32. Jan Prokop	SŠ, Purkyňova, Brno	2	0	–	2	–	–	1	–	5	25	5
30.–32. Martin Repčík	G, Olomouc – Hejčín	4	–	1	–	–	–	–	–	5	71	5
33.–34. Borek Požár	G Z. Wintra, Rakovník	4	–	–	–	–	–	–	–	4	100	4
33.–34. Martina Tureníčová	G Jura Hronca, Bratislava	0	2	1	1	–	–	–	–	4	27	4
35. Tomáš Troján	G Cheb	0	0	1	–	1	1	–	–	3	14	3
36.–39. Jakub Komárek	G Uherské Hradiště	2	–	–	–	–	–	–	–	2	50	2
36.–39. Antonín Šámal	G J. Palacha, Mělník	2	–	–	–	–	–	–	–	2	50	2
36.–39. Jan Trejbal	G Luďka Píka, Plzeň	2	–	0	–	–	–	–	–	2	29	2
36.–39. Jakub Zemek	G Uherské Hradiště	2	–	–	–	–	–	–	–	2	50	2
40. Ondřej Bílek	SPŠ, Vlašim	–	–	–	1	–	–	–	–	1	25	1

Kategorie druhých ročníků

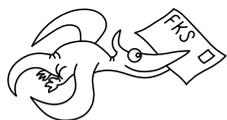
jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	I	%	Σ	
<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	MFF	UK	4	3	4	5	5	8	6	39	100	39
1. Jáchym Bárták	G Havlíčkův Brod	4	4	3	4	3	3	4	4	29	74	29	
2. Přemysl Štastný	G, Žamberk	4	4	1	4	2	-	7	4	26	76	26	
3. Daniela Pittnerová	G L. Svobodu, Humenné	4	4	3	4	2	3	4	-	24	73	24	
4.-6. Martin Hanák	G, nám. E. Beneše, Kladno	6	4	1	4	5	3	-	-	23	92	23	
4.-6. Štěpán Stenclák	G, Třinec	4	4	3	3	-	-	5	4	23	79	23	
4.-6. David Vokrouhlický	G Jana Keplera, Praha	4	2	2	3	2	3	3	4	23	59	23	
7. Matěj Mezera	G Havlíčkův Brod	4	4	3	4	2	2	3	-	22	67	22	
8. Petra Štefaníková	G O. Havlové, Ostrava	4	4	2	4	-	3	4	-	21	75	21	
9. Adam Poloček	G, Havlíčkova, Český Těšín	4	4	2	3	1	1	1	2	18	46	18	
10.-11. Aleš Krčil	G dr. A. Hrdličky, Humpolec	2	2	1	3	2	3	3	1	17	44	17	
10.-11. Martin Štyks	G Jana Keplera, Praha	4	2	1	4	2	-	4	-	17	61	17	
12.-13. Lucie Hronová	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	4	2	1	4	2	1	2	-	16	48	16	
12.-13. Kateřina Stodolová	G, Dašická, Pardubice	4	4	2	3	-	3	-	-	16	80	16	
14.-18. Jakub Kožušník	Wichterlovo G, Ostrava	2	4	2	2	2	2	1	-	15	45	15	
14.-18. Peter Kubaščík	G Kysucké Nové Mesto	4	4	1	4	2	-	-	-	15	75	15	
14.-18. Veronika Rajňáková	G Nové Zámky	2	4	-	4	-	-	-	5	15	83	15	
14.-18. Klára Ševčíková	G Uherské Hradiště	2	2	1	4	-	3	3	-	15	54	15	
14.-18. Petr Šimůnek	G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice	4	2	2	3	3	1	-	-	15	60	15	
19.-20. Daniel Pajer	G Jana Keplera, Praha	4	0	2	4	1	-	1	1	13	38	13	
19.-20. Miroslav Vejvoda	G, Nový Bydžov	4	4	-	-	-	1	4	-	13	62	13	
21.-23. Ondřej Lomický	G, Plasy	4	4	2	1	1	-	-	-	12	60	12	
21.-23. Ronald Luc	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	4	2	-	3	3	-	-	-	12	71	12	
21.-23. Václav Mikeska	G F. Palackého, Val. Mez.	6	-	3	3	-	-	-	-	12	109	12	
24. Veronika Úlovcová	Církevní G, Plzeň	2	2	2	3	-	-	-	2	11	52	11	
25. Alžběta Andryšková	G, Olomouc - Hejčín	4	2	1	3	-	-	-	-	10	67	10	
26.-27. Veronika Gintnerová	G Sv. Františka, Žilina	4	4	-	-	-	-	-	-	8	100	8	
26.-27. František Zach	G, Litomyšl	4	0	1	1	1	1	-	-	8	32	8	
28. Daniel Šerý	G Rožnov pod Radhoštěm	4	-	1	1	-	-	-	-	6	55	6	
29. Martin Barnovský	G Stará Lubovňa	2	2	1	-	-	-	-	-	5	45	5	
30.-34. Vít Horáček	G L. Jaroše, Holešov	4	-	-	-	-	-	-	-	4	100	4	
30.-34. Jaroslav Janoš	G, Lesní čtvrť, Zlín	4	-	-	-	-	-	-	-	4	100	4	
30.-34. Jakub Staš	G, Havlíčkova, Český Těšín	2	-	2	-	-	-	-	-	4	57	4	
30.-34. Pavel Turinský	G, Brandýs n. L.	4	-	-	-	-	-	-	-	4	100	4	
30.-34. Petr Zelina	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	4	-	-	-	-	-	-	-	4	100	4	

Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	I	%	Σ
<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	2	2	3	4	5	5	8	6	35	100	35
1. Tomáš Fárník	G P. de Coubertina, Tábor	2	2	1	4	1	3	8	7	28	80	28
2. Tomáš Hrbek	G J. Ressela, Chrudim	1	1	1	4	4	3	4	7	25	71	25
3.–5. Kristína Mrázová	G, Český Krumlov	2	2	3	3	2	1	3	2	18	51	18
3.–5. Marian Poljak	G J. Škody, Přerov	2	2	3	3	–	4	4	–	18	75	18
3.–5. Pavel Souček	G, Nymburk	2	1	2	2	4	3	1	3	18	51	18
6. Klára Stefanová	G B. Němcové, HK	2	2	2	4	–	3	4	–	17	71	17
7.–9. Jan Gocník	G J. Škody, Přerov	2	2	3	–	–	4	4	–	15	75	15
7.–9. Peter Lucáčský	G Bardejov	2	1	3	4	2	1	–	2	15	56	15
7.–9. Andrej Uhlarik	G Námestovo	2	2	1	4	–	3	3	–	15	63	15
10.–11. Tianyuan Lu	IMSA, Aurora, USA	2	2	2	4	3	–	–	1	14	64	14
10.–11. Martin Vitoušek	G P. de Coubertina, Tábor	2	2	1	4	2	3	–	–	14	67	14
12. Jiří Tuháček	Masarykovo G, Plzeň	2	1	2	4	2	–	–	2	13	59	13
13. Jakub Marták	G Golianova, Nitra	2	2	2	2	2	1	1	–	12	41	12
14. Jakub Jambřích	G J. A. Raymana, Prešov	2	0	1	3	2	3	–	–	11	52	11
15.–16. Tomáš Drozdík	G Andreja Vrábla, Levice	1	2	–	–	–	3	4	–	10	59	10
15.–16. Šimon Knoška	G A. Kmeťa, B. Štiavnica	2	1	3	2	–	–	–	–	10	63	10
17.–19. Kateřina Hladká	G, Karviná	2	2	2	2	–	–	–	1	9	53	9
17.–19. Jozef Mišt	G A. H. Škultétyho, V. Krtíš	2	2	1	4	–	–	–	–	9	82	9
17.–19. Jiří Zeman	PSG jazykové, HK	1	1	1	0	1	1	1	3	9	26	9
20. Jakub Pílař	G J. Ressela, Chrudim	1	2	2	–	–	1	2	–	8	38	8
21.–22. Pavel Kús	G J. Š. Baara, Domažlice	2	2	–	–	–	3	–	–	7	78	7
21.–22. Sára Rosecká	G, Botičská, Praha	1	0	1	2	1	–	–	2	7	32	7
23.–25. Karel Chládek	G, Lanškroun	2	0	1	3	–	–	–	–	6	55	6
23.–25. Martin Scheubrein	G, Masarykovo nám., Třebíč	1	–	–	3	–	2	–	–	6	55	6
23.–25. Milan Šuk	G, Boskovice	2	–	–	–	–	–	4	–	6	60	6
26.–27. Dominika Ďurovčíková	G Jura Hronca, Bratislava	2	–	3	–	–	–	–	–	5	100	5
26.–27. Vojtěch Jelínek	G, Neumannova, Ždár n. S.	2	2	–	–	–	1	–	–	5	56	5
28.–29. Marek Otýpka	G, Židlochovice	2	1	–	–	–	1	–	–	4	44	4
28.–29. Jiří Rýdl	Jiráskovo G, Náchod	1	1	2	–	0	–	–	–	4	33	4
30. Jindřich Kvita	Angl. G, SOŠ a VOŠ, Pardubice	1	0	–	1	–	0	1	–	3	14	3
31. Robert Šimon	G Mensa, Praha	2	–	–	–	–	–	–	–	2	100	2
32.–35. Barbora Bujalková	G L. Štúra, Zvolen	–	–	–	–	–	1	–	–	1	20	1
32.–35. Markéta Doležalová	G Brno-Řečkovice	–	–	–	–	–	1	–	–	1	20	1
32.–35. Martin Gažo	ŠpMNDaG, SR	–	1	–	–	–	–	–	–	1	50	1
32.–35. Jakub Kvasil	G Mozartova, Pardubice	1	–	–	–	–	–	–	–	1	50	1

Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	I	%	Σ
<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	2	2	3	4	5	5	8	6	35	100	35
1. Jozef Bucko	G PdC, Piešťany	1	2	3	5	5	4	6	6	32	91	32
2. Jakub Sláma	G Opatov, Praha	2	2	3	4	2	4	4	7	28	80	28
3.–4. Filip Ayazi	G Ludovíta Štúra, Trenčín	2	0	3	4	3	3	5	3	23	66	23
3.–4. Dominika Jochcová	Wichterlovo G, Ostrava	2	2	3	4	3	–	7	2	23	77	23
5. Marek Biely	G, Považská Bystrica	2	2	2	4	3	2	3	4	22	63	22
6.–9. Jakub Dolejší	G B. Němcové, HK	2	2	2	4	2	1	0	6	19	54	19
6.–9. Petr Doležal	G Z. Wintra, Rakovník	2	1	2	4	2	–	4	4	19	63	19
6.–9. Samuel Kočiščák	G Poštová, Košice	2	2	3	3	3	–	6	–	19	79	19
6.–9. Kateřina Smítalová	G, Dašická, Pardubice	2	2	3	3	1	–	6	2	19	63	19
10. Michal Moravec	G Jana Keplera, Praha	2	1	1	3	2	1	5	2	17	49	17
11. Michal Kalousek	G, Dašická, Pardubice	2	2	3	2	–	–	5	2	16	64	16
12.–13. Jakub Dvořák	G, Botičská, Praha	2	2	–	3	2	–	4	2	15	56	15
12.–13. Kryštof Šulc	VOŠ, SOŠ a G, Evropská, Praha	–	–	2	4	–	5	–	4	15	83	15
14. Pavel Blažek	G a ZUŠ, Šlapanice	2	2	2	4	1	3	–	–	14	67	14
15.–16. Mojmír Poprocký	G Matyáše Lercha, Brno	2	1	2	4	–	–	–	4	13	76	13
15.–16. Míloslav Staněk	G a ZUŠ, Šlapanice	2	2	2	4	–	3	–	–	13	81	13
17.–18. Tomáš Kremel	G J. Škody, Přerov	2	2	–	4	–	4	–	–	12	92	12
17.–18. Luboš Krnáč	G A. H. Škultétyho, V. Krtíš	2	2	1	3	–	–	–	4	12	71	12
19.–20. Marek Bíroš	G J. A. Raymana, Prešov	2	2	1	4	–	–	–	–	9	82	9
19.–20. Petr Smíštel	G, Bučovice	2	–	–	4	–	3	0	–	9	47	9
21.–23. Jakub Hornáček	G V. Mihálka, Sered	2	–	–	4	–	2	–	–	8	73	8
21.–23. Zuzana Mičková	G Dolný Kubín	2	1	1	–	4	–	–	–	8	67	8
21.–23. Václav Rozhoň	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	1	–	1	–	2	3	–	1	8	38	8
24.–26. František Dráček	G, Považská Bystrica	–	–	2	2	–	3	–	–	7	58	7
24.–26. David Flieger	Reálné G a ZŠ, Prostějov	2	1	–	–	–	1	3	–	7	41	7
24.–26. Zdeněk Turek	G a SOŠ, Rokycany	2	1	–	4	–	–	–	–	7	88	7
27. Jan Škvára	G J. Škody, Přerov	2	–	1	–	3	–	–	–	6	60	6
28. Anna Gajdová	G F. Palackého, Val. Mez.	2	1	2	–	–	–	–	–	5	71	5
29. Lucie Brichová	PSG jazykové, HK	1	2	1	–	–	–	–	–	4	57	4



FYKOS

UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta

Ústav teoretické fyziky

V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

www: <http://fykos.cz>

e-mail: fykos@fykos.cz

FYKOS je také na Facebooku 

<http://www.facebook.com/Fykos>

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.