

## Úloha V.5 ... plavala čočka po vodě

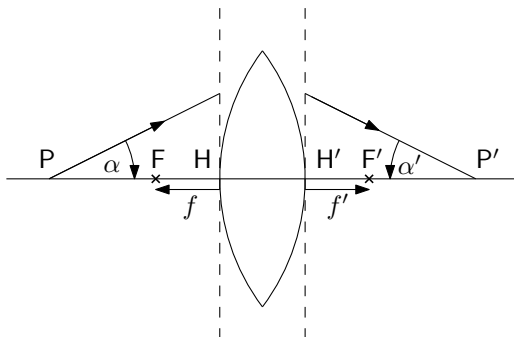
5 bodů; průměr 2,09; řešilo 22 studentů

Na hladině vody plove tenká bikonvexní (dvojvypuklá) čočka z lehkého materiálu. Poloměry křivosti obou povrchů jsou  $R = 20$  cm. Určete vzdálenost mezi obrazovým a předmětovým ohniskem čočky, jestliže index lomu vzduchu nad čočkou je  $n_a = 1$ , index lomu materiálu čočky je  $n_l = 1,5$  a index lomu vody je  $n_w = 1,3$ .

Bonus Předpokládejte, že se jedná o čočku tloušťky  $T = 3$  cm, uvnitř níž je symetricky umístěna vzduchová dutina tvaru bikonkávní čočky s poloměry křivosti  $r = 50$  cm a tloušťkou  $t = 1$  cm.

*Mírek nezapomněl na všemi oblíbenou optiku.*

Hlavní kámen úrazu při řešení většiny úloh z geometrické optiky jsou znaménkové chyby. Proto si hned na začátku musíme ujasnit, jakou znaménkovou konvenci budeme používat. Pomůže nám při tom obrázek 1. Za kladné považujeme všechny úsečky ve směru šíření paprsků a od vztazného bodu směrem nahoru. Vztaznými body jsou body na kulové ploše (pro poloměr křivosti) a hlavní body (v našem případě vždy průsečky kulové plochy s osou), od kterých měříme ohniskové vzdálenosti. Úhly jsou kladné, pokud jsou orientovány v kladném směru (proti směru hodinových ručiček). V obrázku je tedy  $f < 0$ ,  $f' > 0$ ,  $\alpha < 0$ ,  $\alpha' > 0$ .



Obr. 1: K vysvětlení znaménkové konvence.  $P$ ,  $P'$  jsou počáteční a koncový bod dráhy paprsku,  $H$ ,  $H'$  jsou předmětový a obrazový hlavní bod, od kterých měříme předmětovou a ohniskovou vzdálenost  $f$ ,  $f'$ .

Ačkoli to není v zadání výslovně uvedeno, automaticky předpokládáme, že se po nás požaduje výpočet v paraxiální aproximaci a že jsou splněny předpoklady umožňující aplikaci metod geometrické optiky<sup>1</sup>. Pro připomenutí: paraxiální aproximace je použitelná tehdy, jsou-li veškeré optické prvky centrované na společné ose a paprsky se vůči této ose šíří pod malými úhly.

Čočka, ať už tenká, tlustá či dutá, je soustavou několika za sebou ražených kulových lámavých ploch, které oddělují optická prostředí s obecně různými indexy lomu. Většina tabulek a učebnic uvádí vztahy pro ohniskové vzdálenosti čočky v jednom prostředí, tj. neuvažují případ, kdy by se čočka nacházela na rozhraní dvou prostředí s různými indexy lomu. K vyřešení úlohy proto budeme muset čočku považovat za dvě samostatné kulové plochy.

Podívejme se, jak se změní dráha paprsku při průchodu kulovou lámavou plochou. Náčrt situace je na obrázku 2. Paprsek vychází z bodu  $P$ , šíří se prostředím s indexem lomu  $n_1$ , láme

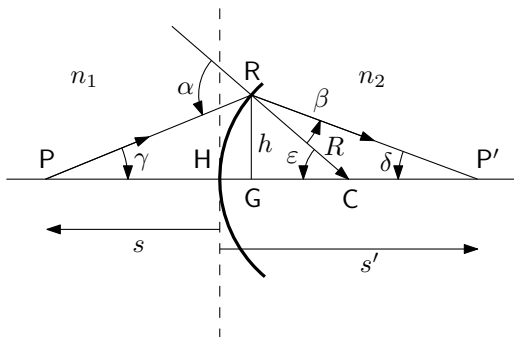
<sup>1</sup>Konkrétně požadujeme, aby byla vlnová délka světla řádově menší než rozměry optických prvků v optické soustavě.

se na kulové ploše, vchází do prostředí s indexem lomu  $n_2$  a opět protne optickou osu v bodě  $P'$ . Pro úhly v trojúhelníku  $PRC$  platí

$$\pi - \alpha - \gamma + \varepsilon = \pi \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\gamma + \varepsilon. \quad (1)$$

Všimněte si, že znaménko u úhlu  $\gamma$  je opačné, neboť jej měříme v záporném směru. Podobně získáme z trojúhelníku  $P'RC$  rovnost

$$\beta = \varepsilon - \delta. \quad (2)$$



Obr. 2: Rozbor průchodu paprsku kulovou lámavou plochou.  $C$  je střed kulové plochy,  $R$  její poloměr a  $s$ ,  $s'$  jsou orientované vzdálenosti průsečíků paprsku s osou měřené od hlavní roviny.

Nyní využijeme paraxiální aproximace. Ta říká, že se paprsky pohybují blízko osy, proto můžeme s dostatečnou přesností zaměňovat tangenty, siny a samotné velikosti úhlů a zároveň můžeme položit

$$\begin{aligned} |s| &= |PH| \approx |PG|, \\ |s'| &= |P'H| \approx |P'G|. \end{aligned}$$

Jinými slovy: kulový vrchlík v okolí optické osy nahrazujeme (hlavní) rovinou. Potom můžeme psát

$$\gamma \approx \frac{h}{s}, \quad \delta \approx \frac{h}{s'}, \quad \varepsilon \approx \frac{h}{R}. \quad (3)$$

Nakonec si uvědomíme, že v aproximaci nabývá Snellův zákon lomu tvaru

$$n_1 \alpha = n_2 \beta. \quad (4)$$

Do něj nyní dosadíme z rovnic (1), (2) a (3) a po několika jednoduchých algebraických úpravách dostaneme rovnici

$$n_1 \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{R} \right) = n_2 \left( \frac{1}{s'} - \frac{1}{R} \right). \quad (5)$$

Tato rovnice se pro svůj symetrický tvar nazývá Abbeův<sup>2</sup> invariant.

Jak tento výsledek využijeme k získání ohniskových vzdáleností čočky? Z definice platí, že předmět umístěný do předmětového ohniska se zobrazuje do nekonečna a naopak, předmět

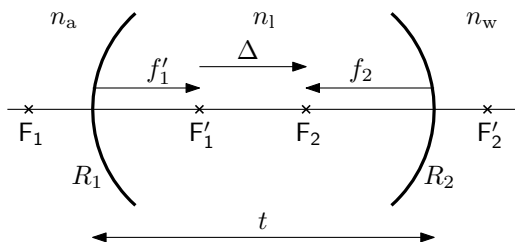
<sup>2</sup>Ernst K. Abbe (1840–1903), německý fyzik zabývající se vývojem optických přístrojů.

v nekonečnu se zobrazuje do obrazového ohniska. Když na základě této definice do (5) dosadíme  $1/s = 1/f$ ,  $1/s' = 0$ , snadno vyjádříme předmětovou ohniskovou vzdálenost kulové plochy

$$f = \frac{n_1}{n_1 - n_2} R. \quad (6)$$

Podobně pro  $1/s = 0$ ,  $1/s' = 1/f'$  dostaneme obrazovou ohniskovou vzdálenost

$$f' = \frac{n_2}{n_2 - n_1} R. \quad (7)$$



Obr. 3: Schéma čočky tloušťky  $t$ . Vzdálenost mezi lámavými plochami je popsána pomocí optického intervalu  $\Delta$ .

Nyní tyto poznatky aplikujeme na naši optickou soustavu ze zadání, která je načrtnuta na obrázku 3. Položíme prozatím  $t = 0$ , věnujeme se tedy tenké čočce. Ohniskové vzdálenosti příslušné prvnímu rozhraní značíme s indexem 1, druhému rozhraní necht přísluší index 2. Dále stačí pouze ve vzorcích (6), (7) provést nahrazení  $n_1 = n_a = 1$ ,  $n_2 = n_1$  pro první rozhraní a  $n_1 = n_1$ ,  $n_2 = n_w$  pro druhé rozhraní a nezapomenout, že v naší konvenci je poloměr druhé lámavé plochy roven  $-R$ . Získáme dvě dvojice ohniskových vzdáleností

$$f_1 = \frac{1}{1 - n_1} R, \quad f'_1 = \frac{n_1}{n_1 - 1} R, \quad (8)$$

$$f_2 = \frac{n_1}{n_w - n_1} R, \quad f'_2 = \frac{n_w}{n_1 - n_w} R. \quad (9)$$

Nyní by méně zkušeného řešitele mohlo napadnout, že stačí odečíst vzdálenost  $|F_1 F'_2|$  a máme hotovo. To je ovšem omyl. Body  $F_1$ ,  $F'_2$  přísluší jednotlivým lámavým plochám, nikoli celé optické soustavě. Budeme si proto ještě muset rozmyslet, jak se skládají ohniskové vzdálenosti při kombinaci dvou optických zobrazení.

Při odvozování vztahu pro skládání ohniskových vzdáleností nám pomůže obrázek 4. V části a) zavádíme pro popis optického rozhraní vzdálenosti ohniskového bodu od předmětu/obrazu

$$Z = s - f, \quad Z' = s' - f'. \quad (10)$$

Nyní s využitím Abbeova invariantu (5) a vztahů pro ohniskové vzdálenosti (6) a (7) odvodíme Gaussovu zobrazovací rovnici

$$\frac{f}{s} + \frac{f'}{s'} = 1 \quad (11)$$

a z definice příčného zvětšení  $\beta = Y'/Y$  určíme

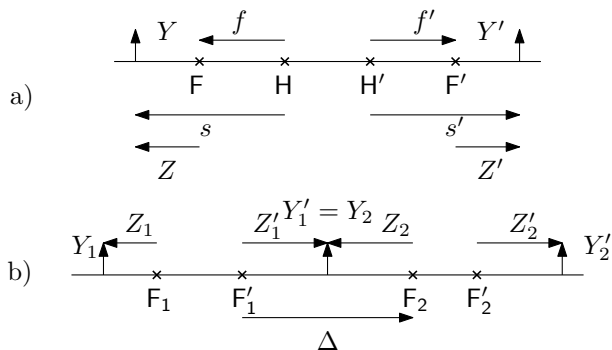
$$\beta = \frac{n_1 s'}{n_2 s}. \quad (12)$$

Dále získáme prostým dosazením z (10) do (11) a (12) užitečné vztahy

$$ZZ' = ff', \quad (13)$$

$$\beta = -\frac{Z'}{f'} = -\frac{f}{Z}, \quad (14)$$

které se nazývají Newtonovy zobrazovací rovnice.



Obr. 4: K ilustraci vztahů mezi vzdálenostmi v optických soustavách. Šipky  $Y$ ,  $Y'$  označují velikost předmětu a obrazu.

Než pokročíme, vraťme se ještě k definici hlavních bodů a ohniskových vzdáleností. Uvedli jsme, že v případě kulové lámavé plochy je hlavním bodem průsečík plochy s optickou osou. Pro složené optické soustavy však budeme potřebovat obecnou definici, která říká, že pro hlavní body platí  $\beta = 1$ , tj. nedochází k příčnému zvětšení. Ohniskové vzdálenosti se měří od těchto bodů k ohniskovým bodům.

Nyní už jsme připraveni, abychom odvodili vztah pro skládání ohniskových vzdáleností. Budeme přitom používat značení podle obrázku 4b. Naším cílem je nalézt polohy ohniskových a hlavních bodů soustavy. Ohniskové body nalezneme snadno. Stačí si uvědomit, že obraz vytvořený prvním prvkem v bodě  $Z'_1$  (zobrazujeme z nekonečna) představuje pro druhý prvek předmět. Potom stačí využít (13), dosadit  $Z_2 = Z'_1 - \Delta$  a polohu  $Z'_{2F'}$  obrazového ohniskového bodu soustavy vyjádříme jako

$$Z'_{2F'} = -\frac{f_2 f'_2}{\Delta} \quad (15)$$

a ze symetrie rovnou napíšeme i vztah pro polohu předmětového ohniska soustavy

$$Z_{1F} = \frac{f_1 f'_1}{\Delta}. \quad (16)$$

Dále vyjádříme z (14) příčná zvětšení

$$\frac{Y'_1}{Y_1} = -\frac{Z'_1}{f'_1}, \quad \frac{Y'_2}{Y_2} = -\frac{Z'_2}{f'_2}$$

a jejich vynásobením (nezapomeňte, že  $Y'_1 = Y_2$ ) získáme příčné zvětšení celé soustavy

$$\frac{Y'_2}{Y_1} = \frac{Z'_2 Z'_1}{f'_2 f'_1}.$$

Vidíme, že potřebujeme vyjádřit  $Z'_2$  a  $Z'_1$ . Nebudeme se zde už příliš rozepisovat; z obrázku platí  $Z'_1 - Z_2 = \Delta$  a aplikací (13) dostaneme

$$Z'_1 = \frac{f_1 f'_1}{Z_1} \quad (17)$$

a

$$Z'_2 = \frac{f_2 f'_2}{\frac{f_1 f'_1}{Z_1} - \Delta}, \quad (18)$$

z čehož nakonec

$$\frac{Y'_2}{Y_1} = \frac{f_1 f_2}{f_1 f'_1 - \Delta Z_1}.$$

Z definice hlavního bodu  $Y'_2/Y_1 = 1$  ihned dostaneme polohu předmětového hlavního bodu

$$Z_{1H} = \frac{f_1 f'_1 - f_1 f_2}{\Delta} \quad (19)$$

a dosazením  $Z_1 = Z_{1H}$  do (18) určíme polohu obrazového hlavního bodu

$$Z'_{2H'} = \frac{f'_2 f'_1 - f_2 f'_2}{\Delta}. \quad (20)$$

Rovnice (15), (16) a (19), (20) nám určují polohy všech kardinálních bodů, které potřebujeme k nalezení předmětového ohniska  $\mathcal{F}$  a obrazového ohniska  $\mathcal{F}'$ . Zbývá dosadit

$$\mathcal{F} = Z_{1F} - Z_{1H} = \frac{f_1 f_2}{\Delta}, \quad (21)$$

$$\mathcal{F}' = Z'_{2F'} - Z'_{2H'} = -\frac{f'_1 f'_2}{\Delta}. \quad (22)$$

Teď už se pomalu blížíme do finále. Pokud zapíšeme optický interval s přihlédnutím ke znaménkové konvenci jako  $\Delta = f_2 - f'_1$ , máme ohniskové vzdálenosti soustavy vyjádřeny pomocí ohniskových vzdáleností jednotlivých lámavých ploch  $f_1$ ,  $f'_1$  a  $f_2$ ,  $f'_2$ , které jsme určili v (8) a (9). Vzdálenost mezi obrazovým a předmětovým ohniskem tenké čočky plovoucí na vodě je tedy

$$\mathcal{F}' - \mathcal{F} = \frac{-f'_1 f'_2 - f_1 f_2}{f_2 - f'_1} = \dots = \frac{n_w + 1}{2n_1 - n_w - 1} R.$$

Po číselném dosazení vyjde  $\mathcal{F}' - \mathcal{F} \doteq 66$  cm. Sami si můžete zkusit dosazovat do

$$\mathcal{F} = \frac{-1}{2n_1 - n_w - 1}, \quad \mathcal{F}' = \frac{n_w}{2n_1 - n_w - 1}$$

různé hodnoty indexů lomu a ověřit si, že se vzorce chovají podle očekávání.

## Bonus

Jak jsme v základní části úlohy zjistili, složit dvě optická zobrazení je poměrně náročný úkol. V bonusu jsou čtyři lámavé plochy a tři oblasti volného šíření. To je celkem sedm zobrazení.

Pokud jste se po přečtení předchozího odstavce nešli oběsit, jistě rádi uslyšíte, že zde existuje záchrana, a tou je lineární algebra. Nejprve musíme vymyslet, jak vhodně popsat paprsek. Necht je optická osa totožná s kartézskou osou  $z$  a paprsek se pohybuje v rovině  $yz$ . Paprsek popíšeme parametry  $y_i$ ,  $\alpha_i$ , které představují vzdálenost od optické osy a směr šíření (kladně vzatý úhel, který paprsek svírá s osou). Stále používáme paraxiální aproximaci, takže  $\sin \alpha_i \approx \tan \alpha_i \approx \alpha_i$ . Přejít paprsku ze stavu  $(y_0, \alpha_0)^\top$  do  $(y_1, \alpha_1)^\top$  realizujeme působením matice přenosu  $2 \times 2$ , která se obvykle zapisuje ve tvaru

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

pročež se jí také přezdívá ABCD-matice. Její užití je jednoduché. Chtějme kupříkladu, aby se paprsek posunul ve směru optické osy o  $l$  a stočil se o úhel  $\beta$  v kladném směru. Potom má platit

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 - l\alpha_0 \\ \alpha_0 - \beta \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} y_0 \\ \alpha_0 \end{pmatrix} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & -l \\ -\beta/y_0 & 1 \end{pmatrix}.$$

V naší úloze nás bude zajímat pouze translace a pak lom na kulovém rozhraní. K odvození uijeme značení z obrázku 2 pro odvození Abbeova invariantu. Počáteční úhel je  $\gamma$ , koncový  $\delta$ , platí

$$\delta = \varepsilon - \beta = \frac{h}{R} - \frac{n_1}{n_2} \alpha = \frac{h}{R} - \frac{n_1}{n_2} (\varepsilon - \gamma) = \frac{h}{R} \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right) + \frac{n_1}{n_2} \gamma.$$

Abychom sjednotili značení, provedeme záměnu  $\bar{h} = y_1 = y_0$  (k translaci nedochází),  $\gamma = \alpha_0$ ,  $\delta = \alpha_1$ ,  $n_1 = n$ ,  $n_2 = n'$ . Matice pro lom na kulovém rozhraní má potom tvar

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R} \left(1 - \frac{n}{n'}\right) & \frac{n}{n'} \end{pmatrix}.$$

Zkusme nyní aplikovat nabyté poznatky na naši základní úlohu. Matici lomu na prvním rozhraní označíme  $M_1$ , na druhém rozhraní  $M_2$ . Výslednou matici dostaneme jako součin (pozor na pořadí!)

$$M = M_2 M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{R} \left(1 - \frac{n_1}{n_w}\right) & \frac{n_1}{n_w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R} \left(1 - \frac{1}{n_1}\right) & \frac{1}{n_1} \end{pmatrix},$$

kde jednotlivé prvky výsledné matice jsou

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = -\frac{1}{R} \left(1 - \frac{n_1}{n_w}\right) + \frac{n_1}{n_w R} \left(1 - \frac{1}{n_1}\right), \quad D = \frac{1}{n_w}.$$

Moudří už vědí, že ohniskovou vzdálenost z matice získáme jako  $\mathcal{F}' = 1/C$ . To si ale musíme nejdříve dokázat.

Nejprve si rozmyslíme, že determinant matice lomu je roven  $n/n'$ , a jelikož je determinant součinu roven součinu determinantů, bude pro soustavu kulových ploch platit  $\det M = n_i/n_o$ , kde  $n_i$  je index lomu ve vstupním prostředí a  $n_o$  ve výstupním. Dále provedeme následující

úvahu: jestliže paprsky vycházející z předmětového ohniska vycházejí ze soustavy rovnoběžně s osou, musí platit  $\alpha_o = 0$ . Dostáváme tedy soustavu rovnic

$$\begin{aligned}y_o &= Ay_i + B\alpha_i, \\ 0 &= Cy_i + D\alpha_i,\end{aligned}$$

ke které ještě z jednoduché geometrie (stále jsme v paraxiální aproximaci) doplníme vztah

$$\alpha_i = \frac{y_o}{f}.$$

Řešením těchto rovnic dostaneme

$$f = -\frac{AD - BC}{C} = -\frac{\det M}{C} = -\frac{n_i}{n_o} \frac{1}{C}.$$

Pro obrazovou ohniskovou vzdálenost dostaneme zcela analogicky

$$f' = \frac{1}{C},$$

výpočet ponecháváme na čtenáři.

Nyní už se konečně přesuneme k řešení bonusové otázky. Při průchodu optickou soustavou dochází celkem ke čtyřem lomům a třem translacím. Matice celé soustavy je dána součinem

$$\begin{aligned}M &= M_7 M_6 M_5 M_4 M_3 M_2 M_1, \\ M_7 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{R} \left(1 - \frac{n_1}{n_w}\right) & \frac{n_1}{n_w} \end{pmatrix}, \quad M_6 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{T-t}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ M_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{n_1}\right) & \frac{1}{n_1} \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ M_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{r} (1 - n_1) & n_1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{T-t}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R} \left(1 - \frac{1}{n_1}\right) & \frac{1}{n_1} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Nyní nám nezbyvá než matice vynásobit. Asociativita maticového násobení zde příliš nepomáhá, můžeme si však všimnout, že při násobení zleva nás u každé matice vzniklé součinem zajímá vždy jen druhý řádek. Tím si můžeme počet operací snížit na polovinu. I tak si ale dokážeme rozmyslet, že obecný výsledek nepůjde upravit do nějakého hezkého tvaru. Proto budeme počítat již přímo s dosazenými hodnotami ze zadání – výpočet nedoporučujeme provádět na papíře. Výsledkem je

$$C \doteq 1,16 \text{ m}^{-1} \quad \Rightarrow \quad f' \doteq 86 \text{ cm}, \quad f \doteq -66 \text{ cm}.$$

Vzdálenost obrazového a předmětového ohniska je potom  $f' - f + H$ , kde  $H$  je vzdálenost hlavních rovin soustavy. Ta bude nejspíš porovnatelná s tloušťkou  $T$  velké čočky (ve skutečnosti je zde  $H$  v řádu milimetrů), proto můžeme přibližně psát pro vzdálenost ohnisek

$$f' - f + H \approx f' - f \doteq 150 \text{ cm}.$$

Vzdálenost je výrazně vyšší než v prvním případě, což jsme mohli očekávat, neboť bikonkávní čočka z materiálu s nižším indexem lomu než okolí funguje jako rozptylka.

Na závěr si ještě zkusme spočítat, jak by se výsledek bonusové úlohy změnil, kdyby čočka i dutina byly tenké. Matice dutiny má tvar

$$M_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{r} \left(1 - \frac{1}{n_1}\right) & 1 \end{pmatrix}.$$

Tuto matici vynásobíme zleva a zprava maticemi lomu vnějších rozhraní, dostaneme

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{R} \left(1 - \frac{n_1}{n_w}\right) & \frac{n_1}{n_w} \end{pmatrix} M_d \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R} \left(1 - \frac{1}{n_1}\right) & \frac{1}{n_1} \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R n_w} [n_1 - n_w + \left(1 - \frac{2R}{r}\right) (n_1 - 1)] & \frac{1}{n_w} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Opět se nebudeme namáhat s obecnými výpočty, číselně spočteme  $f' \doteq 87$  cm,  $f \doteq -67$  cm. Vzdálenost ohnisek je potom

$$f' - f = 154 \text{ cm}.$$

Vidíme, že se aproximace projevila až na třetí platné číslici. To by nás nemělo překvapovat, jelikož tloušťka čočky je řádově menší než ohniskové vzdálenosti.

#### *Komentáře k došlým řešením*

V prvé řadě se omlouváme za překlep v zadání – čočka měla být skutečně dvojbypuklá, jak je napsáno v závorce, nikoli bikonkávní, což znamená přesný opak. Správný termín pro dvojbypuklou čočku je bikonvexní. Zadání bylo opraveno až po skončení termínu pro odeslání úlohy, proto pokud jste u poloměru křivosti použili opačná znaménka, nebylo to považováno za chybu.

Velká část řešitelů si bohužel neuvědomila, že tzv. rovnice výrobců čoček (lensmaker's equation) platí pouze pro čočku, která se nachází v prostředí s jedním, konstantním indexem lomu. Na rozhraní dvou prostředí je potřeba vyjít ze základních vztahů pro lámavou plochu, jak je popsáno ve vzorovém řešení. Proto zde chci pochválit ty, jež se nenechali zmást a dospěli při řešení této poměrně náročné úlohy ke správnému výsledku. Jsou to: D. Jochcová, K. Kolář, M. Mezera, D. Pajer, D. Pittnerová a D. Vokrouhlický. Jen tak dál.

*Miroslav Hanzelka*  
mirek@fykos.cz

---

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.