Úvodem

Milí FYKOSáci,
tato brožurka se k vám dostává s mírným zpožděním, ale z našich mladých let víme, že největší chuť k řešení úloh přichází večer před ukončením série, a proto věříme, že vám brožurka ještě bude k užitku. Doufáme, že jste si užili právě proběhnuvší FYKOSí Fyziklání, a že pokud jste se neumístili na předních příčkách, tak jste se alespoň při týmovém řešení úloh dobře bavili. Další možnost setkat se s ostatními řešiteli FYKOSu budete mít začátkem dubna, kdy se bude konat jarní soustředění. Všem pilným studentům už jistě dorazily pozvánky, tak prosím neotálejte s odpovědí, ať už jste přímo pozvaní či náhradníci.
Až budete listovat brožurkou, zjistíte, že na konci je několik prázdných listů. Nejedná se o naši lenost bílou plochu vyplnit – tyto prázdné listy můžete využít při řešení experimentální úlohy, která má tentokrát název „trhni si!“. Mnoho skvělých nápadů a úspěchů při řešení přejí

Organizátoři

Zadání IV. série

Termín uploadu: 1. 3. 2016 23.59
Termín odeslání: 29. 2. 2016

Úloha IV.1 ... kofolová (2 body)

Mějme kofolu s energetickou hodnotou $Q_\mathrm{k} = 1\,360\,\mathrm{kJ{\cdot}kg^{-1}}$ a teplotou $t_k = 24\,{}^\circ\mathrm{C}$ a kofolu bez cukru s energetickou hodnotou $Q_\mathrm{bez} = 14{,}4\,\mathrm{kJ{\cdot}kg^{-1}}$ a teplotou $t_\mathrm{bez} = 4\,{}^\circ\mathrm{C}$. Pokud předpokládáme, že v jiných vlastnostech se kofoly od vody neliší, při jaké teplotě můžeme pít směs těchto kapalin tak, aby byla celková získaná energie nulová?

Úloha IV.2 ... mozek v mikrovlnce (2 body)

Jak daleko musí být člověk od BTS (základnové převodní stanice), aby působení jejího vysílání na mozek bylo srovnatelné s vysíláním mobilu přímo u hlavy? Předpokládejte, že BTS vysílá rovnoměrně do poloprostoru a má vysílací výkon 400 W. Vysílací výkon mobilu je 1 W.

Úloha IV.3 ... šetřeme lesy (3 body)

Máme roli toaletního papíru o poloměru $R = 8\,\mathrm{cm}$ s dutou částí o poloměru $r = 2\,\mathrm{cm}$. Každá vrstva namotaného papíru má tloušťku $d = 200\,\mathrm{\mu m}$ a vrstvy na sebe dokonale přiléhají. O kolik útržků více v takovéto roli máme, pokud má jeden útržek délku $l_1 = 9\,\mathrm{cm}$, než když má jeden útržek délku $l_2 = 13\,\mathrm{cm}$? Jako součást řešení vyžadujeme odhad chyby použité aproximace.
Bonus: Vypočtěte přesnou délku spirály, kterou papír vytváří.

Úloha IV.4 ... bubliny znovu spojeny! (4 body)

Kolik nejméně stejně velkých mýdlových bublinek o poloměru r se musí spojit, aby vytvořily jednu bublinu, která má poloměr alespoň $3r$? Uvažujte, že vzduch v bublinách má stále stejnou teplotu.

Úloha IV.5 ... skluzavka 5 bodů

Na vodorovné ploše jsou rovnoběžně položeny dva stejné kvádry o hmotnosti m a délce l. Vzdálenost bližších stěn těchto kvádrů je $2x_0$. Mezi kvádry začneme lít vodu objemovým tokem Q. Na krajích těchto kvádrů jsou mantinely zabraňující odtékání vody z prostoru mezi kvádry. Statický koeficient tření mezi kvádrem a podložkou je f_0 a dynamický f. Tření mezi kvádry a mantinely neuvažujte. Jaká je podmínka na f_0, aby se kvádry vůbec nerozpohybovaly? V případě, kdy je f_0 dostatečně malé, vypočítejte závislost zrychlení kvádrů na jejich poloze a vzdálenost, ve které kvádry zastaví.

Veškerý pohyb vody považujeme za dostatečně pomalý, takže v ní nevznikají žádné vlny ani víry, nezahřívá se třením a ani sama nemá žádnou kinetickou energii. Protože je tedy i Q malé, můžete uvažovat, že přilévání další vody po rozpohybování kvádrů nemá na jejich pohyb vliv.

Bonus: Najděte podmínku pro překlopení kvádru.

Úloha IV.P ... dietní věž 5 bodů

Jak vysoká věž by se dala postavit z hliníkových plechovek od dietního nápoje kolového typu?

Úloha IV.E ... trhni si! 8 bodů

Změřte mez pevnosti kancelářského papíru v tahu. Ideálně použijte co nejméně potištěnou část brožurky, ve které vám přišlo zadání (pro tisk je využíván papír $80\,\mathrm{g{\cdot}m^2}$).

Úloha IV.S ... pracovní 6 bodů

a) Z nerovnosti

$$\Delta S_{\mathrm{tot}} \geq 0$$

ze seriálu vyjádřete W a odvoďte tak nerovnost pro práci

$$W \leq Q\left(1 - \frac{T_{\mathrm{C}}}{T_{\mathrm{H}}}\right) .$$

b) Vypočítejte účinnost Carnotova cyklu bez použití entropie.

Pomůcka: Napište čtyři rovnice spojující čtyři vrcholy Carnotova cyklu

$$p_1V_1 = p_2V_2\,, \quad p_2V_2^{\kappa} = p_3V_3^{\kappa}\,, \quad p_3V_3 = p_4V_4\,, \quad p_4V_4^{\kappa} = p_1V_1^{\kappa}$$

a vynásobte je všechny čtyři spolu. Po úpravě dostanete

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4} .$$

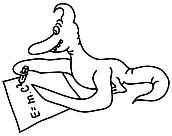
Dále stačí použít vzorec pro práci při izotermickém procesu: pokud jde proces z objemu V_{A} do V_{B}, práce vykonaná na plynu je

$$nRT \ln \frac{V_{\mathrm{A}}}{V_{\mathrm{B}}} .$$

Teď si už jen stačí uvědomit, že práce při izotermickém ději je rovna teplu (se správným znaménkem) a vypočítat získanou práci (vzpomeňte si, že adiabatické procesy nepřispívají) a odevzdané teplo. *Jako řešení stačí doplnit detaily tohoto postupu.*

c) Minule jste pracovali s pV a Tp diagramem. Proveďte podobné cvičení s TS diagramem, tedy nakreslete do něj izotermický, izobarický, izochorický a adiabatický proces. Nakreslete do diagramu též cestu plynu v Carnotově cyklu a označte správně směr a vrcholy, aby souhlasili s obrázkem v seriálu.

d) V seriálu jsme zmínili, že někdy je třeba dávat pozor na přijaté a odevzdané teplo. Někdy se totiž to, zda teplo přijímáme anebo dáváme, mění během procesu. Jedním z příkladů je proces
$$p = p_0 e^{-\frac{V}{V_0}} \,,$$
kde p_0 a V_0 jsou konstanty. Určete, pro jaké hodnoty V (při rozpínaní) proudi teplo do plynu, a kdy z plynu.



Řešení III. série

Úloha III.1 ... bláznivá rybička

2 body; průměr 1,70; řešilo 89 studentů

V akváriu ve tvaru koule s poloměrem $r = 10\,\mathrm{cm}$ plně naplněném vodou plavou v opačných směrech dvě stejné rybičky. Rybička má průřez $S = 5\,\mathrm{cm}^2$, Newtonův odporový koeficient $C = 0{,}2$ a plave rychlostí $v = 5\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ vůči vodě. Jak dlouho musí rybičky v akváriu plavat, aby ohřály vodu o 1 stupeň Celsia? Tepelné ztráty a biologické procesy v rybičkách zanedbejte.

Kubovi byla zima v bazénu.

Při plavbě akváriem musí rybičky překonávat odpor vody. Každá tedy koná práci W. Jelikož zanedbáváme veškeré tepelné ztráty (z akvária do vzduchu), biologické procesy v rybičkách, objem rybiček atp., veškerá rybičkami vykonaná práce se předá vodě ve formě tepla. Můžeme tedy psát, že

$$2W = Q\,.$$

V tomto případě je odporová síla celou dobu konstantní, a tak z klasické mechaniky víme, že práce, kterou rybička vykoná, je rovna $W = F_\mathrm{O} s$, kde F_O je Newtonova odporová síla prostředí, kterým se rybička pohybuje a s je dráha, po které tato síla působí. Pro Newtonovu odporovou sílu platí rovnice

$$F_\mathrm{O} = \frac{1}{2} C \varrho S v^2\,,$$

kde C je Newtonův odporový koeficient, S je průřez rybičky, ϱ je hustota prostředí (tedy vody) a v je její rychlost. Jelikož je rychlost rybičky celou dobu konstantní, pro dráhu platí vztah $s = vt$. Dosazením těchto rovnic do sebe můžeme psát

$$W = \frac{1}{2} C \varrho S v^3 t\,.$$

Nyní jsme si vyjádřili práci, kterou vykoná jedna rybička. Dále si vyjádřeme teplo Q. To můžeme vyjádřit z kalorimetrické rovnice jako

$$Q = mc\Delta T\,.$$

V této rovnici je c měrná tepelná kapacita vody a jedná se o úplně jinou veličinu než Newtonův koeficient odporu C. Hmotnost vody v akváriu můžeme spočítat jednoduše jako $m = V\varrho$. Akvárium je kulového tvaru a známe jeho vnitřní poloměr, objem tedy spočteme jako

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3\,.$$

Spojením výše zmíněných rovnic dostaneme, že

$$Q = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho c \Delta T$$

a dosazením do původní rovnice $2W = Q$

$$2 \cdot \frac{1}{2} C \varrho S v^3 t = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho c \Delta T\,.$$

Z této rovnice vyjádříme čas, jakožto jedinou neznámou

$$t \doteq \frac{4\pi r^3 c\Delta T}{3CSv^3}\,.$$

Číselným dosazením dostaneme, že $t = 18{,}2\,\mathrm{h}$.

Jakub Sláma
`slama@fykos.cz`

Úloha III.2 ... alchymista začátečník

2 body; průměr 1,69; řešilo 70 studentů

Náš nejmenovaný mladý alchymista, říkejme mu Jirka N., se naučil používat elektrolýzu a měřit elektrochemický ekvivalent látky. Dokonce se mu podařilo naměřit u jednoho vzorku hodnotu elektrochemického ekvivalentu relativně přesně, a to $A = (6{,}74 \pm 0{,}01) \cdot 10^{-7}\,\mathrm{kg{\cdot}C^{-1}}$. Ale sám si neví rady, jak určit, o jakou látku se jedná. Poraďte mu! *Karel učil elektrolýzu.*

Úvod k elektrolýze a úloze

Nejprve si připomeneme něco o tom, jaké vztahy se týkají elektrolýzy. Jedná se o tzv. Faradayovy zákony. První z nich nám říká, že hmotnost látky vyloučené na elektrodě je přímo úměrná náboji, který prošel elektrolytem. Zákon můžeme zapsat pomocí rovnice $m = AQ$, kde konstantu úměrnosti A nazýváme elektrochemickým ekvivalentem látky. Ta se pro různé látky může lišit. Naopak pro některé dvě různé látky může být velice podobná.

Druhý Faradayův zákon nám pak říká, že látková množství vyloučená na elektrodách stejným nábojem jsou chemicky ekvivalentní. Tedy A bude přímo úměrně záviset na molekulové molární hmotnosti M_m dané látky a dále nepřímo úměrně na tom, jaké oxidační číslo (v absolutní hodnotě – ν) má vylučovaná látka. Můžeme jej zapsat jako

$$A = \frac{M_\mathrm{m}}{F\nu}\,, \tag{1}$$

kde $F = 9{,}65 \cdot 10^4\,\mathrm{C{\cdot}mol^{-1}}$ je Faradayova konstanta.

Nyní se vraťme k našemu konkrétnímu zadání. Jirka N. nám toho moc o látce neprohlásil. Budeme ale předpokládat, že se na elektrodě vylučoval nějaký chemický prvek. Tedy ne nějaké celé molekuly, což by také mohlo nastat. Současně budeme předpokládat, že se nejedná o směs různých sloučenin, ze kterých se prvek uvolňuje, ale že se v elektrolytu vyskytoval pouze v jednom oxidačním čísle. Pokud by se mohlo jednat o směs v libovolném poměru, tak by to bylo další docela zajímavou komplikací. Samozřejmě musíme mít na paměti, že chemický prvek se skládá, obvykle, z více izotopů. Uvažovat má smysl pouze izotopy, co jsou dostatečně stabilní na to, aby vůbec mohly být proměřeny. Například u poločasu rozpadu jedna sekunda bychom obvyklými metodami měření naměřili spíše produkty, na které se daný izotop rozpadá.

Další nejistotou je, v čem vlastně probíhá elektrolýza. Obvykle si člověk představí vodný roztok dané látky. Elektrolýza ovšem může probíhat i přímo v tavenině dané látky nebo v roztoku jiné kapaliny než vody. Argument v tom smyslu, že daná látka není rozpustná ve vodě, tedy není dostatečný k prohlášení, že to daný prvek být nemůže.

Vyjádříme z (1) molekulovou molární hmotnost (a máme na paměti, že jde vlastně o atomovou a ne molekulovou)

$$M_\mathrm{m} = AF\nu\,.$$

No a nyní prostě zkusíme dosazovat různá přirozená čísla za ν a hledat v periodické tabulce prvků.[1] Respektive hledat izotopy jednotlivých prvků, co jsou blízko tomu, který má danou atomovou hmotnost.

Oxidační číslo 1

První atomová hmotnost, která nás zajímá je 65, tomu odpovídá měď (Cu). ^{65}Cu je jeden ze dvou stabilních izotopů a vyskytuje se v přírodě[2] v zastoupení cca 31 %. Druhým izotopem je ^{63}Cu. Pokud bychom tedy měli relativně izotopově čistou měď 65, pak by měla právě takové A. Měli bychom ještě zkontrolovat, jestli se měď vyskytuje v tomto oxidačním čísle, což se vyskytuje – např. CuCl. Byť se jedná o látky, které se špatně rozpouští ve vodě a na vzduchu v průběhu delší doby (týdny, měsíce) dojde k chemické reakci vedoucí ke změně oxidačního čísla na Cu^0 a Cu^{+2}, tak mohlo jít o elektrolýzu např. stále syceného roztoku CuCl ve vodě tuhým CuCl na dně či o elektrolýzu jeho taveniny.

Nechceme ale naše první hmotnostní číslo 65 zanedbat, a proto se podíváme i na okolní prvky v periodické tabulce. Nikl[3] se vyskytuje stabilní v nejvyšším nukleonovém čísle 64, tedy ten měřen nebyl. Zinek[4] se pak vyskytuje v přírodě v nukleonových číslech 64 i 66 a je možné připravit dokonce i izotop 65, který má poločas rozpadu 244 dnů. Ten se sice obvykle vyskytuje v oxidačním čísle II, ale jsou známy sloučeniny, kde efektivně vystupuje s oxidačním číslem I – obsahují ionty ${Zn_2}^{2+}$. Mohlo by jít tedy i o zinek. Gallium[5] se pak v nukleonovém čísle 65 s poločasem rozpadu, který by stál za řeč, nevyskytuje.

Oxidační číslo 2

Pokračujme s $\nu = 2$. První prvek, co se vyskytuje s nukleonovým číslem 130 a nerozpadne se příliš rychle, je tellur.[6] 130 je sice radioaktivní izotop, ale jeho dlouhý poločas rozpadu, který je řádově $8 \cdot 10^{20}$ let vede k tomu, že jde o v přírodě nejčastěji se vyskytující izotop a dá se o tomto prvku z hlediska délky života člověka říkat, že je stabilní. Sice je nejčastější v oxidačním čísle +4, ale vyskytuje se i v oxidačních číslech +2 a −2. Opět jde o problematické sloučeniny co do rozpustnosti ve vodě a reaktivitě na vzduchu, ale elektrolýza taveniny by možná byla.

Jód se v nukleonovém čísle 130 nevyskytuje.[7] Leda by šlo o směs dvou různých radioaktivních izotopů.

Xenon[8] je sice stabilní prvek přímo v izotopu 130. Ale jde o relativně málo reaktivní prvek, který obecně nevytváří moc sloučenin a většina z nich je v oxidačním čísle 0. Existují sice i sloučeniny s oxidačním číslem +2, ale asi nepůjde zrovna o nejlepší kandidáty na elektrolýzu.

Cesium[9] se vyskytuje striktně s oxidačním číslem +1, což nás jistě potěší. A když zjistíme, že jediný stabilní izotop je 133 a izotop 130 má poločas rozpadu půl hodiny, tak si říkáme, proč jsme o něm vlastně uvažovali.

---

[1] Například v této: `http://www.ptable.com`, kde si v tabulce izotopů můžete zobrazit jednotlivé prvky po izotopech a jejich poločasy rozpadu.

[2] `https://cs.wikipedia.org/wiki/Měď`

[3] `https://cs.wikipedia.org/wiki/Nikl`

[4] `https://cs.wikipedia.org/wiki/Zinek`

[5] `https://cs.wikipedia.org/wiki/Gallium`

[6] `https://en.wikipedia.org/wiki/Tellurium`

[7] `https://en.wikipedia.org/wiki/Iodine`

[8] `https://cs.wikipedia.org/wiki/Xenon`

[9] `https://cs.wikipedia.org/wiki/Cesium`

Baryum[10] má izotop 130 jako nejlehčí z těch relativně stabilních. Jeho poločas rozpadu je ještě delší než u telluru. Mohlo by tedy jít o něj, zejména s ohledem na to, že se vyskytuje prakticky jenom v oxidačním čísle +2.

Lanthan a další prvky pak už izotop 130 a nižší mají příliš nestabilní na naši elektrolýzu.

Oxidační číslo 3

Pokročili jsme k oxidačnímu číslu 3. Teď už se zaměřujeme na izotopy prvků s nukleonovým číslem 195. Osmium a iridium to kvůli nestabilitě nebude (stejně jako další předchozí prvky). Mohlo by jít o platinu,[11] která se v tomto izotopu vyskytuje stabilní a jedná se současně o nejhojněji se vyskytující izotop v přírodě. Ale docela velký problém je oxidační číslo 3. Platina se vyskytuje většinou v oxidačním čísle +2 a +4. Pokud by se mělo jednat o ni, tak by muselo jít pravděpodobně o směs dvou sloučenin, ve kterých má různou mocnost, což jsme si řekli, že nebudeme předpokládat.

Docela nadějné je zlato.[12] Poločas rozpadu má 186 dne a současně se vyskytuje nejčastěji v oxidačním čísle +3. A to bude pravděpodobně poslední vážný kandidát. Rtuť[13] má totiž v izotopu 195 poločas rozpadu 10 hodin a vyskytuje se jenom v oxidačních číslech +1 a +2. Thallium a další prvky se pak vyskytují až v těžších izotopech.

Oxidační čísla 4 a vyšší

Oxidační číslo by odpovídalo nukleonovému číslu 260. Prvním prvkem poločasem rozpadu delším než hodina, je mendelevium.[14] ^{260}Md má poločas rozpadu v řádu desítek dnů, ale jeho chemické sloučeniny jsou pouze oxidačního čísla +2 a +3. Nobelium opět není moc stabilní a nevyskytuje se v oxidačním čísle 4. Lawrencium má oxidační číslo pouze +3. Rutherfordium by konečně mělo oxidační číslo +4, ale jeho reálnost naměření kazí poločasy rozpadu izotopů 206 a nižších, z nichž nejdelší jsou v řádu sekund. Další prvky jsou pak opět nestabilní čí vůbec nebyly pozorovány v izotopu s nukleonovým číslem 260 či nižším.

Oxidační čísla 5 a vyšší jsou už pak z hlediska současného poznání u prvků nemožná, protože nejtěžší pozorované izotopy měly nukleonové číslo kolem 293, a to s milisekundovými poločasy rozpadu.

Povzdech autora a závěr

Jak vidíte, tak pokud si vyberete jeden konkrétní prvek (měď) a jeho jeden konkrétní stabilní izotop (65) a oxidační číslo (1), ve kterém se může vyskytovat, na základě toho určíte A a pak budete hledat další možnosti, co se nám to mohlo v rámci elektrolýzy se stejným naměřeným A vyloučit na elektrodě, tak dostanete velice mnoho možností.

Pro vyřešení úlohy za plný počet bodů nebylo nutné nalézt všechna řešení, ale zejména popsat postup a uvážit alespoň většinu uvedených komentářů autorského řešení.

Po předchozí diskuzi bychom mohli prohlásit, že půjde pravděpodobně o měď či nikl, nebo docela pravděpodobně o tellur či baryum, nebo taky o zlato. A nebo měl Jirka nějakou záludnou

[10] `https://en.wikipedia.org/wiki/Barium`
[11] `https://en.wikipedia.org/wiki/Platinum`
[12] `https://en.wikipedia.org/wiki/Gold`
[13] `https://en.wikipedia.org/wiki/Mercury_(element)`
[14] `https://en.wikipedia.org/wiki/Mendelevium`

směs či složitější sloučeninu. Nebo dokáže změřit úplně zázračně elektrolýzu prvku s velice krátkým poločasem rozpadu.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

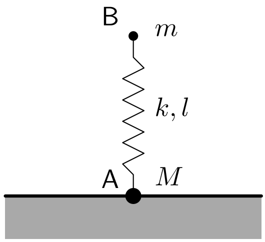
Úloha III.3 ... kdy vyskočí?

3 body; průměr 1,84; řešilo 61 studentů

Mějme nehmotnou pružinu o tuhosti k. Na jednom jejím konci je připevněno závaží o hmotnosti m, na jejím druhém konci je připevněno druhé závaží o hmotnosti M. Tuto sestavu položíme na vodorovnou desku tak, že závaží o hmotnosti M bude ležet na desce a závaží o hmotnosti m bude trčet na pružině přímo nad prvním závažím. Soustava je v rovnovážném stavu (tj. první závaží nekmitá) a délka pružiny v tomto stavu je l. Určete jak moc musíme pružinu stlačit, aby po jejím uvolnění závaží o hmotnosti M nadskočilo. Uvažujte pouze vertikální pohyb.

Michalovi byla zima, a tak hrál pružinky.

Celou sestavu si budeme představovat jako dva hmotné body spojené pružinou (viz 1) a budeme uvažovat jen síly působící ve vertikálním směru.



Obr. 1: Náčrtek problému v situaci, kdy je soustava v klidu

V tomto klidovém stavu nebude závaží B kmitat, výslednice sil na něj působících tedy musí být v tomto okamžiku nulová. Spodní závaží (tj. hmotný bod A) nadskočí, právě když součet sil na něj působících bude směřovat nahoru. Víme, že na závaží A působí tíhová síla směrem dolů, která má velikost

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{G} = (M+m)g\,,$$

a jejíž pohybové účinky jsou vyrušeny reakční silou podložky. Když nyní pružinku stlačíme a uvolníme, začne závaží B kmitat. Na tomto místě si musíme uvědomit, že síla, která bude působit na závaží A v důsledku kmitání závaží B, bude rovna síle, kterou působí pružina na závaží B, jen s opačným znaménkem (plyne z Newtonových zákonů). Tuto sílu umíme poměrně jednoduše vyjádřit, jde jen o sílu, kterou působí napnutá pružina, má podle linearizovaného Hookeova zákona tedy tvar

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{p} = k\Delta l\,,$$

kde Δl je rozdíl momentální délky pružiny a délky pružiny v klidovém stavu. Zajímá nás, kdy bude tato síla největší (chápáno s orientací nahoru). To zřejmě nastane ve chvíli, kdy bude hmotný bod B v nejvyšším bodě kmitavého pohybu, který vykonává. Označme si L vzdálenost tohoto místa od rovnovážné polohy hmotného bodu B. Zjevně bude L rovno vzdálenosti, o kterou jsme pružinu stlačili, neboť neuvažujeme energetické ztráty (maximální výchylky kmitavého pohybu závaží B budou na obě strany stejné, neboť účinky gravitačního pole jsou již zahrnuty v rovnovážné poloze závaží). Žádné další síly už na hmotný bod A působit nebudou. Výslednice sil bude mít tedy velikost

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_\mathrm{p} - \boldsymbol{F}_\mathrm{G}$$

a závaží A nadskočí, právě když bude $\boldsymbol{F}$ kladná. To nás přivádí k podmínce

$$kL - (M + m)g > 0\,,$$

což je ekvivalentní podmínce

$$L > \frac{(M + m)g}{k}\,.$$

Vidíme tedy, že aby závaží A nadskočilo musíme pružinu stlačit alespoň o něco málo více než o $L = (M+m)g/k$. Přičemž si musíme dát samozřejmě pozor, aby byla splněna podmínka $L < l$.

Michal Nožička
nozicka@fykos.cz

Úloha III.4 ... ubrzdi to

4 body; průměr 2,00; řešilo 49 studentů

Po sebeprudším sešlápnutí brzdového pedálu nezačne auto brzdit okamžitě, ale brzdná síla po dobu t_r lineárně narůstá až na hodnotu F_m. Koeficient statického třetí mezi pneumatikou a vozovkou je f. Jakou maximální rychlostí se může tento automobil pohybovat, aby ani při nouzovém brzdění nedošlo ke smyku? *Michal procházel kolem kolony.*

Nejprve si rozeberme, jaké síly na auto působí. Ve směru svislém je to tíha auta G, kterou přesně vyrovnává normálová reakční síla N od silnice. Dále si uvědomme, že brzdy sice působí na kola, která snižují svou úhlovou rychlost, ale to nemá přímý vliv na rychlost auta. Tu snižuje až tření T mezi koly a silnicí. Kola se sice otáčejí, ale třecí síla na ně stejně působí. Tato třecí síla je právě ona brzdná síla F, kterou zprostředkovaně působí brzdy na auto.[15]

Podmínka pro neprokluzování kol je

$$T \leq fN\,,$$

kde fN označuje maximální sílu, kterou je schopné tření poskytnout. Po překročení této meze už bude platit pouze[16] $T = fN$. V tuto chvíli se změní vztah mezi brzděním kol a zpomalováním auta. Brzdy budou stále působit stejným brzdným momentem sil na kola, ale tření se silnicí bude najednou nižší a kola začnou prokluzovat.

Z rovností mezi tíhovou a reakční silou a mezi třecí a brzdnou silou dostáváme podmínku, která musí být splněna v každém okamžiku jízdy (brzdění), ve tvaru

$$F \leq fmg\,.$$

Pokud je maximální brzdná síla F_m nižší (nebo rovna) než tato hodnota, můžeme bezstarostně brzdit a nikdy se do smyku nedostaneme. Pokud však platí $F_\mathrm{m} > mgf$, nebudou

[15] Rozmyslete si, že při rozjíždění působí motor na kola také pouze momentem síly a auto samo zrychluje až díky tření, které v tomto případě působí ve směru jízdy. I při rozjíždění mohou kola „zahrabat", a tak platí pro rozjezd bez prokluzu stejná podmínka jako při brzdění.

[16] Ve skutečném případě je koeficient klidového tření častěji vyšší než roven koeficientu smykového tření $f_\mathrm{k} > f_\mathrm{s}$. Tedy při smyku bude brzdná síla $T = f_\mathrm{s}N$ nižší než v mezním případě bez prokluzování kol $T = f_\mathrm{k}N$.

kola prokluzovat pouze pokud auto stihne zabrzdit dříve než brzdná síla překročí tuto mezní hodnotu.

Protože F roste lineárně s časem, můžeme ho vyjádřit jako

$$F = F_\mathrm{m} \frac{t}{t_\mathrm{r}} \leq mgf\,,$$

což samozřejmě platí pouze pro $t \leq t_\mathrm{r}$, kde se růst zastaví a brzdná síla bude mít nadále konstantní hodnotu F_m. To nám ale stačí, protože pokud bude nerovnost splněna v čase t_r, pak bude splněna i nadále.

Brzdná síla nabude hodnoty F_m v čase

$$\tau = \frac{mgft_\mathrm{r}}{F_\mathrm{m}}\,.$$

Po tuto dobu se auto pohybuje se zrychlením

$$a = -\frac{F}{m} = -\frac{F_\mathrm{m}}{m}\frac{t}{t_\mathrm{r}}\,.$$

Z tohoto vyjádření nerovnoměrně zpomaleného pohybu získáme okamžitou rychlost auta jako integrál zrychlení

$$v = \int -\frac{F_\mathrm{m}}{m}\frac{t}{t_\mathrm{r}}\,\mathrm{d}t = v_0 - \frac{F_\mathrm{m}}{2mt_\mathrm{r}}t^2\,.$$

Nás zajímá okamžik zastavení, tedy $v = 0$, odkud dostaneme vyjádření pro v_0 jako

$$v_0 = \frac{F_\mathrm{m}}{2mt_\mathrm{r}}t^2\,.$$

Vidíme, že původní rychlost v_0 je rostoucí funkcí brzdného času (jak odpovídá zdravému rozumu). Proto, když nás zajímá nejvyšší možná počáteční rychlost auta, použijeme nejvyšší čas, který máme k dispozici, a sice $t = \tau$.

$$v_\mathrm{max} = \frac{F_\mathrm{m}}{2mt_\mathrm{r}}\tau^2 = \frac{mg^2f^2t_\mathrm{r}}{2F_\mathrm{m}}\,,$$

což je hledaný výraz pro maximální rychlost auta, aby nedostalo smyk.

Ještě si vypočtěme mezní hodnotu zrychlení, kterou si umíme lépe představit díky setrvačné síle, která na nás působí, když sedíme v autě. Kvalitní pneumatika[17] má na silnici koeficient klidového tření $f = 0{,}8$. Z podmínky $F \leq mgf$ dostaneme

$$a_\mathrm{mez} = gf = 0{,}8g = 7{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,,$$

což je pozitivní, protože většinou brzdíme pozvolněji, a tedy smyk nehrozí.

Protože výraz pro maximální rychlost klesá s maximem brzdné síly F_m, bude nás zajímat, jaká je maximální rychlost beze smyku obecně v případě, kdy $F_\mathrm{m} \geq mgf$. Dosaďme tedy do výrazu pro v_max minimální hodnotu brzdné síly, při které toto nastane, a sice $F_\mathrm{m} = ma_\mathrm{mez} = mgf$. Potom

$$v_\mathrm{max} = \frac{gft_\mathrm{r}}{2} = 15\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}\,,$$

[17] `http://old.uk.fme.vutbr.cz/zobraz_souborace9.pdf?id=245`, str. 23

pokud jako t_r bereme jednu vteřinu (reálně to bude spíš méně), tedy toto je opravdu horní odhad rychlosti, při které kola neprokluzují. Celkově vzato, pokud prudce zašlápnete brzdu, dostanete se do smyku téměř bez ohledu na to, jakou jedete rychlostí, pokud právě neparkujete. Pokud se do smyku dostanete i tak, máte pravděpodobně ojeté pneumatiky nebo jste na kluzkém terénu.

Jakub Dolejší
`krasnykuba@fykos.cz`

Úloha III.5 ... sešit dezertér

5 bodů; průměr 2,52; řešilo 42 studentů

Na lavici se sklonem $\alpha = 5^\circ$ leží sešit formátu A4 o hmotnosti m, mezi lavicí a sešitem působí statická třecí síla s koeficientem $f_0 = 0{,}52$. Poté kdosi do lavice strčí a ta začne kmitat ve směru sklonu desky s frekvencí $\nu = 10\,\mathrm{Hz}$ a amplitudou $A = 1\,\mathrm{mm}$.

a) *Určete, jakou dodatečnou silou musíme na sešit tlačit (kolmo na lavici), aby se sešit nezačal pohybovat.*
b) *Určete, za jak dlouho sešit spadne z lavice, jestliže je na počátku jeho spodní hrana (ta kratší) na dolním okraji lavice. Dynamický koeficient tření je f, sešit považujte za tuhou desku.*

Mirkovy sešity se snaží prchnout z přednášek v F1.

Pozrime sa na svet otočený o uhol α. Vtedy je lavica vodorovná a kmitá zvislo, ale tiažové zrýchlenie je od zvislej osi o uhol α naklonené. Trecia sila pôsobí v smere, v ktorom sa zošit pohybuje alebo chce pohybovať, teda vodorovne.

Tým, že doska kmitá, sa mení sila F_p, ktorá pritláča zošit na dosku. Konkrétne vieme, že pri harmonických kmitoch závisí poloha dosky na čase podľa vzťahu $y = A\sin(2\pi\nu t)$. Dvojitým derivovaním získame zrýchlenie, ktoré pôsobí na dosku $a_\mathrm{d} = -4\pi^2\nu^2 A\sin(2\pi\nu t) = -4\pi^2\nu^2 y$. Ak zošit leží na doske, pôsobí naňho doska silou $F = ma_\mathrm{d}$, ktorá mu udeľuje zrýchlenie a_d.

Tu si ale uvedomme, že zošit nemusí stále ležať na doske. Ak bude maximálna hodnota a_d väčšia ako hodnota "zvislej" zložky tiažového zrýchlenia $g\cos\alpha$, gravitačné zrýchlenie v hornom bode obratu dosky nedokáže na nej držať zošit a ten sa začne hýbať šikmým vrhom, až kým zasa nedopadne na dosku (alebo na zem). Našťastie tento prípad pre naše hodnoty nenastáva; časť b) si ale môžete skúsiť preňho spočítať. Ak ste masochisti, môžete predpokladať aj že zošit sa po dopade na dosku trochu odráža a šmýka.

Ale naspäť k riešenej úlohe. Sila, ktorá pritláča zošit na dosku, je vektorovým súčtom „zvislej“ (kolmej na dosku) zložky tiažovej sily a sily F: $F_\mathrm{p} = m(g\cos\alpha - 4\pi^2\nu^2 y)$. Vo vodorovnom smere na zošit pôsobí „vodorovná“ zložka tiažovej sily $F_{g\mathrm{v}} = mg\sin\alpha$, proti ktorej pôsobí trecia sila $F_t \leq f_0 F_\mathrm{p}$. Na to, aby sa zošit po doske nešmýkal, nesmie $F_{g\mathrm{v}}$ prekročiť maximálnu hodnotu statickej trecej sily, z podmienky $F_{g\mathrm{v}} \leq f_0 F_\mathrm{p}$ teda dostávame

$$mg\sin\alpha \leq f_0 m(g\cos\alpha - 4\pi^2\nu^2 y)\,,$$

$$g\left(\cos\alpha - \frac{\sin\alpha}{f_0}\right) \geq 4\pi^2\nu^2 y\,. \tag{2}$$

Je jasné, že ak táto podmienka prestane platiť, bude to pre hodnotu $y = A$, teda v hornom bode obratu dosky. Dosadením hodnôt zo zadania ale overíme, že ani vtedy podmienka platiť nenastane... Nuž, číselné výpočty nie sú silnou stránkou matfyzáka. Keď zoberieme $\nu = 15\,\mathrm{Hz}$, už vychádza, že sa zošit bez upevnenia z lavice zošmykne. Všimnime si tiež, že tento výsledok nezávisí na hmotnosti zošita. Nestačí teda niečo ťažké naňho položiť, ale potrebujeme ho pritlačiť nejakou pevnou, najlepšie konštantnou silou F_a (svorka?).

Najmenšia hodnota tejto sily je samozrejme taká, aby nastala rovnováha síl $F_{g\mathrm{v}}$ a $F_t = f_0 F_\mathrm{p}$ v bode $y = A$. V tomto prípade platí $F_\mathrm{p} = m(g\cos\alpha - 4\pi^2\nu^2 A) + F_\mathrm{a}$ a tiež $mg\sin\alpha = f_0 F_\mathrm{p}$, z čoho dostávame pre hmotnosť zošita $m = 400\,\mathrm{g}$

$$F_\mathrm{a} = \frac{mg\sin\alpha}{f_0} - m(g\cos\alpha - 4\pi^2\nu^2 A) \doteq 0{,}3\,\mathrm{N}\,,$$

pričom pre číselné výpočty používame spomenutú hodnotu $\nu = 15\,\mathrm{Hz}$.

V časti b) žiadnu ďalšiu silu nemáme. Keď teda prestane platiť nerovnosť $F_{g\mathrm{v}} \leq f_0 F_\mathrm{p}$, začne pôsobiť dynamická trecia sila $F_t = fF_\mathrm{p}$ a zošit sa začne z lavice zošmykovať so zrýchlením

$$a = g\sin\alpha - fg\cos\alpha + 4\pi^2\nu^2 fy = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) + 4\pi^2\nu^2 fA\sin 2\pi\nu t \tag{3}$$

až dovtedy, kým z lavice nespadne alebo sa nezastaví. Ak sa zastaví a podmienka (2) neplatí, bude sa ďalej pohybovať dynamickým trením; inak počká, kým sa zasa nedostane do bodu, v ktorom (2) platiť prestane, a cyklus sa opakuje.

V skutočnosti ale vieme povedať, že nastane druhý prípad – zošit počká. Časová závislosť zrýchlenia je totiž len sínusovka posunutá dole (keď $f > \mathrm{tg}\,\alpha$, čo je podmienka na to, aby sa zošit nezošmykol pri najmenšom otrase) a rýchlosť zošitu je plocha pod grafom zrýchlenia od bodu, v ktorom sa začne pohybovať. Tým, že graf posunieme dole, dosiahneme to, že kladné kopčeky majú menšiu plochu ako záporné. Zošit teda zastaví v bode, kde je zrýchlenie podľa (3) záporné, a vtedy musí byť aj statické trenie silnejšie ako gravitácia, lebo statické trenie je silnejšie ako dynamické ($f < f_0$).

Teraz spravíme celkom rozumný predpoklad, že dráha s_0, ktorú zošit prejde počas jednej periódy kmitov dosky, bude malá – oveľa menšia ako dĺžka jeho hrany. Potom môžeme zanedbať časť tejto dráhy, ktorú by prešiel počas poslednej periódy pred spadnutím, a povedať, že čas, za ktorý sa posunie o $l/2$ (pozor, zošit spadne už keď o polovicu trčí), je $Tl/2s_0 = l/2s_0\nu$.

Túto dráhu získame integrovaním. Nech sa zošit začne šmýkať v čase t_0, kedy $a = 0$, a prestane v čase t_1, kedy $v = 0$. Rýchlosť v čase $t \geq t_0$ dostaneme ako

$$\begin{aligned} v &= \int_{t_0}^{t} \Big(g(\sin\alpha - f\cos\alpha) + 4\pi^2\nu^2 fA\sin 2\pi\nu t\Big)\,\mathrm{d}t \\ &= g(\sin\alpha - f\cos\alpha)(t - t_0) + 4\pi^2\nu^2 fA\int_{t_0}^{t}\sin 2\pi\nu t\,\mathrm{d}t \\ &= g(\sin\alpha - f\cos\alpha)(t - t_0) - 2\pi\nu fA\left[\cos(2\pi\nu t) - \cos(2\pi\nu t_0)\right]\,. \end{aligned}$$

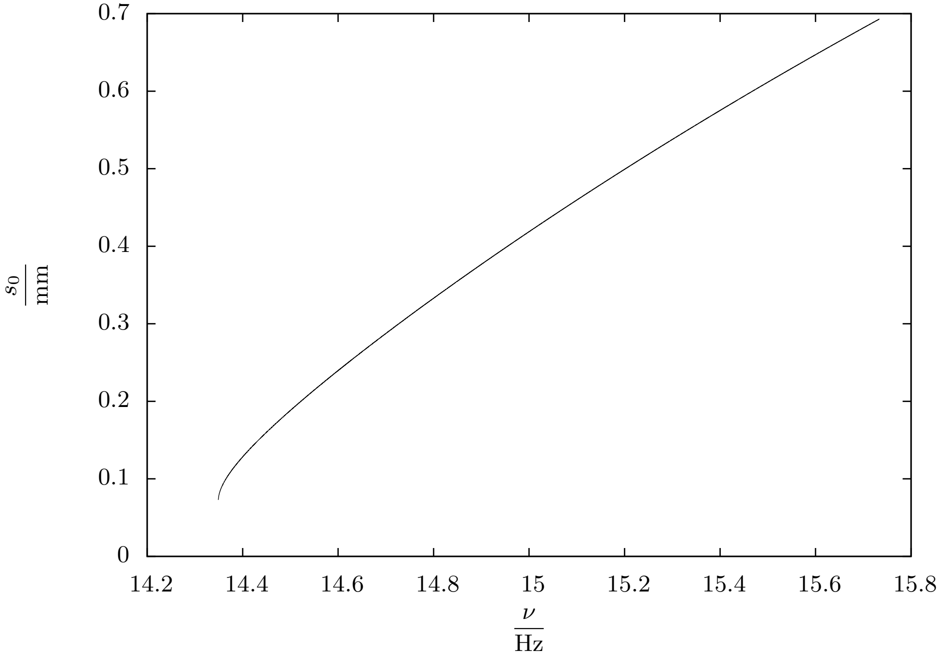
Dráhu v čase $t \geq t_0$ teraz dostaneme ako

$$\begin{aligned} s &= \int_{t_0}^{t} g(\sin\alpha - f\cos\alpha)(t - t_0) - 2\pi\nu fA\left[\cos(2\pi\nu t) - \cos(2\pi\nu t_0)\right]\,\mathrm{d}t \\ &= g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\frac{(t - t_0)^2}{2} + 2\pi\nu fA\cos 2\pi\nu t_0(t - t_0) - fA\left[\sin(2\pi\nu t) - \sin(2\pi\nu t_0)\right]\,. \end{aligned}$$

Hľadáme dráhu $s_0 = s(t = t_1)$. V čase t_0 platí $g(\sin\alpha - f_0\cos\alpha) + 4\pi^2\nu^2 f_0 A\sin 2\pi\nu t_0 = 0$, teda

$$t_0 = \frac{1}{2\pi\nu}\arcsin\frac{g(f_0\cos\alpha - \sin\alpha)}{4\pi^2\nu^2 f_0 A}\,;$$

čas $t_1 > t_0$, kedy $v = 0$, ale nemôžeme jednoducho určiť, lebo sme dostali transcendentnú rovnicu. Neostáva nič iné, ako riešiť numericky. Zvoľme si koeficient dynamického trenia $f = 0{,}4$ (hodnoty pre drevo a papier nie sú veľmi tabuľkové, ak nešpecifikujeme konkrétnu úpravu dreva, typ papiera atď.). Pre našu frekvenciu $\nu = 15\,\mathrm{Hz}$ dostávame $t_0 \doteq 12{,}3\,\mathrm{ms}$, $t_1 \doteq 28{,}1\,\mathrm{ms}$ (perióda je $T \doteq 67\,\mathrm{ms}$) a po dosadení do vzťahu pre dráhu máme $s_0 \doteq 0{,}42\,\mathrm{mm}$, teda čas, za ktorý sa zošit A4 s hranou $l = 21\,\mathrm{cm}$ zošmykne, je približne $17s$.



Obr. 2: Dráha urazená zošitom za jednu periódu.

To vyzerá rádovo rozumne. Ešte môžeme prepočítať celý rozsah ν, pre ktoré náš model platí – zošit sa hýbe, ale neodletí, teda

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{A}\left(\cos\alpha - \frac{\sin\alpha}{f_0}\right)} \leq \nu \leq \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g\cos\alpha}{A}}\,.$$

Hodnoty $s_0(\nu)$ sú vykreslené v grafe 2. Vidíme, že pri dolnej limite na frekvenciu kmitov padá dráha do nuly, čo zodpovedá tomu, že sa zošit pohybuje len minimálne. Zdanlivú rýchlosť, ktorou by sa zošit pohyboval, vypočítame ako s_0/T. Vychádza rádovo v milimetroch za sekundu. V skutočnosti ale zošity padajú rýchlejšie.

Komentáre k došlým riešeniam

Okrem „fail-u“ s číslami nebolo jasné, ako sa myslia kmity v smere sklonu. Vysvetlenie: ak je lavica sklonená mierne do zvislého smeru, bude kmitať približne v zvislom smere (kolmo na svoju rovinu). Ak by kmitala rovnobežne so svojou rovinou, bolo by to polovicu času „proti“ smeru jej sklonu. To fyzikálne nevadí (v časti b) to akurát zaistí, že sa zošit nebude hýbať nahor), ale opravoval som miernejšie – body sa strácali skôr za vynechanie niektorých síl alebo príliš číselné počítanie. Ale povedať, že sa počas kmitov mení uhol α, je už nezmysel – čo potom má byť smer sklonu? Názov úlohy nebol „tableflip“.

Časť b) nikto nedopočítal do konca, bola teda za 2 body a jeden ste mohli získať už za správny návod bez integrálov. Niekedy sa oplatí poslať aj nápady.

Jakub Šafin
`xellos@fykos.cz`

Úloha III.P ... Lukášova díra

5 bodů; průměr 2,88; řešilo 40 studentů

Lukáš posiloval a povedlo se mu vyrobit černou díru o hmotnosti 1 kg. *Protože nemá úplně v lásce kvantovou teorii pole na křivém pozadí, tak jeho díra nic nevyzařuje. Lukáš tuto díru upustí a ona začne kmitat uvnitř Země. Zkuste odhadnout, za jak dlouho se hmotnost díry zdvojnásobí. Je nebezpečné si doma pokoutně vyrábět černé díry?*

Lukáš chtěl zničit Zemi, ale moc se mu to nepovedlo.

Zamysleme se nejprve, co na nás ze zadání kouká a čím bychom mohli začít. V zadání se dočteme o černé díře a její hmotnosti. Letmým pohledem na internet zjistíme, že z těchto údajů dokážeme vypočítat například její poloměr,[18] kterému se také jinak říká Schwarzschildův. Tak si jej spočítáme

$$r_{\mathrm{g}} = \frac{2GM}{c^2} = 1{,}5 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{m}\,,$$

kde G je gravitační konstanta, c je rychlost světla a M je hmotnost černé díry. Poloměr, který nám vyšel, vypadá na první pohled velmi malý. Srovnáme jej tady s různými fyzikálními rozměry a z toho usoudíme, jakou další fyziku bychom měli uvažovat. Poloměr atomu je přibližně $(0{,}3-3)\cdot 10^{-10}$ m, musíme se tedy zabývat fyzikou na výrazně menší škále. Průměr jádra je přibližně 10^{-15} m, to je stále ještě o hodně více než velikost naší černé díry. Musí nás proto zajímat fyzika stavby jádra, případně vlastnosti jádra, ale vlastnostmi elektronového obalu se nebudeme muset tolik zaobírat.

Víme již, že černá dírka je o hodně menší než atomové jádro. Zamysleme se proto nad druhou částí zadání, tedy tím, že by se černá díra měla být schopna nějak „krmit“. Aby přibírala na váze, musí obědvat hlavně atomová jádra. Máme tedy model: černá díra prolétá krystalovou mřížkou a konzumuje atomová jádra. Jaké síly tedy působí na atomová jádra? Jsou to jednak elektromagnetické síly zprostředkované okolními atomy a samozřejmě také gravitační síla způsobená prolétající černou dírou. Rozhodně zajímavým parametrem bude, v jaké vzdálenosti se tyto dvě síly vyrovnají. Pro velikost gravitační síly budeme moci rozhodně použít Newtonův gravitační zákon (obecná relativita je pouze oprava Newtonova gravitačního zákona pro silné pole), ale co se silou, kterou jsou atomy (tedy i atomová jádra) drženy v krystalové mřížce? Na to žádný jednoduchý model neznáme, ale co víme je, že energie chemických vazeb je přibližně kolem jednoho elektronvoltu.[19] Sílu lze odhadnout z poměru vykonané práce na rozbití chemické vazby a dráhy, na které je tato práce vykonána. V našem případě půjde přibližně o průměr atomu, což je již výše zmíněných 10^{-10} m. Velikost síly, kterou musíme působit na atom, abychom

[18] `https://cs.wikipedia.org/wiki/Černá_díra`

[19] Elektronvolt je energie, kterou získá elektron, který je urychlen potenciálovým rozdílem jednoho voltu, tedy $1\,\mathrm{eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J.

jej vytrhli z krystalové mřížky je tedy přibližně $F_\mathrm{v} \approx 10^{-9}\,\mathrm{N}$. Můžeme nakonec z Newtonova gravitačního zákona určit jak velký prostor okolo sebe dokáže naše černá díra vyčistit od jader

$$\frac{GMm_\mathrm{j}}{d_\mathrm{max}^2} = F_\mathrm{v} \quad \Rightarrow \quad d_\mathrm{max} \approx \sqrt{\frac{GMm_\mathrm{j}}{F_\mathrm{v}}} \doteq 1 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{m}\,.$$

V této části řešení si už můžeme dovolit zanedbat malé konstanty, jako například nukleonové číslo jádra, jde pouze o přibližný výpočet. Zjistili jsme ale důležitou věc a to, že naše černá díra není schopna vytrhnout jádro z mřížky, ale může jej spořádat pouze tehdy, když jej přímo střetne.

Nyní by se hodila *vsuvka* na téma, kde se může jádro nacházet v rámci svého obalu. Jádra v látce nejsou na svých pozicích klidná, ale vibrují. Tyto vibrace jsou způsobeny nenulovou teplotou látky. Jejich relativní (vůči poloměru atomu) amplituda při pokojové teplotě je přibližně[20] $1\,\%$ K této hodnotě se zanedlouho vrátíme.

Na jednu cestu skrz Zemi potřebuje černá díra $42\,\mathrm{minut} \doteq 10^3\,\mathrm{s}$. Kolik atomových jader cestou zasáhne? Prolétá-li díra jedním atomem, s jakou pravděpodobností zasáhne jádro? Tato pravděpodobnost je rovna poměru plochy jádra ku ploše atomu, obojí myšleno v půdorysu. Tento poměr je pro stojící jádro roven asi 10^{-10}. Pro oscilující jádro, viz *vsuvka*, může tento poměr být i dokonce 10^{-4}. Počítejme nadále s první hodnotu a na konci budeme diskutovat i hodnotu druhou. Kolik atomů černá díra potká? To zjistíme jednoduše podělením průměru Země a průměru jednoho atomu

$$N \approx \frac{6\,000\,\mathrm{km}}{1 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}} \doteq 6 \cdot 10^{16}\,.$$

Toto číslo vypadá veliké, ale ve skutečnosti je neskutečně malé. Hlavně proto, že černá díra zvládne konzumovat jen 10^{-10} z jader atomů, kterými prolétá, takže při jednom průletu zkonzumuje přibližně 10^6 jader. V jednom kilogramu látky je přibližně 10^{26} atomů, to je tedy počet atomů, který musí černá díra zkonzumovat, aby přibrala stejně, kolik sama váží. To se jí tedy povede za 10^{20} průletů Zemí, což je přibližně $10^{23}\,\mathrm{s} \doteq 10^{16}$ let. Tento výsledek odpovídá době asi deset tisíckrát delší než je doba existence vesmíru. Pokud bychom užili pro efektivní průměr jádra vyšší hodnotu, zjistili bychom, že by takováto díra zdvojnásobila svou hmotnost za 130 miliónů let.

Pokud bychom si takovouto díru vyrobili, tak můžeme spolehlivě říci, že by naši civilizaci za našeho života zničit nedokázala a nejspíše bychom si její přítomnosti ani nepovšimli.

Závěrem by se ještě hodilo říci, že pokud díra zkonzumuje atomové jádro, tak získá náboj, a proto pro ní bude velmi výhodné spořádat nějaký z okolních elektronů a tím se držet v elektricky nenabitém stavu. Elektrostatická síla je mnohem silnější než síla gravitační; pokud by tomu takto nebylo, tak by náš model zkolaboval a museli bychom použít jiný.

Lukáš Ledvina
`lukasl@fykos.cz`

Úloha III.E ... hydrogel

8 bodů; průměr 6,61; řešilo 57 studentů

Změřte závislost hmotnosti hydrogelové kuličky na době ponoření do vody a na koncentraci soli rozpuštěné ve vodě.

[20] `http://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/js11/fyz_chem/web/fotony/rot_vib.htm`

Poznámka *Hydrogel vám má přijít společně se zadáním série. Pokud jste v tomto ročníku ještě žádnou úlohu neřešili, ale chcete hydrogel také dostat, ozvěte se nám.*

Karel byl na konferenci GIREP-EPEC 2015, kde se mluvilo o použití hydrogelu ve výuce.

Teorie

Jako hydrogely se souhrnně označují látky, které mají tu vlastnost, že dokáží pohlcovat velké množství vody, aniž by se samy ve vodě rozpouštěly. Většinou se jedná o síť řetězců různých polymerů. V tomto krátkém textu se nebudeme zabývat přesnými chemicko-fyzikálními důvody pohlcování molekul vody, neboť by to bylo příliš komplikované a moc nesouvisející s fyzikou, ale spíše s chemií. Jen bychom zde poznamenali, že se nejedná jen o pronikání vody membránou způsobené osmotickým tlakem. Problematika je daleko složitější, neboť molekuly hydrogelu na sebe přímo vážou molekuly vody.

V tomto experimentu změříme, kolik vody dokáže jeden určitý typ hydrogelu (ten, který vám přišel poštou společně se zadáním), sloužící ke zvýšení trvanlivosti květin ve váze, absorbovat.

Návrh experimentu

V rámci tohoto experimentu budeme zkoumat hmotnost hydrogelové kuličky v závislosti na době ponoření ve vodě a na koncentraci kuchyňské soli ve vodě rozpuštěné. Nejprve si však musíme ujasnit, jaké další okolnosti by mohly mít na náš experiment vliv.

V prvé řadě bychom si měli nejprve u všech používaných kuliček zkontrolovat, zda se jedná opravdu o koule se stejným poloměrem. Toto je velmi špatně realizovatelné kvůli malému počátečnímu rozměru kuliček, proto budeme předpokládat, že tomu tak je.

Jako další si musíme uvědomit, že nasákavost hydrogelu může záviset na teplotě použité vody. Jelikož v zadání úlohy není stanoveno, že máme měřit i závislost na teplotě vody, stačí nám, když si pohlídáme, aby měla použitá voda při všech experimentech stejnou teplotu. To proto, abychom mohli tyto experimenty následně navzájem porovnávat. Vzhledem k poměrně dlouhému časovému intervalu, po který bude naše měření probíhat (což bude diskutováno dále), je rozumné zvolit si tuto teplotu jako teplotu v místnosti, ve které měříme.

Dále může nasákavost hydrogelu záviset na ostatních látkách rozpuštěných v použité vodě. Jediná možnost, jak tento efekt odstranit, by bylo použití destilované vody. Jelikož by se tím ale experiment značně zkomplikoval, destilovanou vodu používat nebudeme.

Jako poslední si musíme dát pozor na to, aby kuličky byly celou dobu plně ponořeny ve vodě. Na obalu produktu se píše, že máme použít minimálně 400 g vody na celý sáček, pro jistotu použijeme alespoň dvakrát větší poměr vody (závisí samozřejmě na rozměrech použité nádoby). Také bychom měli zajistit, aby se kuličky ani po nárůstu objemu nedotýkaly samy sebe či stěn – styk s dnem nádoby nijak snadno neodstraníme.

Žádné jiné okolnosti už by do našeho měření neměly zanášet systematické chyby. Nyní bychom se tedy měli zamyslet nad počtem měření, které chceme provádět.

Jako poslední věc si musíme stanovit, po jak dlouhý časový úsek budeme chtít měřit. Na tomto místě je vhodné podívat se na návod k použití našeho hydrogelu (návod je napsán na obalu v jednoduché angličtině nebo je k nalezení na internetu). V tomto návodu se píše, že máme před použitím kuličky hydrogelu namočit na 4 hodiny do vody a ty za tuto dobu zvětší svůj objem. Znamená to tedy, že bychom měli očekávat, že maximálního objemu absorbované vody se dosáhne právě za tyto 4 hodiny. Měli bychom ovšem měřit o něco déle, neboť těmto nepřesným návodům nemůžeme bezmezně věřit a taky rozpuštěná sůl může tuto dobu značně ovlivnit.

Naměřená data

Experiment jsme prováděli s vodou z kohoutku dodávané z Pražské vodárny (složení kohoutkové vody se v různých městech může značně lišit) o teplotě 22 °C, která byla stejná jako teplota okolního vzduchu. Hmotnostní koncentrace solných roztoků v jednotlivých nádobách byly 0 %, 1 %, 2 %, 4 %, 7 %, 11 %, 20 % a 26 %, používali jsme kuchyňskou sůl bez přidaných látek. Vložili jsme do každé nádoby 20 kuliček a pomocí vah jsme ve stanovených intervalech měřili jejich hmotnost (vždy hmotnost všech 20 kuliček dohromady).

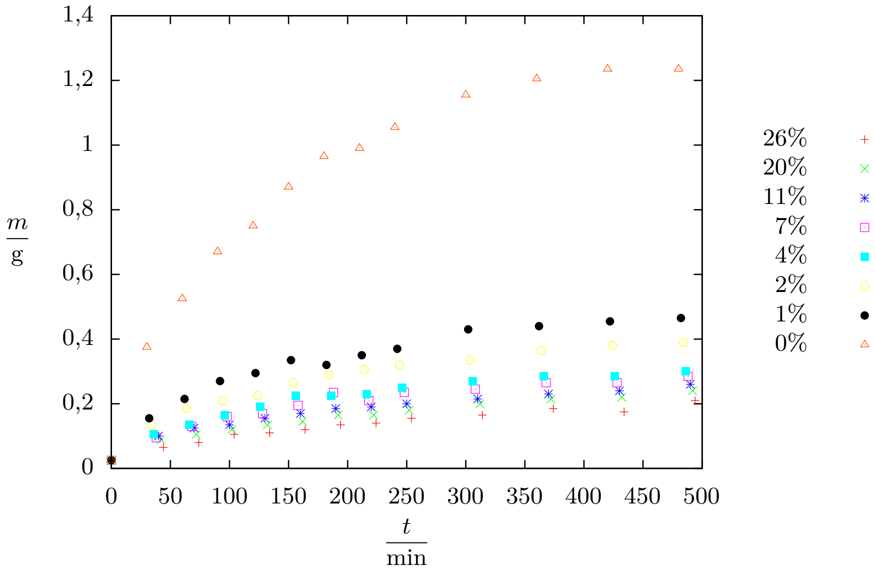
Naměřená data jsou zanesena v tabulce 1.

Tabulka 1: Naměřené hodnoty hmotnosti kuliček v závislosti na čase a koncentraci soli v příslušném roztoku

$\frac{t}{\mathrm{min}}$	hmotnost 20 kuliček podle koncentrace solného roztoku [g]							
	26 %	20 %	11 %	7 %	4 %	2 %	1 %	0 %
30	1,3	1,8	2,0	1,9	2,1	2,7	3,1	7,5
60	1,6	2,1	2,5	2,6	2,7	3,7	4,3	10,5
90	2,1	2,4	2,7	3,2	3,3	4,2	5,4	13,4
120	2,2	2,7	3,1	3,4	3,8	4,5	5,9	15,0
150	2,4	2,9	3,4	3,9	4,5	5,3	6,7	17,4
180	2,7	3,3	3,7	4,7	4,5	5,8	6,4	19,3
210	2,8	3,3	3,8	4,2	4,6	6,1	7,0	19,8
240	3,1	3,6	4,0	4,7	5,0	6,4	7,4	21,1
300	3,3	4,0	4,3	4,9	5,4	6,7	8,6	23,1
360	3,7	4,3	4,6	5,3	5,7	7,3	8,8	24,1
420	3,5	4,4	4,8	5,3	5,7	7,6	9,1	24,7
480	4,2	4,8	5,2	5,7	6,0	7,8	9,3	24,7
1 020	5,1	5,5	5,9	6,5	6,7	8,1	10,3	23,6
1 460	5,7	5,9	6,4	6,3	6,9	9,0	10,2	21,7
1 880	5,8	6,3	6,4	6,4	6,9	8,4	10,3	20,2
2 420	6,0	6,0	6,4	6,3	6,9	9,1	10,3	19,6
2 840	6,2	6,2	6,6	6,3	7,0	9,1	10,3	19,4
3 380	6,1	5,8	6,1	6,6	7,0	8,6	10,6	18,9

Váhy měří s přesností na 0,1 g. Další faktor, který ovlivňoval měření na vahách je to, že při umisťování kuliček na váhy, jsme na váhy umístili i trochu vody, která následně zvyšovala číslo, které váhy ukázaly. Této systematické chybě se bohužel nedalo vyhnout, nicméně šlo maximálně o 0,2 g (stanoveno odhadem založeném na změření váhy vody, která na vahách zbyla po odstranění kuliček, která jen velmi zřídka vystoupala na hodnotu 0,1 g, ale pro jistotu uvádíme větší odhad 0,2 g). Horní odhad chyby měření hmotnosti tedy bude 0,3 g. Na tomto místě je také potřeba uvést, že udávané časy značí začátek měření, které díky vysoké náročnosti trvalo přibližně 15 minut. Vždy jsme ale měřili ve stejném pořadí od kuliček ponořených v čisté vodě směrem k nasycenému roztoku soli (v tabulce směrem zprava doleva). Data je tedy potřeba podle toho interpretovat, tedy jako čas, ve které bylo měření provedeno, budeme brát čas začátku měření + 2 minuty za každé měření, které muselo být provedeno před tímto naším měřením, a směrodatnou odchylku na tomto místě stanovíme jako ±3 minuty, což nám dává dostatečnou rezervu.

Na obrázku (3) jsou graficky zobrazena data pro všechny koncentrace soli a pro prvních 480 minut pozorování.



Obr. 3: Závislost hmotnosti kuličky na čase, po který byla ponořena v roztoku soli s koncentrací od 0 % (čistá voda) po 26 % (nasycený roztok).

Závěr

Jak je z grafu vidět, hmotnost hydrogelové kuličky v závislosti na čase se poměrně výrazně liší podle koncentrace kuchyňské soli, která byla rozpuštěna v roztoku, ve kterém byly kuličky namočeny. Vidíme, že nejvíce vody pohltí kuličky, které jsou ponořeny v čisté vodě, a že s rostoucí koncentrací soli kuličky pohlcují méně vody. Na pohlcování vody má vliv už poměrně malé množství soli v roztoku, neboť jak jsme naměřili, tak už pro 1 % roztok soli se do hydrogelu pohltí jen přibližně poloviční množství vody, než by se pohltilo v čisté vodě. Při maximální možné koncentraci soli v roztoku (tedy nasycenému roztoku, což odpovídá 26 %) se do hydrogelu pohltí přibližně čtvrtinové množství vody, než by se pohltilo v čisté vodě.

Také jsme ukázali, že informace na obalu hydrogelu, ze které vylívalo, že maximální hmotnosti dosáhnou hydrogelové kuličky po 4 hodinách ve vodě, je zavádějící, neboť maximální hmotnosti se dosáhne až v mnohem větším čase. Dále bychom si měli všimnout, že z naměřených dat vyplývá, že kuličky v určitém čase pohltí maximální množství vody a dále už jejich hmotnost klesá. Zajímavé je, že čas, kdy pohltí maximální množství vody, je závislý na koncentraci roztoku soli, ve kterém jsou ponořeny. Z naměřených dat lze tento efekt pozorovat u čisté vody, kde je jasně vidět, že po přibližně 8 hodinách už kuličky nenasákají další vodu a následně vodu spíše pomalu vypuzují. U roztoků s příměsí soli tento efekt není tolik výrazný, nicméně naměřená data nasvědčují tomu, že se začíná objevovat. Je tedy možné, že výrobce prováděl testování v destilované vodě, a proto uvádí nižší čas, než jsme my naměřili.

Na závěr by bylo vhodné diskutovat, jaká je přesně závislost hmotnosti kuličky na době ponoření v solném roztoku. Při pohledu na graf se nabízí proložení naměřených hodnot funkcí typu logaritmus, odmocnina či exponenciála, což by ale nebylo vhodné, a to hned ze dvou důvodů. Prvním důvodem je, že nemáme žádný teoretický předpoklad, který by takovouto závislost předpovídal. Druhým důvodem je to, že proložení naměřených dat některou z těchto funkcí by evidentně nebylo v souladu s měřeními ve větším časovém odstupu, kde hmotnost kuličky s časem klesá. Z těchto důvodů nebudeme naměřená data prokládat žádnou funkcí. Hlavní závěr tohoto experimentu, tedy že s vyšší koncentrací soli v roztoku se snižuje nasákavost hydrogelových kuliček, je z tohoto grafu i tak na první pohled jasně vidět. Mírného zpřesnění závislosti bychom dosáhli, kdybychom měli sadu dokonale stejných kuliček a vždy po změření hmotnosti v daném čase bychom experiment začali od znovu – tak bychom eliminovali vliv prodlevy, během které kuličky vážíme.

Michal Nožička
nozicka@fykos.cz

Úloha III.S ... entropická

6 bodů; průměr 3,50; řešilo 56 studentů

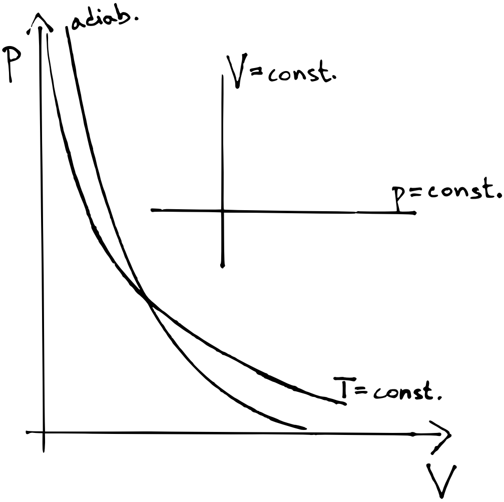
a) *Všechny stavy ideálního plynu umíme nakreslit do různých diagramů: pV diagram, pT diagram a tak dále. Na svislou osu se vynáší první veličina, na vodorovnou osu se vynáší druhá veličina. Každý bod tedy určuje dva parametry.*

   Načrtněte do pV diagramu čtyři děje s ideálním plynem, které znáte. Udělejte to samé pro Tp diagram. Jak by vypadal UT diagram? Vysvětlete, jak se nevhodnost těchto dvou proměnných projeví na tomto obrázku.
b) *Jaké jednotky má entropie? Jaké jiné veličiny s těmito jednotkami znáte?*
c) *V seriálu jsme rozebrali případ nárůstu entropie, když plyn přijímal teplo. Proveďte obdobnou úvahu pro plyn odevzdávající teplo.*
d) *Víte, že při adiabatickém ději se entropie nemění. Proto entropie jako funkce objemu a tlaku $S(p,V)$ může obsahovat jen takovou kombinaci objemu a tlaku, která se též nemění při adiabatickém procesu. Jaký je to výraz? Nakreslete do pV diagramu (svislá osa je p, vodorovná V) křivky, na nichž je entropie konstantní. Souhlasí výsledek této úvahy se vzorcem, který jsme pro entropii odvodili?*
e) *Vyjádřete entropii ideálního plynu jako funkci $S(p,V)$, $S(T,V)$, a $S(U,V)$.*

Jančimu bylo líto, jak málo se učil o entropii.

a) pV diagram je dobre známy. Pre izotermický proces je konštantné pV, kreslíme teda hyperbolu. Pri adiabate je $p \propto 1/V^{\kappa}$, $\kappa > 1$, teda[21] v porovnaní s izotermou rýchlejšie klesá do nuly pre väčšie V, no pre malé objemy je tlak ešte väčší. Celkovo je teda adiabata *strmšia*

[21] Symbol $\propto$ sa číta *úmerný.* $p \propto 1/V$ znamená, že existuje taká konštanta A, že $p = A/V$.



Obr. 4: pV diagram a načrtnuté procesy

ako izoterma. V Tp diagrame sú izotermický a izobarický proces veľmi jednoduché, sú to vodorovná a zvislá čiara. Izochorický proces spĺňa $T = Vp/(nR)$, alebo $T \propto p$. Ide teda o priamku prechádzajúcu nulou tlaku a objemu. Adiabatický proces vyžaduje trochu počítania. Po dosadení do pV^κ za objem dostaneme, až na konštanty, $p^{1-\kappa}T^\kappa$, čo po umocnení na $1/\kappa$ dá

$$p^{\frac{1-\kappa}{\kappa}}T\,.$$

Toto sa počas adiabatického procesu nemení, teda platí $T \propto p^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$, alebo

$$T \propto p^{\frac{2}{s+2}}\,.$$

Pre jednoatómový plyn je $s = 3$ a $2/(s+2) = 0{,}4$, pre dvojatómový plyn máme $s = 5$ a $2/(s+2) \doteq 0{,}29$.

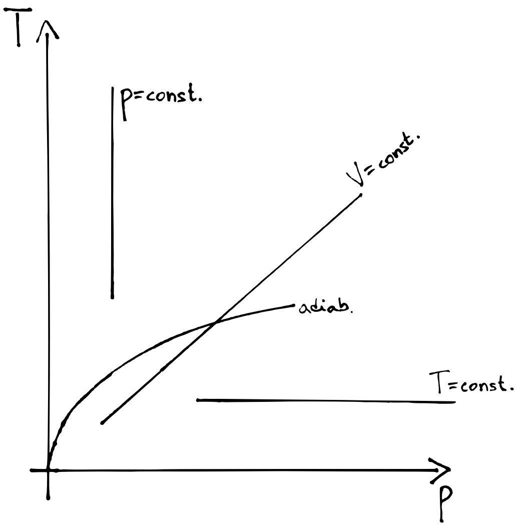
Na UT diagrame vieme znázorniť všetky stavy, no nie jednoznačne! Kvôli zvláštnosti ideálneho plynu totiž pri konštantnej teplote nezávisí vnútorná energia na tlaku či objeme. Všetky stavy ideálneho plynu sa teda scvrknú na priamku $U = snRT/2$, deje budú podmnožinami tejto priamky. Špeciálne izotermický dej bude len jeden bod.

b) Jednotky entropie ľahko vidíme zo vzťahu

$$\mathrm{d}S = \frac{\delta Q}{T}\,,$$

je to $\mathrm{J{\cdot}K^{-1}}$, alebo v SI $\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-2}{\cdot}K^{-1}}$. Rovnakú jednotku má aj (nie merná) tepelná kapacita a tiež Boltzmannova konštanta k_B.

c) Pozrieme sa na nevratný izobarický, či izochorický proces. Pri izotermickom a adiabatickom (ak sú realizované vratne) sa entropia nemení. Máme preskúmať prípad, keď plyn odovzdáva



Obr. 5: Tp diagram a načrtnuté procesy

teplo, teda $\delta Q < 0$. Teplota plynu musí byť vyššia ako teplota rezervoáru, $T_{\mathrm{plyn}} > T_{\mathrm{rez}}$. Zmena entropie je, rovnako ako pri prijímaní tepla

$$\mathrm{d}S_{\mathrm{celk}} = \mathrm{d}S_{\mathrm{plyn}} + \mathrm{d}S_{\mathrm{rez}} = \delta Q/T_{\mathrm{plyn}} - \delta Q/T_{\mathrm{rez}} = (T_{\mathrm{rez}} - T_{\mathrm{plyn}}) \frac{\delta Q}{T_{\mathrm{plyn}} T_{\mathrm{rez}}} \,.$$

Tu máme súčin dvoch záporných veličín: rozdielu $T_{\mathrm{rez}} - T_{\mathrm{plyn}}$ a δQ, teda entropia opäť rastie.

d) Pri adiabatickom procese sa nemení pV^κ, na pV diagrame miesta s konštantnou entropiou sú práve adiabaty, aké sme kreslili v prvej podúlohe. Stačí sa teda pozrieť, aká kombinácia p a V vystupuje v $S(p,V)$ (toto vezmeme z nasledujúcej podúlohy)

$$S(p,V) = \frac{s}{2} nR \ln \left(\frac{pV^\kappa}{Rn^\kappa} \right) + nRs_0 \,.$$

Skutočne, entropia závisí na tlaku a objeme len cez pV^κ a všetko spolu súhlasí.

e) Tvar $S(T,V)$ máme už zo seriálu

$$S(T,V) = nR \ln \left(\frac{T^{\frac{s}{2}} V}{n} \right) + nRs_0 \,.$$

Eliminovaním teploty pomocou $nRT = pV$ dostaneme

$$S(p,V) = nR \ln \left(\frac{(pV)^{\frac{s}{2}} V}{n(nR)^{\frac{s}{2}}} \right) + nRs_0 \,.$$

Celý argument logaritmu upravíme ako niečo na $s/2$, takže dostaneme

$$S(p,V) = nR \ln \left(\frac{pV^{\frac{s+2}{s}}}{Rn^{\frac{s+2}{s}}} \right)^{\frac{s}{2}} + nRs_0 = \frac{s}{2} nR \ln \left(\frac{pV^\kappa}{Rn^\kappa} \right) + nRs_0 \,,$$

kde sme si spomenuli na definičný vzorec pre κ

$$\kappa = \frac{s+2}{s}\,.$$

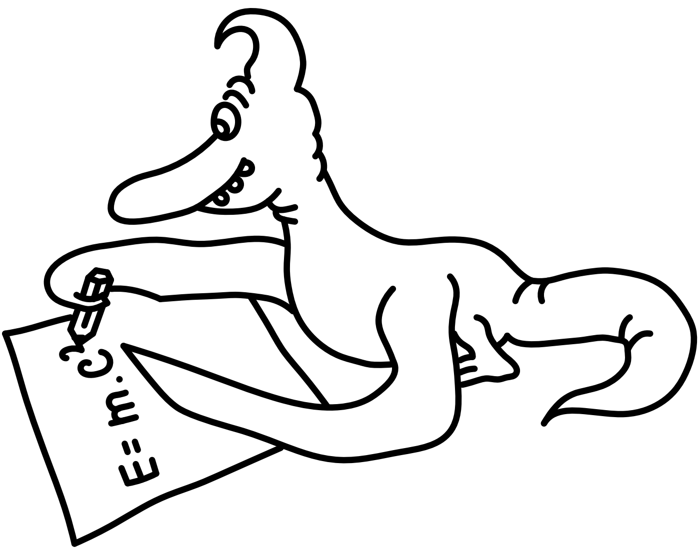
Dosadiť za teplotu z kalorickej rovnice je tiež jednoduché

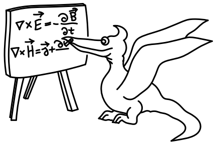
$$S(U,V) = nR\ln\left(\frac{U^{\frac{s}{2}}V}{n(\frac{s}{2}nR)^{\frac{s}{2}}}\right) + nRs_0\,.$$

Po vyňatí exponentu vieme tento výraz upraviť na

$$S(U,V) = \frac{s}{2}nR\ln\left(\frac{UV^{\frac{2}{s}}}{\frac{s}{2}Rn^{\frac{s+2}{s}}}\right) + nRs_0 = \frac{s}{2}nR\ln\left(\frac{UV^{\kappa-1}}{\frac{s}{2}Rn^{\kappa}}\right) + nRs_0\,.$$

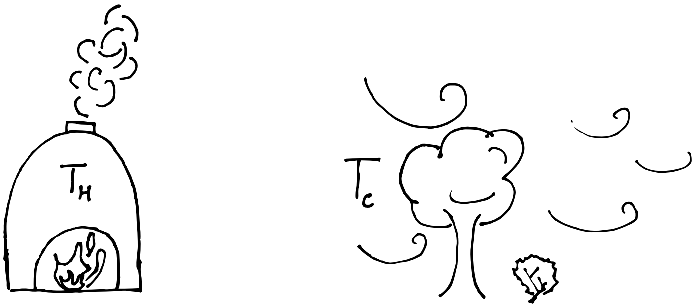
Ján Pulmann
`janci@fykos.cz`





Seriál: Tepelné stroje

Predstavte si, že staviate napríklad parnú lokomotívu. V nej máte kotol s nejakou vysokou teplotou T_H, okolo je zase chladný vzduch s teplotou T_C. Ak prepojíte kotol a okolie, tak bude tiecť teplo a vy sa snažíte čo najviac tohto toku využiť na konanie práce – každé odobraté teplo z kotla totiž získavate pálením uhlia. Zo zákona zachovania energie vieme, že ak odoberieme z kotla teplo Q a vykonáme prácu W, tak do okolia potom pošleme zvyšok, $Q - W$.



Obr. 6: Kotol a okolie.

Prirodzená otázka je: „Aké je maximálne W pri danom Q?“. Určite nemôže byť $W = Q$; to by sme odobrali teplo a premenili ho všetko na prácu (to je perpetuum mobile druhého druhu). Nejakú prácu ale získať určite môžeme; stačí napríklad dať vrtuľku do prievanu spôsobeného rozdielom teplôt.

Urobme zopár zjednodušujúcich predpokladov. Považujme kotol aj okolie za rezervoáre: to znamená, že ich teplota sa nemení pri odoberaní tepla. Tiež si povedzme, že mechanizmus – stroj, ktorý sa snaží premeniť tok tepla na prácu, sa po odovzdaní získanej práce a prebytočného tepla vráti do pôvodného stavu, teda v ňom neostane žiadna zvyšková energia.

Počítajme teraz celkovú zmenu entropie sústavy kotol + stroj + okolie. Kotol príde o teplo Q pri teplote T_H, okolie prijme teplo $Q - W$ pri teplote T_C. So strojom sa niečo medzi tým deje, no na konci je v rovnakom stave, takže jeho entropia sa nemení. Celková zmena entropie je súčet [22]

$$\Delta S_\mathrm{tot} = \frac{-Q}{T_\mathrm{H}} + \frac{Q - W}{T_\mathrm{C}}\,,$$

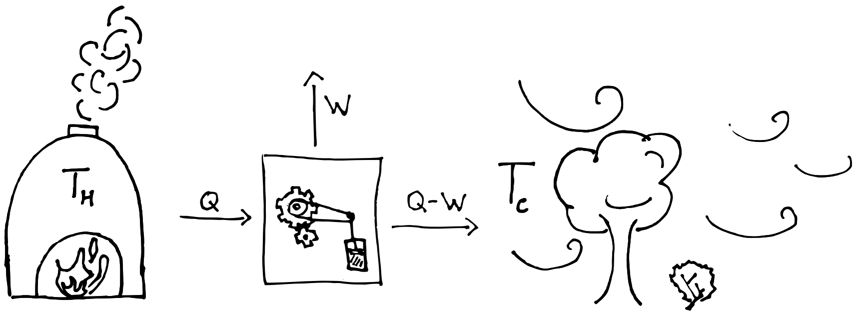
a keďže je táto sústava izolovaná, celková zmena entropie musí byť kladná

$$\Delta S_\mathrm{tot} \geq 0\,.$$

Z tejto nerovnosti vyjadríme prácu W a dostaneme

$$W \leq Q \left(1 - \frac{T_\mathrm{C}}{T_\mathrm{H}}\right)\,.$$

[22] Nemali by sme zabudnúť ani na systém, ktorý nakoniec odoberie získanú prácu: ten je totiž v kontakte so strojom. Žiadne teplo do neho ale netečie a predpokladáme, že si sám entropiu nevyrobí.



Obr. 7: Extrakcia práce strojom.

Druhý termodynamický zákon nám teda dáva ohraničenie na maximálnu prácu, akú môžeme extrahovať z takéhoto procesu! Práca bude najväčšia, ak nastane rovnosť, čo zodpovedá vratnému procesu.

Tento výsledok je príklad *zákona o maximálnej práci*, ktorý hovorí, že za istých predpokladov je extrahovaná práca maximálna pre vratné procesy a táto práca je rovnaká pre všetky vratné procesy (spájajúce dva rovnaké stavy).

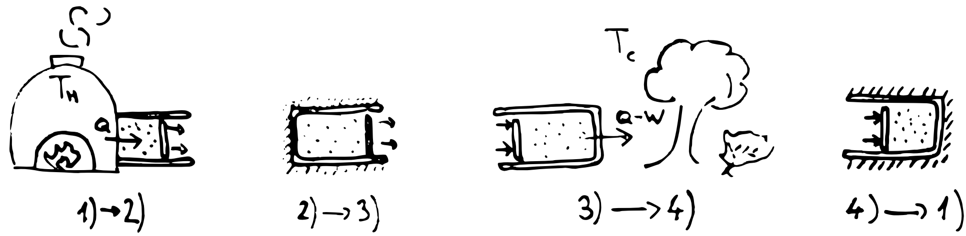
Carnotov cyklus

Zatiaľ sme sa vôbec nerozprávali o tom, ako postaviť tento stroj. Jeden zo spôsobov je využiť ideálny plyn na prenášanie tepla. Vieme, že s použitím len dvoch rezervoárov môžu byť vratné len izotermické a adiabatické procesy. Ako s pomocou týchto procesov získať prácu vymyslel už Carnot:

Vezmeme piest s ideálnym plynom. Postupne vykonáme štyri procesy spájajúce štyri rôzne stavy, ktoré označíme 1, 2, 3 a 4.

- 1) → 2) Začneme s plynom na vyššej teplote T_{H} – toto je stav 1. Počas prvého procesu ho dáme do kontaktu s kotlom a necháme ho izotermicky sa rozpínať. Čím väčší bude finálny objem, tým viac tepla odoberieme a tým viac práce vykonáme.
- 2) → 3) Máme teraz plyn v stave 2 na vyššej teplote. Aby sme ho ochladili, izolujeme ho a necháme ho adiabaticky sa rozpínať, až kým nenadobudne teplotu okolia T_{C}.
- 3) → 4) Na nižšej teplote plyn budeme izotermicky stláčať, prebytočné teplo bude unikať do okolia. Zastavíme sa na takom objeme, aby sme sa potom v poslednom procese vrátili späť do pôvodného stavu.
- 4) → 1) Tu pokračujeme v stláčaní, ale v úplnej izolácii, teda adiabaticky. Stláčame, čím plyn zohrievame, až do teploty T_{H}. V predchádzajúcom kroku sme plyn stlačili tak, že aj objem a tlak sa teraz vrátili do pôvodného stavu, a sme opäť v stave 1.

Vidíme, prečo sa Carnotov cyklus volá cyklus: plyn sa nakoniec vrátil do pôvodného stavu a celý proces môžeme opakovať. Všimnite si, že práca sa koná vo všetkých štyroch krokoch: v prvých dvoch ju získavame z plynu, v druhých dvoch zase konáme prácu na plyn. Práce pri dvoch adiabatických dejoch sa ale vyrušia. Pri adiabatickom deji je totiž nulové teplo Q, takže práca je rovná zmene vnútornej energie. Oba procesy idú medzi rovnakými koncovými



Obr. 8: Carnotov cyklus

teplotami, ale opačnými smermi. Pre ideálny plyn závisí energia len od teploty, a teda zmeny vnútornej energie sú v oboch prípadoch presne opačné, z čoho nakoniec vyplýva, že aj práce sú opačné.

Môžeme teda povedať, že skutočná práca sa koná pri izotermických procesoch. Aká je celková získaná práca? Ide o vratný dej, takže by sme mali získať prácu $W = Q\,(1 - T_\mathrm{C}/T_\mathrm{H})$. To ale vieme aj sami overiť, vy si to môžete dopočítať ako jednu zo seriálových úloh.

Jedinečnosť Carnotovho cyklu

Vďaka takejto priamej konštrukcii vieme, že rovnosť v nerovnici

$$W \leq Q\left(1 - \frac{T_\mathrm{C}}{T_\mathrm{H}}\right)\,,$$

vieme dosiahnuť. Vieme tiež, že Carnotov cyklus dosahuje najvyššiu možnú získanú prácu pri danom teple.

> Cyklický tepelný stroj s dvoma rezervoármi, odoberajúci teplo Q z toho teplejšieho, dodá prácu maximálne
>
> $$W = Q\left(1 - \frac{T_\mathrm{C}}{T_\mathrm{H}}\right)\,.$$

My sme to dokázali s pomocou úvahy o entropii, no existuje aj iný, tiež zaujímavý dôkaz. Predstavme si, že máme stroj, ktorý odporuje tomuto tvrdeniu, teda je cyklický (vracia sa do pôvodného stavu), berie teplo Q no dáva prácu W' väčšiu než Carnotov cyklus. Vezmime si Carnotov stroj a otočme ho: on teraz vezme z chladnejšieho rezervoáru teplo $Q - W$, vezme aj prácu W a do teplejšieho vráti teplo Q. Ak pustíme oba stroje po sebe, celkový výsledok je: teplejší rezervoár má stále rovnako veľa tepla, získali sme prácu $W' - W$ a z chladnejšieho rezervoáru sme odobrali teplo

$$Q - W - (Q - W') = W' - W\,.$$

Celkový efekt teda je, že sme odobrali teplo a vykonali ekvivalentnú prácu, čo je perpetuum mobile druhého druhu. Stroj účinnejší ako Carnotov stroj teda nemôže existovať.

Pri tomto dôkaze sme použili otočený Carnotov stroj, takzvanú *Carnotovu chladničku.* To sme mohli urobiť vďaka tomu, že Carnotov cyklus je vratný. Hocijaký iný vratný cyklus vieme tiež otočiť. Ak by takýto vratný cyklus bral teplo Q a dával energiu W'' menšiu ako W, po otočení by z neho bola chladnička účinnejšia ako tá Carnotova! Brala by totiž teplo $Q - W''$ a potrebovala by len energiu $W'' < W$. Spojením takejto chladničky a Carnotovho stroja by sme dostali opäť perpetuum mobile druhého druhu. Dostávame teda druhé tvrdenie pre vratné cyklické deje.

Vratný cyklický tepelný stroj s dvoma rezervoármi, odoberajúci teplo Q z toho teplejšieho, dodá prácu práve

$$W = Q\left(1 - \frac{T_\mathrm{C}}{T_\mathrm{H}}\right) ,$$

teda je rovnako účinný ako Carnotov stroj.

Tepelné stroje

Pozrime sa na záver na rôzne tepelné stroje. U nich môžeme definovať účinnosť v závislosti na ich funkcii. Tri kategórie tepelných strojov sú motory, chladničky a tepelné čerpadlá.

Motory

Motory vezmú teplo Q z teplejšieho rezervoáru, vykonajú prácu W a zvyšok vrátia do chladnejšieho rezervoáru. Pre motory definujeme účinnosť ako podiel získanej práce a dodaného tepla (práve za to platíme, keď prikladáme palivo)

$$\eta_\mathrm{e} = \frac{W}{Q} .$$

Treba si dať pozor: v čitateli je celkový súčet práce, teda získanej mínus použitej, no v menovateli je len odovzdané teplo. V niektorých prípadoch treba pozorne určiť, ktoré teplo to je, jednoduchý príklad takejto záludnosti je v seriálovej úlohe.

My už vieme, že maximálnu účinnosť dosahujú vratné motory. Táto účinnosť je rovná

$$\eta_\mathrm{e,max} = 1 - \frac{T_\mathrm{C}}{T_\mathrm{H}} .$$

Pri veľmi podobných teplotách kotla a okolia je účinnosť veľmi malá, preto je žiaduce čo najviac rozhorúčiť kotol. Vždy sa ale pohybujeme len medzi hodnotami 0 a 1.

Chladničky

Chladničky sa používajú opačne: vezmú energiu W zo zdroja a teplo Q_C z chladnejšieho rezervoáru a do teplejšieho rezervoáru vypustia teplo $Q_\mathrm{C} + W$. Účinnosť sa ale definuje inak: užitočné je pre nás teplo Q_C, platíme za prácu W, účinnosť je teda

$$\eta_\mathrm{r} = \frac{Q_\mathrm{C}}{W} .$$

Maximálna účinnosť je opäť pre Carnotovu chladničku:

$$\eta_\mathrm{r,max} = \frac{Q_\mathrm{C}}{W} = \frac{Q - W}{W} = \frac{Q}{W} - 1 = \frac{1}{\eta_\mathrm{e,max}} - 1 = \frac{T_\mathrm{C}}{T_\mathrm{H} - T_\mathrm{C}} .$$

Tu je to už zaujímavejšie, povolené hodnoty účinnosti sú medzi 0 a ∞. Tie vysoké účinnosti dosiahneme ak je teplý a studený rezervoár podobnej teploty, vtedy treba málo energie na presúvanie tepla medzi nimi. Medzi rezervoármi rovnakej teploty dokonca teplo tečie samo.

Hovoríme o rezervoároch, hoci chladíme ten chladnejší. Myslíme to tak, že počas jedného cyklu stroja sa teploty zmenia zanedbateľne, takže môžeme použiť vzťah $\Delta S = Q/T$. Ak potom postupne meníme teplotu napríklad chladnejšieho rezervoáru, bude sa meniť aj účinnosť.

Tepelné čerpadlá

Nakoniec, tepelné čerpadlá sa používajú napríklad na vykurovanie. Fungujú rovnako ako chladničky, len akoby vnútro chladničky pozerá von z domu a horúca časť chladničky vykuruje dom. Čerpadlo teda z chladnejšieho rezervoáru vezme teplo Q_C a spotrebuje prácu W aby vykúrilo dom teplom $Q_\mathrm{C} + W$. Účinnosť sa definuje opäť ako pomer užitočné ku drahému, teda

$$\eta_\mathrm{p} = \frac{Q_\mathrm{C} + W}{W} \,.$$

Najlepšie čerpadlo je opäť napríklad to Carnotovo, ktorého účinnosť odvodíme z účinnosti chladničky

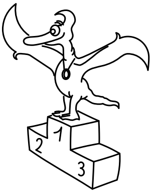
$$\eta_\mathrm{p,max} = \frac{Q_\mathrm{C} + W}{W} = \frac{Q_\mathrm{C}}{W} + 1 = \eta_\mathrm{r,max} + 1 = \frac{T_\mathrm{H}}{T_\mathrm{H} - T_\mathrm{C}} \,.$$

Pri rovnakých teplotách ani nepotrebujeme tepelné čerpadlo, teplo pôjde v podstate samo, ale aj pri nulovej teplote chladnejšieho čerpadla budeme vykurovať aspoň tou energiu, ktorú do čerpadla dáme. Preto sa účinnosť čerpadla hýbe medzi 1 a ∞.

V praxi sa ako chladnejší rezervoár používa zem alebo ešte lepšie geotermálny prameň, ktoré sú hlavne v zime teplejšie ako okolitý vzduch. Treba si tiež uvedomiť, že ak by sme našli vrt s vyššou teplotou vyššou než cieľová teplota domu, nepotrebujeme čerpadlo: stačí teplú vodu z vrtu nahnať do radiátorov.

Všimnite si, že tepelné stroje nám dávajú teoreticky možnosť merať teplotu bez toho, aby sme sa spoliehali na ideálnosť plynu. Stačí totiž zmerať čisto mechanicky merateľné veličiny: teplo a prácu, aby sme mohli povedať niečo o pomere teplôt dvoch rezervoárov. Tým vieme určiť teplotu až na multiplikatívnu konštantu. Tú si môžeme zvoliť ľubovoľne. My si ju volíme tak, aby sme dostali teplotu v Kelvinoch.

To je na tento diel všetko, nabudúce sa pozrieme na podmienky rovnováhy a ich súvis s maximálnou entropiou či minimálnou energiou. To nás dovedie až ku ďalším *termodynamickým potenciálom* ako entalpia a Gibbsova voľná energia.



Pořadí řešitelů po III. sérii

Kompletní výsledky najdete na `http://fykos.cz`.

Kategorie prvních ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	III	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	4	4	3	4	5	5	8	6	**39**	*100*	**117**
1.	*Kateřina Rosická*	G J. Ortena, Kutná Hora	4	4	0	4	3	4	8	5	**32**	*82*	**94**
2.	*Ladislav Trnka*	G, Havlíčkův Brod	4	4	1	1	3	3	8	2	**26**	*71*	**83**
3.	*Josef Minařík*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	4	–	3	2	3	4	8	3	**27**	*73*	**79**
4.	*Lucie Kundratová*	G, nám. TGM, Zlín	2	4	3	4	3	–	4	1	**21**	*68*	**73**
5.	*Vojtěch Laitl*	G, Ostrov	4	4	2	1	1	2	8	–	**22**	*63*	**70**
6.	*Jindřich Dušek*	G Jana Keplera, Praha	2	4	1	0	1	6	–	4	**18**	*60*	**60**

Kategorie druhých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	III	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	4	4	3	4	5	5	8	6	**39**	*100*	**117**
1.	*Vít Beran*	Masarykovo G, Plzeň	4	4	3	4	3	1	6	5	**30**	*91*	**106**
2.	*Ondřej Knopp*	G, Třeboň	4	4	3	4	3	4	8	6	**36**	*88*	**103**
3.	*Viktor Rosman*	G, Pelhřimov	4	4	1	4	3	–	7	5	**28**	*77*	**86**
4.	*David Němec*	G, Tanvald	4	4	–	0	–	3	8	4	**23**	*80*	**84**
5.	*Alexandr Jankov*	Matiční G, Ostrava	2	4	0	2	1	3	7	4	**23**	*75*	**82**
6.	*Jan Lindauer*	První české G, Karlovy Vary	4	4	3	2	2	3	8	3	**29**	*65*	**76**
7.	*Tomáš Dulava*	Matiční G, Ostrava	4	4	0	4	3	3	6	3	**27**	*75*	**71**
8.	*Ladislav Nagy*	G a SOŠZZE Vyškov	4	4	2	0	2	2	7	4	**25**	*59*	**69**

Kategorie třetích ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	III	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	2	2	3	4	5	5	8	6	**35**	*100*	**105**
1.	*Jáchym Bártík*	G, Havlíčkův Brod	2	2	1	4	4	4	8	6	**31**	*95*	**100**
2.	*Matěj Mezera*	G, Havlíčkův Brod	2	2	3	3	4	4	7	6	**31**	*93*	**98**
3.–5.	*Daniela Pittnerová*	G L. Svobodu, Humenné	2	1	1	2	2	2	8	5	**23**	*80*	**84**
3.–5.	*Štěpán Stenchlák*	G, Třinec	2	2	3	3	3	2	8	3	**26**	*80*	**84**
3.–5.	*Pavol Šimko*	G V. Nedožerského, SR	2	2	2	1	3	4	7	6	**27**	*80*	**84**
6.	*Jozef Lipták*	G Tajovského, B. Bystrica	2	2	3	3	5	3	8	–	**26**	*81*	**77**
7.	*Petr Šimůnek*	G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice	1	2	3	4	4	3	8	3	**28**	*74*	**74**
8.	*David Vokrouhlický*	G Jana Keplera, Praha	2	1	1	–	3	4	7	5	**23**	*69*	**70**

Kategorie čtvrtých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	III	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	2	2	3	4	5	5	8	6	**35**	*100*	**105**
1.	*Petr Hrubý*	G, Polička	2	2	3	4	3	4	8	6	**32**	*91*	**96**
2.	*Lukáš Supik*	G, Třinec	2	2	3	4	3	–	8	6	**28**	*93*	**93**

	jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	III	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	2	2	3	4	5	5	8	6	**35**	*100*	**105**
3.	*Tomáš Hrbek*	G J. Ressela, Chrudim	2	2	2	3	2	3	7	4	**25**	*77*	**81**
4.	*Peter Kubaščík*	G Kysucké Nové Mesto	1	2	1	2	3	5	7	5	**26**	*75*	**79**
5.	*Šimon Knoška*	G A. Kmeťa, B. Štiavnica	2	1	3	2	3	3	4	5	**23**	*75*	**72**
6.	*Andrej Uhliarik*	G A. Bernoláka, Námestovo	2	1	2	4	3	–	8	3	**23**	*69*	**66**
7.	*Andrea Tóthova*	G Jura Hronca, Bratislava	1	2	0	3	–	4	7	3	**20**	*66*	**55**
8.	*Klára Stefanová*	G B. Němcové, HK	2	2	–	0	–	–	–	3	**7**	*74*	**53**

FYKOS
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `http://fykos.cz`
e-mail: `fykos@fykos.cz`

FYKOS je také na Facebooku
http://www.facebook.com/Fykos

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.