Úloha IV.5 ... vrhač nožů

4 body; průměr 1,41; řešilo 37 studentů

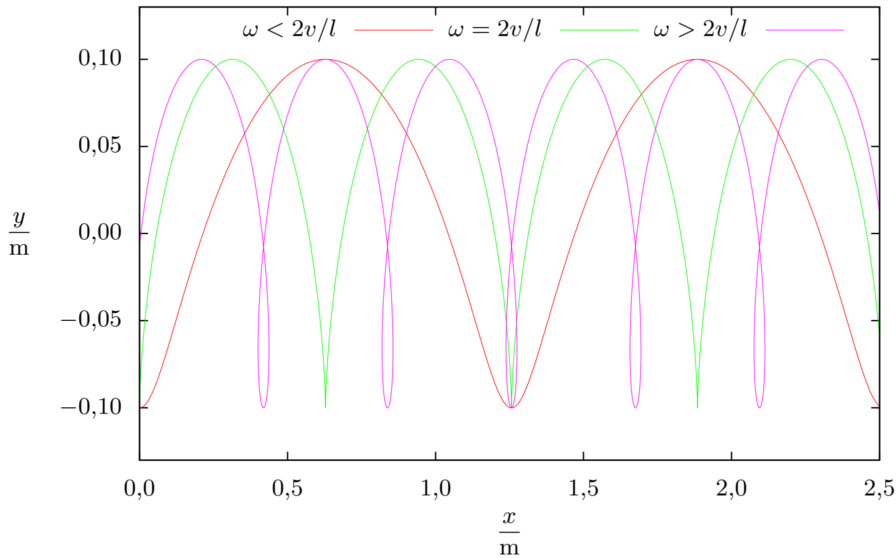
Vrhací nůž opustí ruku ve chvíli, kdy je jeho těžiště ve výšce h a má pouze horizontální složku rychlosti v_0. Jakou musí mít úhlovou rychlost rotace ω, aby se zasekl do svislé desky vzdálené d od místa vypuštění? Pro zjednodušení uvažujte, že těžiště nože je přesně v polovině jeho délky l a že se nůž zasekne vždy, když se jeho čepel dotkne desky dříve než rukojeť.

Mirkovy pokusy s vrháním nožů se vymykaly statistickým předpokladům.

Při řešení této úlohy si nejprve musíme uvědomit, jaké trajektorie špička nože může opisovat a jaké z toho mohou vzniknout situace. V zásadě máme tři možnosti:

- Rychlost těžiště nože v je oproti rychlosti rotace veliká. Potom se špička nože pohybuje vůči terči stále vpřed, což nám usnadní výpočet.
- Nastane mezní případ, kdy se špička nože v úvrati vůči terči zastaví.
- Po jistý časový úsek se bude špička nože od terče vzdalovat.

Trajektorie špičky nože pro jednotlivé případy je vykreslena na obrázku 1.



Obr. 1: Trajektorie špičky nože.

Pro případ $\omega < 2v/l$ budeme postupovat tak, že si nejprve vyjádříme vzdálenost špičky nože od terče jako funkci času. Jak je patrné z obrázku 1 půjde o periodickou funkci. Každou periodu můžeme pomyslně rozdělit na dvě poloviny – v té první má špička nože náskok před těžištěm a může se tedy zaseknout do terče. V té druhé má těžiště náskok před špičkou a nůž se tedy zaseknout nemůže.

Spočteme tedy čas, za který nůž narazí do stěny a poté vyhodnotíme, ve které části periody se nacházíme, abychom určili, zda se nůž zasekl, nebo ne.

Nejprve si napišme parametrické vyjádření pohybu špičky nože pro případ, že na počátku svého pohybu je špička v dolní úvrati a rotuje směrem od terče

$$y = -\frac{l}{2}\cos(\omega t)\,,$$
$$x = vt - \frac{l}{2}\sin(\omega t)\,,$$

kde jsme jako parametr použili čas t. Nyní nás zajímá čas $\tilde{t}$, za který nůž do stěny narazí. Pro lepší představu o výpočtu tohoto času si napišme ještě závislost souřadnice x na čase t pro druhý konec nože

$$x' = vt + \frac{l}{2}\sin(\omega t)\,.$$

Jelikož jako náraz do stěny se počítá střet s libovolným z obou konců nože, urazí těžiště vzdálenost

$$\tilde{d} = d - \frac{l}{2}\left|\sin\left(\omega\tilde{t}\right)\right|\,.$$

Nůž tedy narazí do stěny za čas

$$\tilde{t} = \frac{d - \frac{l}{2}\left|\sin\left(\omega\tilde{t}\right)\right|}{v}\,,$$

což je implicitní rovnice, kterou nejsme schopni běžnými metodami vyřešit. Uvědomme si ovšem, co dělá člen $l|\sin(\omega t)|/2$ – jedná se o korekci na vodorovnou vzdálenost od počáteční polohy, která se zmenšuje či zvětšuje tím, že se nůž otáčí. Nejvíce se projeví v okamžiku, kdy $\omega t = 90^\circ$. Pro obě krajní polohy, tzn. $\omega t = 0^\circ$ a $\omega t = 180^\circ$ se neprojeví vůbec. Pro náš případ $\omega < 2v/l$ ji však vůbec nemusíme uvažovat, jedině že by nás zajímal přesný čas zásahu, či pod jakým úhlem se nůž zasekne.

Začínáme s nožem, jehož špička míří dolů. Požadujeme, aby jeho úhel natočení od původního stavu ve chvíli srážky se stěnou byl z intervalu $(\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$, kde $k \in \mathbb{N}_0$. Z odstavce výše můžeme soudit, že pokud pro každé k najdeme spodní a horní frekvenci, při které k zaseknutí dojde, dojde k zaseknutí pro všechny mezilehlé frekvence. Pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ hledáme tedy ω^k_{min} a ω^k_{max} (jde o horní index, ne mocninu) takové, že

$$\omega^k_{\mathrm{min}}\tilde{t} = 2k\pi + \pi = (2k+1)\pi\,,$$
$$\omega^k_{\mathrm{max}}\tilde{t} = 2k\pi + 2\pi = (2k+2)\pi\,.$$

Sinus celočíselných násobků π je ovšem nulový. Pro ω^k_{min} tedy dostáváme rovnici

$$\omega^k_{\mathrm{min}}\tilde{t} = \omega^k_{\mathrm{min}}\frac{d - \frac{l}{2}\left|\sin\left(\omega^k_{\mathrm{min}}\tilde{t}\right)\right|}{v} = \omega^k_{\mathrm{min}}\frac{d}{v} = (2k+1)\pi\,,$$

tedy

$$\omega^k_{\mathrm{min}}\frac{d}{v} = (2k+1)\pi$$

a pro ω^k_{max} dostáváme rovnici

$$\omega^k_{\mathrm{max}}\frac{d}{v} = (2k+2)\pi\,.$$

Ještě nám zbývá určit, jakou podmínku si klademe předpokladem, že se špička nože pohybuje stále vpřed. Rychlost špičky nože vůči těžišti je $\omega l/2$, rychlost těžiště je v, chceme tedy, aby bylo splněno

$$\omega < \frac{2v}{l}\,.$$

Pokud je tato podmínka splněna, můžeme psát, že $\omega \in (\omega^k_{\min}, \omega^k_{\max})$.

Uvažme nyní případ $\omega = 2v/l$ – že se špička nože v jednu chvíli zastaví. Jedná se vlastně pouze o krajní případ první situace, což znamená, že se nůž zasekne, pokud najdeme takové k, že $2v/l \in (\omega^k_{\min}, \omega^k_{\max})$. Tento případ je ovšem zajímavý tím, že takto se nože skutečně vrhají.[1]

Ještě je potřeba vyřešit otázku – jak víme, že krajní možné polohy jsou 180° a 360°? Stačí se podívat na obr. 1. V prvních dvou případech existuje pro každý úhel z tohoto intervalu situace, kdy je špička nože napřed před těžištěm. Pro případ $\omega > 2v/l$ toto již neplatí. Horní mezní úhel budeme hledat tak, že najdeme místo, ve kterém se špička začne vracet – špička, která se od stěny vzdaluje, se do ní už nezasekne. Musíme tedy najít okamžik, kdy je její rychlost vůči stěně nulová (všimněme si, že pro druhý případ to byl úhel 360°). Pro nalezení spodní hranice budeme hledat v podstatě horní hranici pro náraz do zdi rukojetí nože. Víme totiž, že pokud tuto hranici překročíme, tak rukojeť nenarazí a naopak se zasekne špička.

Pro tyto případy využijeme diferenciální počet, který nám ze vztahu pro souřadnici x umožňuje spočítat složku rychlosti v_x špičky nože pomocí derivace, tedy

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v - \frac{\omega l}{2}\cos\left(\omega t\right).$$

Z požadavku, aby $\tilde{v}_x = 0$ získáváme vztah

$$\cos\left(\omega_{\max}\tilde{t}\right) = \frac{2v}{\omega_{\max} l}\,,$$

$$\omega^k_{\max}\tilde{t} \in \left\{\arccos\left(\frac{2v}{\omega^k_{\max} l}\right) + 2k\pi,\ 2\pi - \arccos\left(\frac{2v}{\omega^k_{\max} l}\right) + 2k\pi\right\}.$$

Z těchto dvou možných řešení je pro nás podstatné to druhé, jelikož špička nože se nachází před těžištěm nože pouze v případě, že je nůž natočený o úhel $\varphi \in (\pi, 2\pi)$, čemuž odpovídá druhý příklad. Nyní využijeme vztah

$$\tilde{t} = \frac{d - \frac{l}{2}\left|\sin\left(\omega_{\max}\tilde{t}\right)\right|}{v}\,.$$

Pronásobením $\omega_{\max}$ získáváme pro dané k rovnici

$$\omega^k_{\max}\frac{d - \frac{l}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{2v}{\omega^k_{\max} l}\right)^2}}{v} = 2\pi - \arccos\left(\frac{2v}{\omega^k_{\max} l}\right) + 2k\pi\,,$$

kde jsme využili toho, že

$$|\sin\varphi| = \sqrt{1 - \cos^2\varphi}\,.$$

Pro $\omega_{\min}$, tedy náraz rukojetí, lze postupovat podobně. Derivací vztahu pro složku rychlosti rukojeti ve směru x získáme vztah pro rychlost

$$v'_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v + \frac{\omega l}{2}\cos\left(\omega t\right).$$

[1] `http://www.knifethrowing.info/physics_of_knife_throwing.html`

a z požadavku na vynulování této rychlosti získáváme

$$\cos\left(\omega_{\max}\tilde{t}\right) = -\frac{2v}{\omega_{\max} l}\,,$$

$$\omega_{\min}^{k}\tilde{t} \in \left\{\arccos\left(\frac{2v}{\omega_{\min}^{k} l}\right) + (2k-1)\pi,\ 2\pi - \arccos\left(\frac{2v}{\omega_{\min}^{k} l}\right) + (2k-1)\pi\right\}.$$

Opět je pro nás podstatné druhé řešení, jelikož požadavek je nyní $\varphi \in (0, \pi)$.

Zvolme nyní nějaké ukázkové hodnoty, pro které se podíváme, jak by řešení mohlo vypadat, jelikož na papíře tyto rovnice nevyřešíme. Zvolme tedy $d = 10\,\mathrm{m}$, $l = 0{,}2\,\mathrm{m}$, $v = 50\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Uvědomme si, že pokud máme nůž roztočit dostatečně rychle, musí před zasažením terče prodělat určitý počet otáček. Tento počet otáček představuje hodnota k. Musíme tedy nejprve najít minimální k potřebné k tomu, abychom museli řešit rovnice pro třetí případ – čím větší k, tím rychlejší rotace.

Nůž poletí odhadem po dobu $t = d/v$, nás zajímá počet otáček pro frekvenci blízkou $\omega = 2v/l$. Minimální hodnotu k tedy můžeme odhadnout jako $k_{\min} = \omega t/2\pi = d/\pi l \doteq 16$. Pro nižší k již platí rovnice z prvního a druhého případu. Numericky tedy spočteme řešení pro $k = 16$ a vyšší. V tabulce 1 jsou mezní hodnoty ω pro jednotlivá $k < 16$, tedy pro případ, že nůž rotuje dostatečně pomalu na to, aby se špička nože nikdy nepohybovala směrem od stěny a platily rovnice pro první a druhý případ. V tomto případě je šířka pásu úhlových rychlostí pro každé k rovna $v\pi/d = 15{,}71\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$. V tabulce 2 jsou pak mezní hodnoty ω pro $k \geq 16$.

Tabulka 1: Mezní frekvence pro první a druhý případ.

k	$\dfrac{\omega_{\min}}{\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}}$	$\dfrac{\omega_{\max}}{\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}}$
0	15,708	31,416
1	47,124	62,832
2	78,540	94,248
3	109,956	125,664
4	141,372	157,080
5	172,788	188,496
6	204,204	219,911
7	235,619	251,327
8	267,035	282,743
9	298,451	314,159
10	329,867	345,575
11	361,283	376,991
12	392,699	408,407
13	424,115	439,823
14	455,531	471,239
15	486,947	502,655

Tabulka 2: Mezní frekvence pro třetí případ.

k	$\frac{\omega_{\mathrm{min}}}{\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}}$	$\frac{\omega_{\mathrm{max}}}{\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}}$	$\frac{\omega_{\mathrm{max}}-\omega_{\mathrm{min}}}{\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}}$
16	518,396	534,152	15,756
17	549,921	565,699	15,778
18	581,484	597,276	15,792
19	613,073	628,874	15,801
20	644,680	660,490	15,810
21	676,303	692,119	15,816
22	707,937	723,758	15,821
23	739,582	755,407	15,825
24	771,235	787,064	15,829
25	802,895	818,728	15,833
26	834,562	850,397	15,835
27	866,234	882,072	15,838
28	897,911	913,751	15,840
29	929,592	945,434	15,842
30	961,277	977,121	15,844
31	992,965	1 008,810	15,845
32	1 024,660	1 040,500	15,846

Tomáš Bárta
tomas@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.