Úloha IV.4 ... ach ta tíže

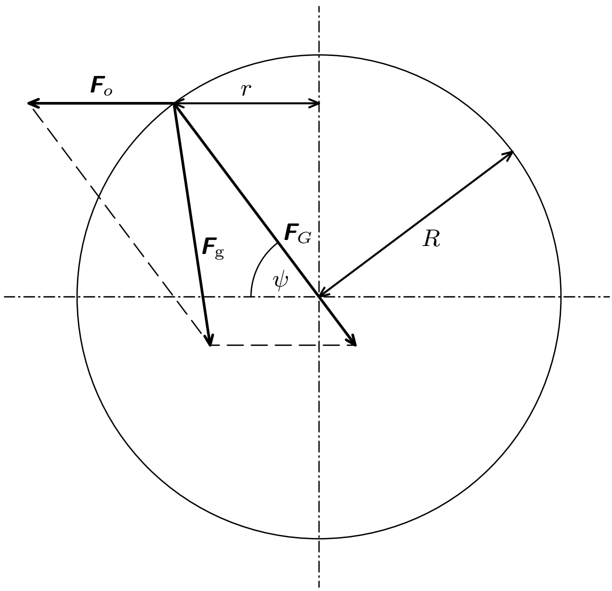
4 body; průměr 2,12; řešilo 42 studentů

Určete, jaké je tíhové zrychlení na povrchu neutronové hvězdy v závislosti na rovnoběžce. Jak velká slapová síla by působila na předmět vysoký $h = 1\,\mathrm{m}$ a s hmotností $m = 1\,\mathrm{kg}$ v blízkosti jejího povrchu? S jakou energií by dopadl na povrch neutronové hvězdy marshmallow upuštěný z výšky h? Neutronová hvězda má poloměr R a rotuje s periodou rotace T. Můžete ji považovat za kulovou, i když přesně kulová není. Najděte si hodnoty pro typickou neutronovou hvězdu a udejte jak obecné, tak konkrétní číselné výsledky.

Karel se zasnil nad drtivou silou neutronových hvězd a jejich skvělou neinercialitou.

V celém řešení budeme předpokládat, že gravitační účinky lze popsat newtonovsky a že všechny rychlosti jsou nerelativistické.

Započněme s tíhovým zrychlením na povrchu. Na testovací těleso spojené s hvězdou (rotuje s ní) působí dvě síly – skutečná gravitační a zdánlivá odstředivá. Uvažujme kulovou neutronovou hvězdu s poloměrem R a hmotností M a testovací částici na rovnoběžce ψ s hmotností m, tj. situace jako na obrázku 1.



Obr. 1: Rozbor situace.

Z geometrie situace lze nahlédnout, že pro velikosti sil působících na testovací těleso bude platit kosinová věta

$$|\boldsymbol{F}_\mathrm{g}|^2 = |\boldsymbol{F}_\mathrm{G}|^2 + |\boldsymbol{F}_\mathrm{o}|^2 - 2\cos\psi\,|\boldsymbol{F}_\mathrm{G}|\,|\boldsymbol{F}_\mathrm{o}|\ ,$$

kde $\boldsymbol{F}_\mathrm{g}$ je celková tíhová síla působící na těleso, $\boldsymbol{F}_\mathrm{G}$ je gravitační síla a $\boldsymbol{F}_\mathrm{o}$ je odstředivá síla.

Pro velikost $|\boldsymbol{F}_\mathrm{G}|$ bude platit z Newtonova gravitačního zákona

$$|\boldsymbol{F}_\mathrm{G}| = \frac{GMm}{R^2}$$

a pro velikost odstředivé síly dostaneme

$$|\boldsymbol{F}_\mathrm{o}| = mr\omega^2 = \frac{4\pi^2 mr}{T^2} = \frac{4\pi^2 mR\cos\psi}{T^2}\,,$$

kde ω je úhlová rychlost rotace hvězdy a G je Newtonova gravitační konstanta. Pro velikost tíhového zrychlení tedy dostáváme

$$g(\psi) = \frac{|\boldsymbol{F}_\mathrm{g}|}{m} = \sqrt{\frac{G^2M^2}{R^4} + \frac{16\pi^4 R^2\cos^2\psi}{T^4} - \frac{8\pi^2 GM\cos^2\psi}{RT^2}}\,.$$

Speciálně na pólech

$$g(90^\circ) = |\boldsymbol{F}_\mathrm{G}| = \frac{GM}{R^2}$$

a na rovníku

$$g(0^\circ) = |\boldsymbol{F}_\mathrm{G}| - |\boldsymbol{F}_\mathrm{o}(0^\circ)| = \frac{GM}{R^2} - \frac{4\pi^2 R}{T^2}\,.$$

Nyní se zaměřme na slapovou sílu. Slapová síla je způsobena různými silovými účinky na bližší a vzdálenější části tělesa. Je-li $h \ll R$, pak lze těleso aproximovat dvěma bodovými hmotnostmi na koncích tělesa (pro malé homogenní těleso). A velikost slapové síly potom lze přiblížit jako

$$F_\mathrm{s} = F_\mathrm{g}\left(\frac{m}{2}, R+h\right) - F_\mathrm{g}\left(\frac{m}{2}, R\right) \approx \frac{1}{2}h\left.\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y}\right|_{y=R}\,.$$

kde uvažujeme velikost síly jako funkci hmotnosti a polohové souřadnice y – v radiálním směru.

Po výpočtu lze zapsat slapovou sílu jako

$$F_\mathrm{s} = \frac{mh}{g(R)}\left(\frac{-G^2M^2}{R^5} + \frac{8\pi^4 R\cos^2\psi}{T^4} + \frac{2\pi^2 GM\cos^2\psi}{R^2T^2}\right)\,,$$

kde značením $g(R)$ vyjadřujeme, že zde tíhové zrychlení považujeme za funkci poloměru hvězdy a s ψ nakládáme jako s konstantou. Tento vztah pro sílu F_s zaslouží bližší komentář. Předpoklad $h \ll R$ je splněn pro malé předměty, poloměry neutronových hvězd se ale pohybují i v řádech kilometrů, takže pro jiná kosmická tělesa tento předpoklad platit nemusí. Dále jsme vycházeli z toho, že je těleso spojené s hvězdou. Např. kdyby se jednalo dříve zmíněný cizí objekt, tak by slapová síla odpovídala pouze gravitační slapové síle. Nakonec v závislosti na parametrech může mít slapová síla různé znaménko (těleso je stlačováno či roztahováno).

Co se týče třetí podotázky, z formulace „upustíme marshmallow“ není jasné, zda jsme při upouštění spojeni s hvězdou či nikoliv (rotujeme či nerotujeme). Další otázkou je, zda máme v situaci zohledňovat slapové síly a příslušné deformace marshmallow. Tyto deformace budou ale silně záviset na rozměrech marshmallow, které nejsou specifikovány, proto je zde nebudeme uvažovat.

Ať už uvažujeme rotující či nerotující marhsmallow, jako nejsnazší cesta k výsledku se jeví počítat pohyb marshmallow v inerciální soustavě a poté pouze pohyb převést do rotující soustavy (odkud zjistíme dopadovou energii).

Padá-li marshmallow z klidu, jeho kinetická energie při dosažení povrchu hvězdy bude v inerciální soustavě

$$\frac{1}{2}mv^2 = E_\mathrm{p}(R+h) - E_\mathrm{p}(R) = GMm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right)\,,$$

kde m je hmotnost marshmallow. Tedy

$$v_0 = \sqrt{2GM\frac{h}{R(R+h)}}\,,$$

pro malé výšky h můžeme aproximovat $R + h \approx R$. Nicméně „povrch“ hvězdy se vůči klidové soustavě pohybuje rychlostí

$$v' = R\omega = \frac{2\pi R\cos\psi}{T}\,.$$

Protože jsou ale tyto dvě rychlosti na sebe kolmé, bude pro dopadovou energii platit

$$E_0 = \frac{1}{2}m\left(v_0^2 + {v'}^2\right) = m\left[\frac{GMh}{R(R+h)} + \frac{2\pi^2R^2\cos^2\psi}{T^2}\right]$$

Pro rotující marshmallow je situace pro malá h obdobná, pouze tečná rychlost povrchu vůči marshmallow bude $h\omega\cos\psi$ namísto $R\omega\cos\psi$. Pro větší h již toto nemusí být splněno. Zaprvé se může stát, že marshmallow vůbec nedopadne (jeho orbita neprotne povrch hvězdy), nicméně toto by se muselo dít pro značné výšky h (zkuste si odhadnout poloměr stacionární kruhové orbity), pro které je spojení s hvězdou velice problematické; jediný rozumný scénář (krom šílených konstrukcí typu výtah do vesmíru na neutronové hvězdě) je stacionární družice, na které by po upuštění marshmallow nekonal urychlený pohyb (vůči družici by byl v klidu). Proto předpokládejme, že marshmallow dopadne.

Provedeme přibližný výpočet pro „menší“ h (nemusí být malé v porovnání s R, ale ne tak velké, aby se výrazně projevilo zakřivení orbity – viz níže).

Opět postupujme jako dříve. Musí být zachována mechanická energie, tudíž

$$\frac{1}{2}m\left[(R+h)\omega\cos\psi\right]^2 - \frac{GMm}{R+h} = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{R}\,,$$

$$v_1^2 = \left[(R+h)\omega\cos\psi\right]^2 + 2GM\frac{h}{R(R+h)}\,,$$

kde v_1 je rychlost marshmallow vůči klidové soustavě při dosažení povrchu hvězdy. Tentokrát ale vektor rychlosti v klidové soustavě při dosažení povrchu nebude na povrch kolmý, proto musíme ještě spočítat tečné a kolmé složky v_1 k povrchu.

Musí rovněž platit zákon zachování momentu hybnosti, proto

$$m\omega\cos^2\psi(R+h)^2 = mRv_\mathrm{t}\cos\psi\,,$$

$$v_\mathrm{t} = \frac{(R+h)^2\omega\cos\psi}{R}\,,$$

kde v_t je tečná složka (rovnoběžná s povrchem) rychlosti marshmallow v klidové soustavě při dosažení povrchu.

Nechť w je rychlost marshmallow vůči povrchu při dopadu. Potom pro dopadovou energii E_1 platí:

$$E_1 = \frac{1}{2}mw^2 = \frac{1}{2}m\left|\boldsymbol{v_1} - \boldsymbol{v}'\right|^2 = \frac{1}{2}m\left[(v_\mathrm{r}^2 + \left(v_\mathrm{t} - v'\right)^2\right] = \frac{1}{2}m\left[v_1^2 - 2v_\mathrm{t}v' + v'^2\right]\,,$$

kde v_r je radiální složka rychlosti marshmallow při dosažení povrchu. Po dosazení za v', v_1 a v_t dostaneme

$$E_1 = \frac{1}{2}m\left\{[(R+h)\omega\cos\psi]^2 + 2GM\frac{h}{R(R+h)} - \frac{4\pi(R+h)^2\omega\cos^2\psi}{T} + \frac{4\pi^2R^2\cos^2\psi}{T^2}\right\}$$

a konečně po dosazení $\omega = 2\pi/T$ máme

$$E_1 = m\left\{GM\frac{h}{R(R+h)} + \frac{2\pi^2}{T^2}\left[R^2 - (R+h)]^2\right]\cos^2\psi\right\}.$$

Pro uspokojení obecnosti je třeba dodat, uvedený postup výpočtu dopadové energie nebyl úplně korektní, protože existují takové polohy upouštěného marshmallow, kdy marshmallow dopadne, ale použitá aproximace není správná. Jedná se o takové polohy, kdy již orbita upuštěného marshmallow nemá v dobrém přiblížení triviální tvar (je nutno ji považovat za elipsu, ne za úsečku), ale orbita povrch neutronové hvězdy protne. V takovémto případě již není stelární šířka dopadu shodná s „upouštěcí“ šířkou a vektor rychlosti při dopadu již obecně nebude rovnoběžný s místní rovnoběžkou (dopadu). V takovémto případě by bylo nutno spočítat místo dopadu a poté rychlost rozložit do tří směrů místo dvou, a počítat s různými stelárními šířkami. Postup by byl velice pracný, ale typově ne až tak odlišný od použitého.

Nyní aplikujme výsledky na nějakou neutronovou hvězdu, např. na pulsar PSR J0348+0432 (dvojhvězda s bílým trpaslíkem).[1] Ta má parametry: (data uvedeny bez nepřesností, poloměr je uveden střední)

$$M \doteq 2{,}01M_\odot \doteq 4{,}00\cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}\,,$$
$$R \doteq 13\,\mathrm{km} \doteq 1{,}3\cdot 10^{4}\,\mathrm{m}\,,$$
$$T \doteq 39{,}1\,\mathrm{ms} = 3{,}91\cdot 10^{-2}\,\mathrm{s}\,.$$

Podotýkáme, že se jedná o poměrně mohutnou neutronovou hvězdu. Dostáváme pro ni hodnoty

$$g(90^\circ) \doteq 1{,}58\cdot 10^{12}\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}\,,$$
$$g(0^\circ) \doteq 1{,}58\cdot 10^{12}\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}\,.$$

(rozdíl řádově $10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$). Vidíme, že závislost na rovnoběžce je slabá, proto pro jednoduchost budeme počítat slapovou sílu při pólu, pro 1 m vysoké těleso o hmotnosti 20 kg (peřináč):

$$F_\mathrm{s} \doteq \frac{GMmh}{R^3} \doteq 2{,}43\cdot 10^{9}\,\mathrm{N}\,,$$

což je poměrně hodně. Zkuste si porovnat slapové síly působící na atom se silou, kterou jsou vázány elektrony.

A konečně dopadová energie marshmallow puštěného z výšky $h = 1\,\mathrm{m}$ (zařízením spojeným s hvězdou) o hmotnosti $m = 5\,\mathrm{g}$ je zhruba

$$E_1 = 7{,}89\cdot 10^{9}\,\mathrm{J}\,.$$

[1] `http://en.wikipedia.org/wiki/PSR_J0348+0432`

Lubomír Grund
grund@fykos.cz