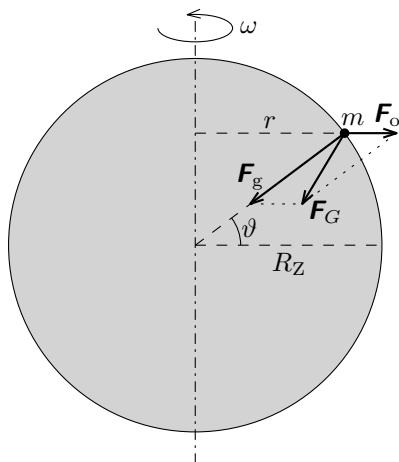


Úloha I.E ... malé gé

8 bodů; průměr 5,42; řešilo 86 studentů

Změřte místní tíhové zrychlení alespoň dvěma odlišnými metodami. Tyto metody následně zevrubně porovnejte. Viktor slyšel námitku řešitelů, že je nebvaví se pořád čvachtat ve vodě.

Na každé těleso na povrchu Země působí gravitační síla Země \mathbf{F}_g a síla odstředivá \mathbf{F}_o způsobená rotací Země kolem své osy. Výslednicí těchto dvou sil je síla tíhová \mathbf{F}_G (viz obrázek 1).



Obr. 1: Tíhová síla \mathbf{F}_G je výslednicí gravitační síly \mathbf{F}_g a odstředivé síly \mathbf{F}_o . Poměr velikostí obou sil na obrázku neodpovídá skutečnosti.

Jelikož velikost odstředivé síly závisí na vzdálenosti r od osy rotace, a tedy na zeměpisné šířce, i velikost tíhové síly závisí na zeměpisné šířce ϑ . Velikost gravitační síly působící na těleso o hmotnosti m je

$$F_g = G \frac{mM_Z}{R_Z^2},$$

kde $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ je gravitační konstanta, $M_Z = 5,973 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ je hmotnost Země a $R_Z = 6,371 \cdot 10^6 \text{ m}$ je její střední poloměr.¹ Velikost odstředivé síly je

$$F_o = mr\omega^2 = mR_Z \frac{4\pi^2}{T^2} \cos \vartheta,$$

kde ω je úhlová rychlost, kterou vypočítáme z periody $T = 8,6 \cdot 10^4 \text{ s}$ (střední siderický den²) a vzdálenost r jsme určili z obrázku 1. Vektory těchto dvou sil svírají úhel $180^\circ - \vartheta$, velikost výslednice (tíhové síly) zjistíme z kosinové věty jako

$$F_G = \sqrt{F_o^2 + F_g^2 - 2F_o F_g \cos \vartheta}.$$

¹<https://cs.wikipedia.org/wiki/Země>

²https://cs.wikipedia.org/wiki/Hvězdný_čas

Velikost tíhového zrychlení g působící na těleso o hmotnosti m pak vypočítáme jako

$$g = \frac{F_G}{m}.$$

Pro naši zeměpisnou šířku $\vartheta = 50^\circ$ pak po dosazení vychází běžně udávaná hodnota $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Ještě poznamenejme, že bylo stanoveno tzv. normální tíhové zrychlení³, které vychází z hodnoty pro zeměpisnou šířku 45° u hladiny moře, a jehož tabulková hodnota je $g_0 = 9,806 65 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Akcelerometr

Nejjednodušší metoda, která nás může pro měření zrychlení (ať už tíhového či jiného) napadnout, je využití akcelerometru, tedy zařízení měřícího zrychlení. Akcelerometry jsou obsaženy snad ve všech v dnešní době prodávaných chytrých telefonech a tabletech (pro detekci natočení, pádu nebo i poklepání) a také ve fotoaparátech (pro detekci focení na výšku a automatické otočení fotografie) nebo například v některých noteboocích (pro detekci pádu a ochrany pevného disku). Akcelerometry v těchto zařízeních jsou typu MEMS (micro electro-mechanical systems), která měří zrychlení ve třech navzájem kolmých osách pomocí měření pohybu miniaturních ramének se závaží, většinou měřením změny kapacity mezi raménky.

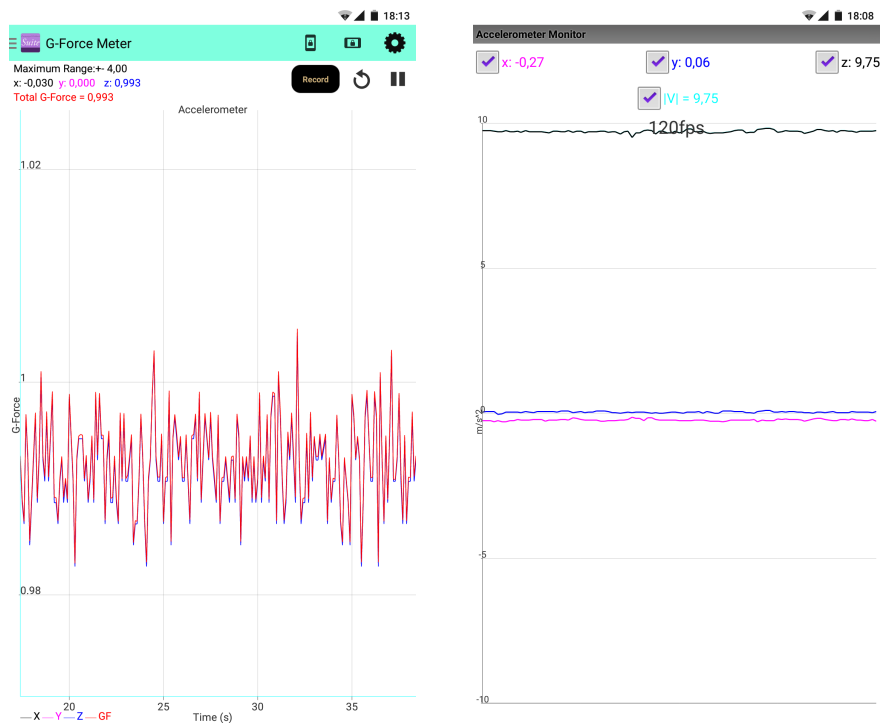
Důležité je poznamenat, že výstupem většiny těchto malých akcelerometrů (ať už mají napěťový či digitální výstup) je (pro každou z os) téměř vždy zrychlení naměřené v násobcích g , přičemž někteří výrobci navíc v datasheetech udávají, že tato jednotka je rovna $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Vzhledem k malé absolutní přesnosti těchto zařízení (koneckonců se běžně nepoužívají k absolutnímu měření zrychlení) je však bezpředmětné, zda jde u tuto hodnotu u všech zařízení nebo se o jednotky procent liší. Pokud nám tedy nějaká aplikace v telefonu zobrazuje zrychlení v jednotkách SI (tedy $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$), pak tato hodnota velmi pravděpodobně vznikla vynásobením hodnoty odečtené z akcelerometru nějakou konstantou blízkou normálnímu tíhovému zrychlení.

Na experiment jsme použili mobilní telefon se systémem Android, přičemž jsem použili dvě různé aplikace – jedna zobrazuje přímo hodnotu vyčtenou z akcelerometru (tedy v násobcích g), druhá tuto hodnotu přepočítává na jednotky SI, viz obrázek 2. Naměřili jsme, že tíhové zrychlení je asi $0,993g$ nebo $9,75 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Na obrázku 2 byl telefon v obou případech ponechán v klidu, můžeme tedy vidět (zejména na levém screenshotu) šum a rozlišení akcelerometru.

Abychom mohli vyhodnotit nejistoty měření, kromě akcelerometru v mobilním telefonu, o kterém jsme neměli žádné podrobné informace, jsme pro experiment použili akcelerometr Analog Devices ADXL345⁴, se kterým komunikujeme pomocí sběrnice I²C. Ten naměřil hodnotu $1,01g$. V datasheetu je deklarovaná jeho chyba (0g Output Deviation from Ideal) jako $\pm 3,5 \cdot 10^{-2}g \doteq 0,35 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ v ose x a y a $\pm 4,0 \cdot 10^{-2}g \doteq 0,40 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ v ose z . Navíc má tento akcelerometr v sobě uložené údaje o offsetu, které je možné upravit, a tak zařízení kalibrovat. Skutečný offset se může měnit mechanickým namáháním nebo i během pájení. Hodnota, kterou naměříme, se tedy od skutečné může bez předchozí kalibrace značně lišit. Relativní nejistota pak může být i v řádu desítek procent. Z tohoto je patrné, že akcelerometry v mobilních telefonech a podobných zařízeních se pro přesné absolutní měření tíhového zrychlení příliš nehodí, a proto ve zbytku vzorového řešení detailně popíšeme čtyři jiné metody pro měření tíhového zrychlení.

³https://cs.wikipedia.org/wiki/Tihov%C3%A9_zrychlen%C3%AD

⁴<http://www.analog.com/media/en/technical-documentation/data-sheets/ADXL345.pdf>



Obr. 2: Dvě aplikace pro Android pro zobrazení zrychlení měřeného akcelerometrem. První zobrazuje hodnotu v jednotkách SI, druhá jako násobek g .

Matematické kyvadlo

Mějme hmotný bod (kuličku) hmotnosti m na nehmotném závěsu délky l (tedy matematické kyvadlo). Kuličku vychýlíme tak, že závěs svírá se svislým směrem úhel α (viz obrázek 3). Na kuličku působí svisle dolů tíhová síla \mathbf{F}_G o velikosti $F_G = mg$, kde g je tíhové zrychlení, a tahová síla od závěsu. Tíhovou sílu rozložíme do směru závěsu (složka \mathbf{F}_t) a do směru na tento směr kolmý (složka \mathbf{F}_α). Protože se bod nepohybuje ve směru závěsu, velikost složky \mathbf{F}_t je rovna tahové síle závěsu, vektorový součet těchto sil je tedy nulový. Jediná síla, která zbývá, je \mathbf{F}_α , jejíž velikost vypočítáme z obrázku jako $F_\alpha = F_G \sin \alpha = mg \sin \alpha = mgx/l$. Nyní předpokládejme, že úhel α je velmi malý. Pak síla \mathbf{F}_α působí ve vodorovném směru a hmotný bod se pohybuje po úsečce. Nyní již můžeme napsat pohybovou rovnici

$$F_\alpha = \frac{mg}{l}x = m \frac{d^2x}{dt^2},$$

kde t je čas, což je rovnice harmonického kmitání, jejímž řešením je

$$x(t) = x_{\max} \sin \left(\sqrt{\frac{g}{l}}t - \varphi_0 \right),$$

kde x_{\max} je amplituda kmitů a φ_0 je fáze kmitů v čase $t = 0$. Odtud již vidíme, že perioda kmitu matematického kyvadla je

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}. \quad (1)$$

Při znalosti délky matematického kyvadla a změření jeho periody kmitu tedy můžeme vypočítat tíhové zrychlení. Pro úplnost doplníme, že přesné řešení⁵ (pro libovolný rozkmit $\varphi_m \in (0; \pi)$) dává periodu

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \left(\frac{\varphi_m}{2}\right) + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \left(\frac{\varphi_m}{2}\right) + \dots \right]. \quad (2)$$

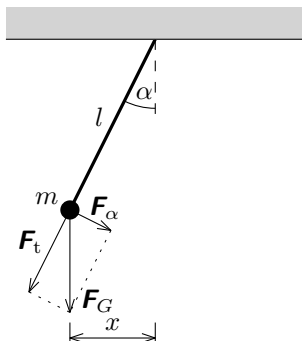
Závislost periody na úhlu rozkmitu je vynesena na obrázku 4. Vidíme, že pro malé úhly je téměř konstantní.

Tento model zanedbává odpor vzduchu. Ten je však při rychlostech, které jsme při experimentech používali, tak malý, že během měření (minimálně 10 kmitů) se amplituda kmitů téměř neměnila. Lze jej tedy zanedbat, aniž bychom výrazně ovlivnili výsledek.

Měření jsme prováděli pomocí optické závory. Pro její konstrukci jsme použili LED a fototranzistor, oboje pracující na vlnové délce 940 nm, viz schéma zapojení na obrázku 5. Proud tekoucí fototranzistorem závisí na intenzitě světla, která na něj dopadá. Jestliže mezi LED a fototranzistor vložíme nějaký předmět, intenzita světla dopadajícího na fototranzistor se sníží, proud jím tekoucí se též sníží, dle Ohmova zákona se tedy sníží napětí na rezistoru o odporu $1 \text{ M}\Omega$ a my pomocí analogové digitálního převodníku detekujeme nižší napětí (jak se vidět na obrázku 6). Napětí detekujeme 10bitovým AD převodníkem v mikrokontroléru ATmega168 (Arduino Nano), který nám naměřené hodnoty odesílá do počítače. Vzorkovací frekvence je asi 1 kHz.

Ukázka části jednoho z naměřených signálů je na obrázku 6. V okamžiku, kdy se okraj kuličky dostane mezi LED a fototranzistor, napětí poklesne, v okamžiku, kdy kulička spojnici

⁵<http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/1239-presne-reseni-matematickeho-kyvadla>



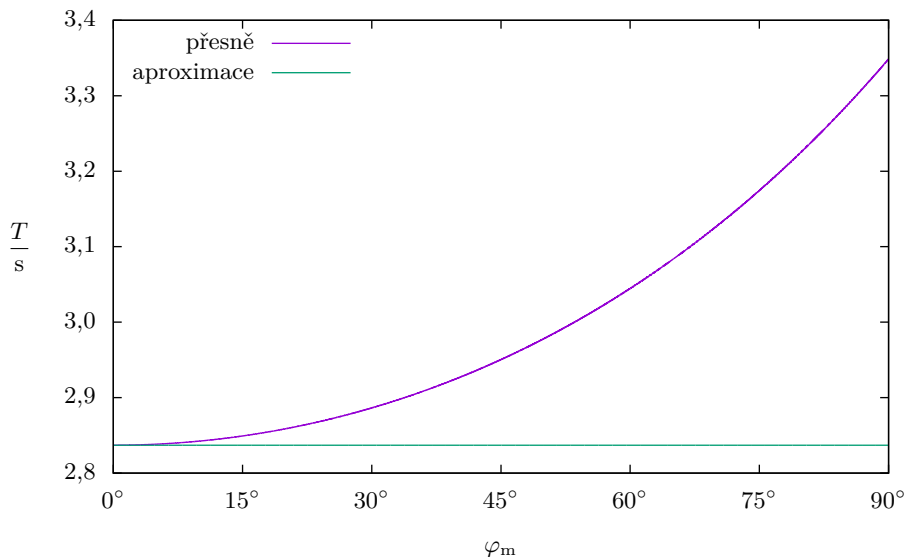
Obr. 3: Rozložení tíhové síly působící na hmotný bod na nehmotném vlákně (matematické kyvadlo).

zdroje a detektoru opustí, napětí opět stoupne. Během jednoho kmitu projde optickou závorou kulička dvakrát. V naměřeném signálu najdeme všechny sestupné hrany s danou úrovní (tedy místa, kdy kulička fototranzistor zastínila). Dále vybereme každé sudé (nebo naopak každé liché) průchody a zjistíme čas mezi nimi. Průměr těchto časů pak budeme považovat za periodu kmitů.

Pro experiment budeme používat kuličku o průměru $d = (17,7 \pm 0,1)$ mm a hmotnosti $m = (7,19 \pm 0,02)$ g. Kulička má v sobě otvor procházející skrz jejím středem, kterým byla protažena tenká nit, jejíž hmotnost byla menší než 0,1 g, tedy zanedbatelná. V případě, že bychom ji zanedbat nechtěli, mohli bychom postupovat jako v případě fyzického kyvadla (viz dále) a pro výpočet tíhového zrychlení použít rovnici (4). Nit zvyšuje moment setrvačnosti kyvadla. V případě jejího zanedbání tedy předpokládáme, že moment setrvačnosti kyvadla je nižší než skutečný, a tedy námi vypočítané tíhové zrychlení je nižší než skutečné.

Měření jsme provedli pro různé délky kyvadla a naměřenou závislost periody na délce vynesli do grafu na obrázku 7. Naměřenou závislost jsme poté fitovali závislostí teoretickou dle rovnice (1), čímž jsme dostali hodnotu tíhového zrychlení $(9,875 \pm 0,009)$ m·s⁻² (zde uvedená odchylka je čistě jen chyba fitu).

Nejistota měření tíhového zrychlení touto metodou se sestává z nejistoty měření periody a nejistoty měření délky kyvadla. Dalším zdrojem nejistoty může být skutečnost, že nit není dokonale ohebná, a vrací tak kuličku do rovnovážné polohy. Abychom tuto skutečnost ilustrovali, nahradili jsme nit za rybářský vlasec o průměru 0,35 mm a experiment opakovali, přičemž jsme naměřili hodnotu tíhového zrychlení 9,97 m·s⁻². Použitá nit je mnohem ohebnější než vlasec, přesto však není dokonale ohebná. Odhadněme nejistotu způsobenou nití na $\Delta_0 g = 0,05$ m·s⁻². Tato nejistota však není symetrická, neboť ohyb nití způsobuje, že naměříme hodnotu tíhového zrychlení vyšší než skutečnou. S touto nejistotou je pak možné naložit různými způsoby. Pro snazší vyhodnocení výsledné nejistoty a jednodušší zápis výsledku (který bude symetrický) budeme tuto nejistotu považovat za symetrickou a naložíme s ní jako se všemi ostatními v tomto měření. Periodu měříme optickou závorou, přičemž při každém měření měříme minimálně dvacet period (které detekujeme jako na obrázku 6, takže během měření proběhne 21 kyvů). Směrodatná odchylka takto naměřených period během jednoho měření se pohybovala pod 1 ms, přičemž hodnota napětí je zaznamenávána každou milisekundu. Nejistotu měření



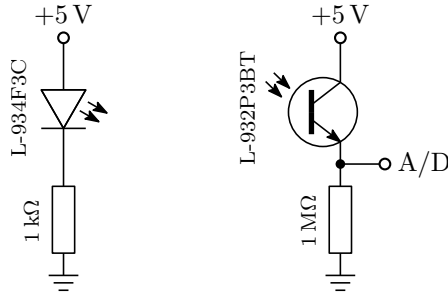
Obr. 4: Závislost periody matematického kyvadla na rozkmitu pro délku kyvadla 2 m a tíhové zrychlení $9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

periody tedy odhadujeme na $\Delta T = 2 \text{ ms}$. Nejistotu měření délky kyvadla odhadujeme na $\Delta l = 5 \text{ mm}$. Nejistotu typu B měření tíhového zrychlení pak určíme podle zákona šíření nejistot jako

$$\Delta_{B,g} = \sqrt{\left(\Delta l \frac{\partial g}{\partial l}\right)^2 + \left(\Delta T \frac{\partial g}{\partial T}\right)^2 + (\Delta_0 g)^2} = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2 \Delta l}{T^2}\right)^2 + \left(\frac{8\pi^2 l \Delta T}{T^3}\right)^2 + (\Delta_0 g)^2}.$$

Nejistota závisí na délce kyvadla a jeho periodě. Protože perioda roste s délkou kyvadla (a tedy klesá jak relativní nejistota délky, tak relativní nejistota periody), je zřejmé, že nejvyšší bude nejistota pro nejkratší délku kyvadla, v našem případě $0,08 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Chyba fitu (která vypovídá také o nejistotě typu A) byla v našem případě o řád nižší, tedy zanedbatelná. Toto číslo tedy budeme považovat za celkovou nejistotu měření. Při měření jsme používali malé úhly rozkmitu, do 5° . Podle obrázku 3 se pro tyto úhly přesné řešení od naší aproximace liší jen málo. Podle aproximace pro malé úhly (kdy se jedná o harmonické kmity) pro kyvadlo délky 2 m v tíhovém poli s tíhovým zrychlení o velikosti $9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ je dle rovnice (1) perioda $2,837 \text{ s}$. Dle přesného řešení v rovnici (2) je pro rozkmit 5° perioda $2,838 \text{ s}$, pro 10° je to $2,842 \text{ s}$ a pro 15° pak $2,848 \text{ s}$. Při úhlech do 5° je chyba menší než 1 ms , tedy menší než výše uvedená nejistota, můžeme ji tedy zanedbat.

Měřením periody kmitu matematického kyvadla byla určena hodnota tíhového zrychlení $(9,88 \pm 0,08) \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.



Obr. 5: Schéma zapojení optické závory.

Fyzické kyvadlo

Při odvození periody kmitu fyzického kyvadla o hmotnosti m vyjdeme z pohybové rovnice rotačního pohybu

$$M = J \frac{d^2 \alpha}{dt^2}, \quad (3)$$

kde M je moment síly působící na těleso, J je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose otáčení, α je úhel a t čas. Na kyvadlo působí tíhová síla \mathbf{F}_G . Tu opět, stejně jako v případě odvození uvedeného u matematického kyvadla, rozložíme na dvě složky \mathbf{F}_t a \mathbf{F}_α (viz obrázek 8). Moment síly \mathbf{F}_t vzhledem k ose v bodě O je nulový, moment tíhové síly je tedy roven momentu síly \mathbf{F}_α , tedy

$$M = r_T F_\alpha = r_T m g \sin \alpha.$$

Po dosazení do rovnice (3) dostáváme diferenciální rovnici

$$r_T m g \sin \alpha = J \frac{d^2 \alpha}{dt^2}.$$

Její řešení není snadné, proto použijeme (stejně jako v případě matematického kyvadla) aproximaci $\sin \alpha \approx \alpha$, která platí pro malé úhly α , řekneme tedy, že amplituda kmitů je malá. Tím dostaneme rovnici

$$\frac{r_T m g}{J} \alpha = \frac{d^2 \alpha}{dt^2},$$

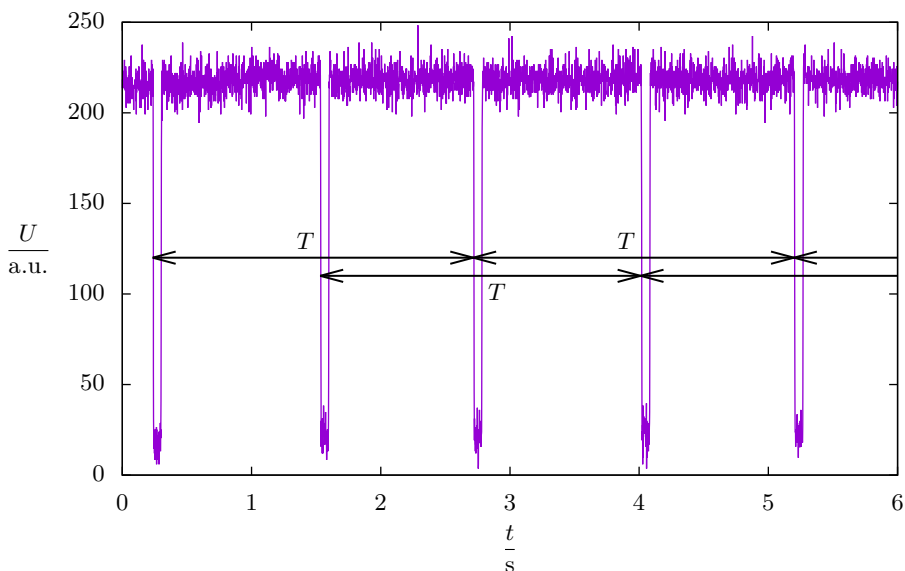
jejíž řešení je

$$\alpha(t) = \alpha_{\max} \sin \left(\sqrt{\frac{m g r_T}{J}} t - \varphi_0 \right),$$

kde α_{\max} je amplituda kmitů a φ_0 je fáze v čase $t = 0$. Perioda kmitů pak je

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{m g r_T}} \Rightarrow g = \frac{4\pi^2 J}{m r_T T^2}. \quad (4)$$

Přesné řešení by bylo analogické s tím pro matematické kyvadlo uvedeným v rovnici (2). Všimněme si, že pokud by těleso bylo hmotným bodem ve vzdálenosti l (šlo by o matematické kyvadlo této délky), pak by moment setrvačnosti byl $J = m l^2$, těžiště by bylo ve vzdálenosti $r_T = l$ a dostali bychom skutečně vztah (1).

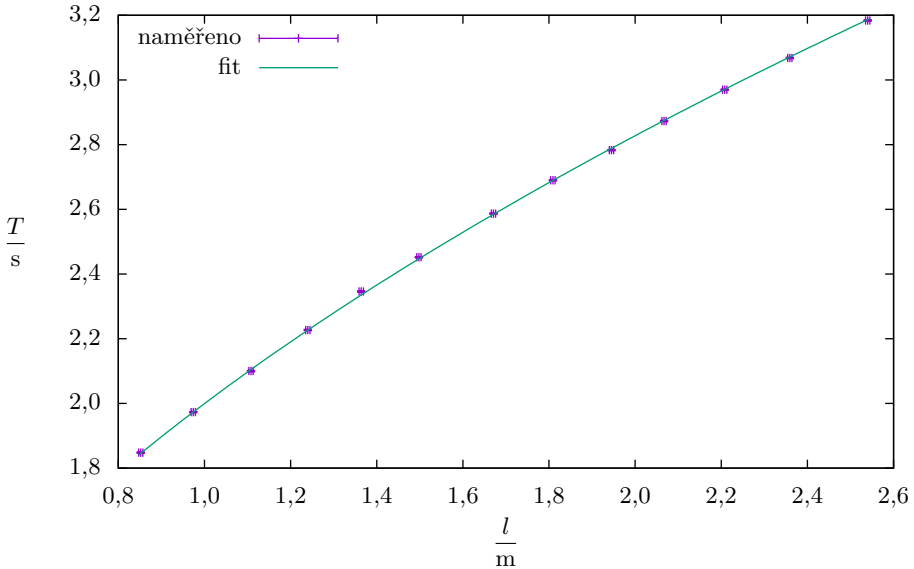


Obr. 6: Signál naměřený optickou závorou při průchodech kuličky (matematické kyvadlo) s vyznačenou periodou. Délka kyvadla byla $l = 1\,544$ mm, průměrná perioda kmitů $T \doteq 2,49$ s.

Jako tuhé těleso jsme použili průhledné plastové pravítko délky 50 cm se dvěma otvory po každé straně. Těmito otvory jsme postupně protáhli hladkou kovovou tyč s menším průměrem (asi o 0,05 mm), čímž vzniklo kluzné uložení. Při tomto experimentu jsme zanedbali tření v uložení, to je však tak malé, že po deseti kmitech se amplituda kmitů změnila jen velmi málo. Hmotnost pravítka byla změřena jako $(149,0 \pm 0,1)$ g. Pro určení polohy těžiště (pravítko má kvůli různým zkosením pouze jednu rovinu symetrie) a zejména momentů setrvačnosti vůči osám dvou otvorů, které budeme používat jako osy otáčení, jsme pravítko důkladně změřili ocelovým pravítkem a posuvným měřítkem a namodelovali v programu Autodesk Inventor, který nám po zadání hmotnosti momenty setrvačnosti vypočítal (viz obrázek 9). Moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející otvorem blíže okraji byl určen jako $1,266 \cdot 10^{-2}$ kg·m², vzhledem k ose procházející druhým otvorem pak $8,752 \cdot 10^{-3}$ kg·m². Vzdálenost těžiště od osy prvního otvoru byla určena jako 249 mm, od osy druhého otvoru pak 189 mm.

Pro měření periody kmitů jsme opět použili optickou závoru (obrázek 5). Použité pravítko je průhledné nejen pro viditelné světlo, ale i v okolí vlnové délky 940 nm, které naše optická závara používá. To znamená, že naměřený signál bude odlišný od obrázku 6, kde byla použita neprůhledná kulička, viz obrázek 10. Na signálu je viditelné, že signál nejprve klesá, což odpovídá okraji pravítka se stupnicí. Dále signál naopak naroste, což odpovídá místu, kde na pravítku končí zkosení. V tomto místě je povrch pravítka zaoblen a chová se tak patrně jako čočka, která fokusuje světlo z LED. Po tomto zaoblení světlo prochází rovnou částí pravítka a signál se vrátí přibližně na hodnotu, jakou měříme bez pravítka.

Pro každé ze dvou různých os otáčení bylo provedeno deset experimentů, přičemž měření probíhalo minimálně deset kmitů, z kterých jsme získali minimálně dvacet hodnot periody



Obr. 7: Naměřená závislost periody T matematického kyvadla na jeho délce l fitovaná teoretickou závislostí dle rovnice (1).

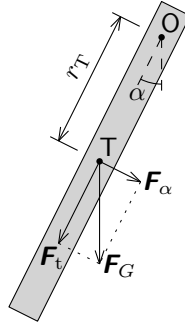
kmitů (viz obrázek 10), celkem tedy minimálně sto hodnot. Z těchto měření jsme vypočítali průměrnou hodnotu, čímž jsme získali hodnotu periody 1,171 s v případě osy blíže okraje pravitka, resp. 1,117 s v případě osy druhé. Po dosazení do rovnice (4) dostáváme hodnotu tíhového zrychlení $9,828 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, resp. $9,829 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Pro výpočet nejistoty typu A (tedy nejistota projevující se drobnými odchylkami při opakovaných měřeních) měření periody jsme nejprve za pomoci N naměřených hodnot periody T_1, T_2, \dots, T_N vypočítali výběrovou směrodatnou odchylku aritmetického průměru

$$\sigma(\bar{T}) = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (T_i - \bar{T})^2} \quad (5)$$

a tuto hodnotu poté vynásobili 0,975-kvantilem Studentova rozdělení pro N stupňů volnosti. Tímto zajistíme, že s pravděpodobností 95% se skutečná hodnota nachází v intervalu daném výslednou nejistotou. V našem případě pro 30 hodnot použijeme 0,975-kvantil Studentova rozdělení pro 30 stupňů volnosti, tedy $t_{0,975}(30) = 2,04$, kterým jsme výběrovou směrodatnou odchylku aritmetického průměru vynásobili, čímž jsme získali rozšířenou nejistotu $\Delta_A T$. Tato hodnota nám po zaokrouhlení na jednu platnou číslici v obou případech vyšla $\Delta_A T = 1 \text{ ms}$. Co se týče nejistot typu B (tedy nejistot zohledňující nepřesnosti použitých měřidel), tak nejistotu typu B měření periody opět odhadujeme na $\Delta_B T = 2 \text{ ms}$. Kombinovaná nejistota měření periody je tedy

$$\Delta T = \sqrt{(\Delta_A T)^2 + (\Delta_B T)^2} \doteq 2 \text{ ms}.$$



Obr. 8: Rozložení tíhové síly působící v těžišti tuhého tělesa volně se otáčejícího kolem bodu O (fyzické kyvadlo).

Chyba způsobená aproximací pohybové rovnice bude v případě malých úhlů, které jsme používali, opět zanedbatelná (viz nejistoty u matematického kyvadla). Nejistotu měření polohy těžiště ocelovým pravítkem (neboli měření rozměrů pravítka) stanovíme na $\Delta r_T = 1$ mm. Nejistota hmotnosti je již výše zmíněna jako $\Delta m = 0,1$ g. Nejistotu momentu setrvačnosti můžeme pouze odhadnout, neboť byla určena na základě CAM modelu pravítka a měření hmotnosti. Správný a přesný postup by byl vypočítat nejistoty metodou Monte Carlo, tedy náhodně (s Gaussovým rozdělením dle příslušných nejistot) měnit rozměry modelu pravítka a sledovat, jak se mění jeho moment setrvačnosti. To by však znamenalo nutnost vytvořit model pravítka v jiném programu, proto se spokojíme s odhadem nejistoty. Aproximujeme proto pravítko za kvádr o stejné hmotnosti m jako má naše pravítko a rozměrech $a = 530$ mm, $b = 51$ mm, $c = 16$ mm, což jsou vnější rozměry našeho pravítka (jde tedy o nejmenší kvádr, do jakého se naše pravítko vejde). Moment setrvačnosti takového kváдру vzhledem k ose procházející jeho těžištěm je

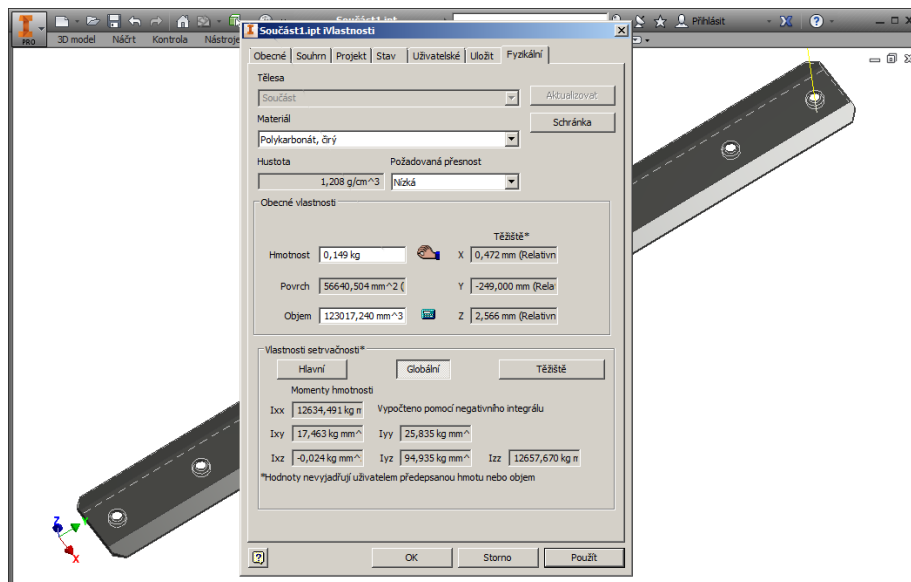
$$J_{k,T} = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2) .$$

Používáme osu vzdálenou d od hrany kváдру, $a/2 - d$ od těžiště. Podle Steinerovy věty je tedy moment setrvačnosti vůči této ose

$$\begin{aligned} J_{k,d} &= J_{k,T} + m \left(\frac{a}{2} - d \right)^2 = m \left[\frac{1}{12} (a^2 + b^2) + \left(\frac{a}{2} - d \right)^2 \right] = \\ &= m \left(\frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{12} - ad + d^2 \right) . \end{aligned}$$

Nejistotu momentu setrvačnosti pak vypočítáme podle zákona šíření nejistot jako

$$\begin{aligned} \Delta J_{k,d} &= \sqrt{\left(\Delta a \frac{\partial J_{k,d}}{\partial a} \right)^2 + \left(\Delta b \frac{\partial J_{k,d}}{\partial b} \right)^2 + \left(\Delta d \frac{\partial J_{k,d}}{\partial d} \right)^2} = \\ &= m \sqrt{\left[\Delta a \left(\frac{2a}{3} - d \right) \right]^2 + \left(\Delta b \frac{b}{6} \right)^2 + [\Delta d (-a + 2d)]^2} , \end{aligned}$$



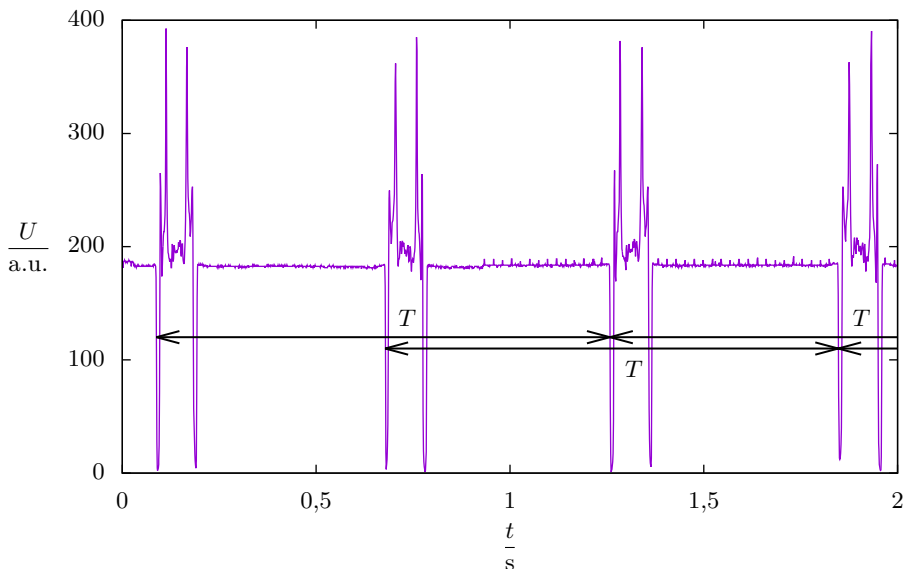
Obr. 9: Z modelu kyvadla (pravítka) v programu Autodesk Inventor můžeme při znalosti hmotnosti určit polohu těžiště a moment setrvačnosti vůči ose, kolem které se kyvadlo otáčí.

kde Δa , Δb , resp. Δd jsou nejistoty měření vzdáleností a , b , d , tedy $\Delta a = \Delta b = \Delta d = 1$ mm. Po dosazení číselných hodnot dostaneme $J_{k,d_1} = (1,276 \pm 0,008) \cdot 10^{-2} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, resp. $J_{k,d_2} = (8,84 \pm 0,07) \cdot 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, což jsou podobné hodnoty jako hodnoty získané z přesnějších modelů. Vypočítané nejistoty tedy poslouží jako dobrý odhad nejistot momentů setrvačnosti získaných z modelu. Pro výpočet celkové nejistoty měření tíhového zrychlení použijeme zákon šíření nejistot, tedy

$$\begin{aligned} \Delta g &= \sqrt{\left(\Delta J \frac{\partial g}{\partial J}\right)^2 + \left(\Delta m \frac{\partial g}{\partial m}\right)^2 + \left(\Delta r_T \frac{\partial g}{\partial r_T}\right)^2 + \left(\Delta T \frac{\partial g}{\partial T}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\Delta J \frac{4\pi^2}{mr_T T^2}\right)^2 + \left(\Delta m \frac{4\pi^2 J}{m^2 r_T T^2}\right)^2 + \left(\Delta r_T \frac{4\pi^2 J}{mr_T^2 T^2}\right)^2 + \left(\Delta T \frac{8\pi^2 J}{mr_T T^3}\right)^2} = \\ &= \frac{4\pi^2 J}{mr_T T^2} \sqrt{\left(\frac{\Delta J}{J}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta r_T}{r_T}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta T}{T}\right)^2}, \end{aligned}$$

kde $\Delta r_T = 1$ mm je nejistota vzdálenosti těžiště od osy otáčení. Po dosazení číselných hodnot zjišťujeme, že nejistota je po zaokrouhlení $0,08 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ v případě použití osy blíže okraji pravítka a $0,10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ (zde zaokrouhluje na dvě platné číslice, jelikož první číslicí je 1) v případě druhém.

Měřením periody kmitu fyzického kyvadla jsme naměřili tíhové zrychlení $(9,83 \pm 0,08) \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, resp. $(9,83 \pm 0,10) \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.



Obr. 10: Signál naměřený optickou závorou při použití fyzického kyvadla (průhledného pravítka) s vyznačenou periodou.

Volný pád

Má-li těleso v homogenním tíhovém poli s tíhovým zrychlením o velikosti g v čase t_0 rychlost v_0 (kladná rychlost je směrem nahoru, záporná směrem dolů) a nachází-li se ve výšce h_0 , pak se v obecném čase t nachází ve výšce

$$h(t) = h_0 + v_0(t - t_0) - \frac{g(t - t_0)^2}{2}. \quad (6)$$

Tento vztah získáme, zintegrujeme-li dvakrát druhý Newtonův pohybový zákon.

Pro experiment budeme používat kuličku o průměru $d = (17,2 \pm 0,1)$ mm a hmotnosti $m = (7,25 \pm 0,02)$ g.

Tento model opět zanedbává odpor vzduchu. Měli bychom tedy zhodnotit, do jaké míry může odpor vzduchu ovlivnit naměřené hodnoty tíhového zrychlení. Nejprve vypočítáme maximální hodnotu Reynoldsova čísla

$$Re = \frac{v_{\max} d}{\nu},$$

kde v_{\max} je maximální rychlost kuličky, a $\nu = 1,57 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}$ kinematická viskozita vzduchu. Toto číslo nám říká, zda je proudění kolem kuličky laminární (Re je malé) nebo turbulentní (Re je velké číslo). Maximální rychlost kuličky při pádu z výšky $h_{\max} = 2 \text{ m}$ (tj. maximální výšky, kterou budeme při experimentu používat) odhadneme jako $v_{\max} = \sqrt{2h_{\max}g} \doteq 6,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (tedy rychlost při zanedbání odporu vzduchu). Po dosazení dostaneme $Re \doteq 7 \cdot 10^4$, což je vysoká

hodnota, proudění při maximální rychlosti tedy bude turbulentní. Pak je odporová síla dána Newtonovým vztahem

$$F_{\text{odp}} = \frac{1}{4} \rho v_{\text{max}}^2 S = \frac{1}{8} \pi \rho h_{\text{max}} g d^2,$$

kde $\rho = 1,19 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ je hustota vzduchu, $S = \pi d^2/4$ je plocha průřezu kuličky. Zpomalení kuličky při maximální rychlosti dané odporem prostředí pak vypočítáme jako

$$a_{\text{odp}} = \frac{F_{\text{odp}}}{m} = \frac{\pi \rho h_{\text{max}} g d^2}{8m} \doteq 3,8 \cdot 10^{-1} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}, \quad (7)$$

což je hodnota o více než řád nižší než hodnota, kterou měříme. Odpor vzduchu tedy můžeme zanedbat, avšak při vyšších rychlostech již bude výsledek ovlivňovat (na což musíme pamatovat při vyhodnocování nejistot měření).

Rovnice (6) můžeme využít pro výpočet tíhového zrychlení, jestliže upustíme těleso (pak je $v_0 = 0$) a změříme čas, za jaký spadne z dané výšky h_0 . Aby bylo naše měření přesnější, zaznamenáme výšku tělesa h v mnoha různých časech t změřenou závislost $h(t)$ fitujeme teoretickým modelem dle rovnice (6). V tomto případě se nemusíme ani omezovat na pohyb s nulovou počáteční rychlostí.

Pohyb tělesa v tíhovém poli jsme zaznamenali na video digitálním fotoaparátem (se snímkovací frekvencí 50 fps) a videa analyzovali v programu Tracker.⁶ Ten umožňuje ve videu trasovat vybraný objekt, výstupem je tedy závislost polohy předmětu na čase. Naměřenou závislost výšky na čase jsme poté fitovali pomocí programu gnuplot⁷ (viz graf na obrázku 12), čímž jsme pro každé měření získali hodnotu zrychlení, s jakou se těleso pohybovalo. Celý experiment jsme opakovali desetkrát, přičemž v polovině měření šlo o pouhé upuštění tělesa (tedy $v_0 = 0$), v druhé polovině šlo o vrh svisle vzhůru ($v_0 > 0$).

Poznamenejme, že stejný experiment lze realizovat i s pomocí stroboskopu (viz obrázek 13), kdy pohyb kuličky fotografujeme s dlouhou expozicí. Pak máme na jediném snímku zaznamenanou polohu kuličky v mnoha různých časech (dle frekvence stroboskopu).

Nejistoty tohoto měření budou dány zejména nejistotou měření polohy a též zanedbáním odporu vzduchu. Nejistota měření polohy na videu se skládá z nejistoty kalibrace délky v obrazu a z nejistoty určení polohy kuličky v obrazu. Celkem nejistotu určení polohy odhadujeme na asi 2 cm. V rovnici (7) jsme vypočítali, že pro maximální rychlost, kterou používáme, je skutečné zrychlení menší asi o $0,38 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ než tíhové. Při nulové rychlosti je však zrychlení přímo rovno tíhovému. Proto odhadněme, že zanedbání odporu vzduchu přidává do výsledku nejistotu asi $0,2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Celkovou nejistotu měření tíhového zrychlení touto metodou odhadujeme na asi $0,3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

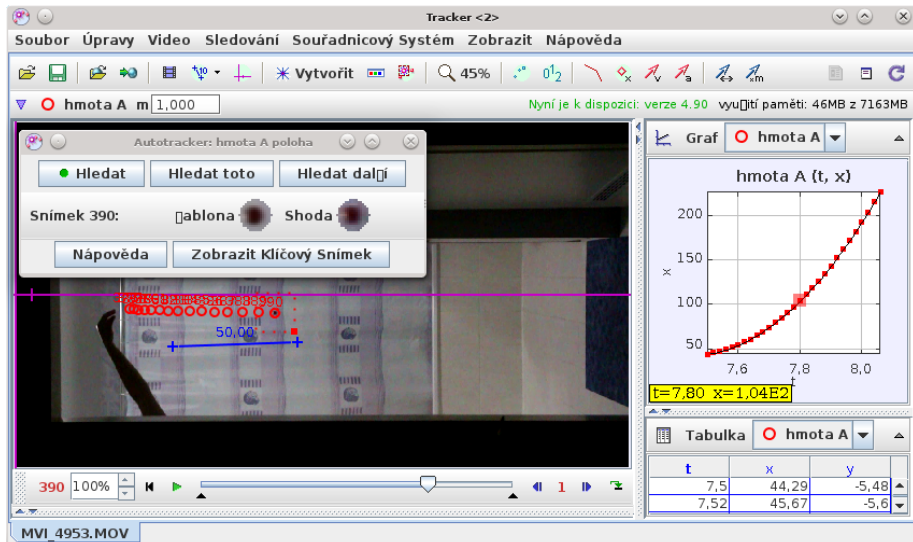
Pomocí analýzy pohybu kuličky při volném pádu bylo naměřena hodnota tíhového zrychlení $g = (9,9 \pm 0,3) \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Pohyb po kružnici

Mějme hmotný bod o hmotnosti m na nehmotném závěsu délky l . Tento bod rozpohybujeme tak, že bude konat rovnoměrný pohyb po kružnici o poloměru r s úhlovou frekvencí ω (a tedy periodou $T = 2\pi/\omega$). Na tento hmotný bod působí tíhová síla \mathbf{F}_G směrem svisle dolů a tahová síla od závěsu \mathbf{F}_t , která působí ve směru závěsu, tedy se svislým směrem svírá úhel α takový,

⁶<http://physlets.org/tracker>

⁷<http://www.gnuplot.info>



Obr. 11: Screenshot programu Tracker, který dokáže ve video sledovat pohyb vybraného tělesa. Zde sledujeme pohyb tělesa vrženého svisle vzhůru v tíhovém poli.

že $\sin \alpha = r/l$ (viz obrázek 14). Víme, že hmotný bod se pohybuje po vodorovné kružnici, ve svislém směru tedy musí být výslednice sil nulová a ve vodorovném musí být její velikost rovna $F_d = mr\omega^2$ (dostředivá síla). Napíšeme si velikosti obou sil ve složkách (ve válcových souřadnicích, první složka je ve směru r , druhá ve svislém směru):

$$\mathbf{F}_t = (F_t \sin \alpha; F_t \cos \alpha) = \left(F_t \frac{r}{l}; F_t \frac{\sqrt{l^2 - r^2}}{l} \right).$$

$$\mathbf{F}_G = m\mathbf{g} = (0; -mg).$$

Jak jsme již řekli, vzhledem k pohybu po kružnici musí platit

$$\mathbf{F}_t + \mathbf{F}_G = (mr\omega^2; 0),$$

což přepíšeme pro každou složku zvlášť jako soustavu dvou rovnic

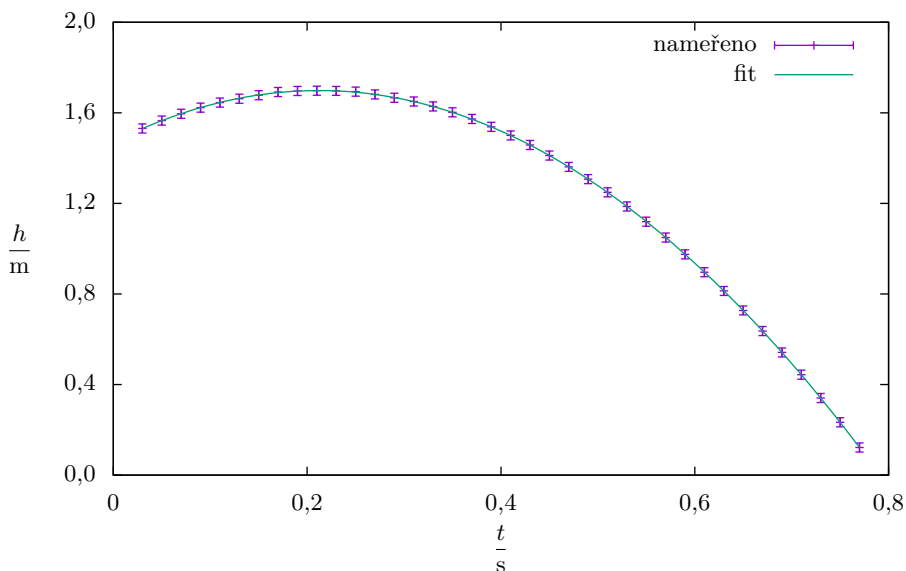
$$F_t \frac{r}{l} = mr\omega^2,$$

$$F_t \frac{\sqrt{l^2 - r^2}}{l} - mg = 0.$$

Z druhé rovnice vyjádříme F_t , dosadíme do první a vyjádříme tíhové zrychlení

$$g = \omega^2 \sqrt{l^2 - r^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} \sqrt{l^2 - r^2}. \quad (8)$$

Při změření periody a poloměru oběhu a délky závěsu tedy můžeme vypočítat tíhové zrychlení.

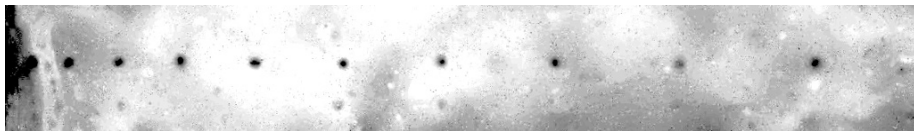


Obr. 12: Naměřená závislost výšky kuličky při vrhu svisle vzhůru fitovaná teoretickou závislostí danou rovnicí (6). Z tohoto konkrétního měření bylo naměřeno tíhové zrychlení $g = 10,1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

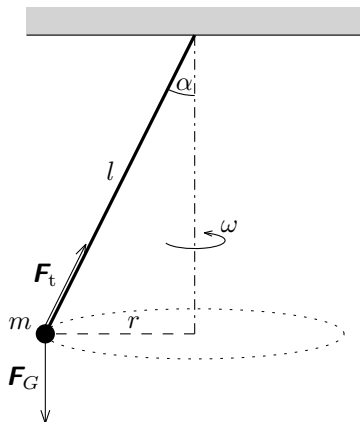
Pro měření jsme použili opět kuličku zavěšenou na tenké niti (se zanedbatelnou hmotností oproti hmotnosti kuličky), kterou jsme používali jako matematické kyvadlo. Kuličku jsme zavěsili tak, že její těžiště bylo vzdáleno $l = (1114 \pm 5) \text{ mm}$ od bodu, kolem kterého se závěs otáčel. Pod tento bod jsme umístili fotoaparát a pohyb kuličky zaznamenali jako video, které jsme opět zpracovali v programu Tracker (obrázek 15).

Ukázka naměřené trajektorie je na obrázku 16. Vidíme, že kulička se bohužel nepohybuje přesně po kružnici, ale spíše po elipse. Lépe se nám bohužel kuličku rozpohybovat nepodařilo, a tak tuto nedokonalost zahrneme do nejistot měření. Poloměr trajektorie se navíc postupně vlivem odporu vzduchu zmenšuje, podle rovnice (8) se tedy i mění perioda. Pro každý jeden oběh kuličky tedy periodu a poloměr změříme samostatně, čímž vliv odporu vzduchu v podstatě eliminujeme, protože nejistota způsobená odlišností trajektorie od kružnice poté bude mnohem vyšší než nejistota způsobená zanedbáním odporu vzduchu a z něj vyplývající změny poloměru a periody během jednoho oběhu.

Nejistota měření se bude skládat z nejistoty měření periody oběhu, délky závěsu a poloměru oběhu. Periodu odečítáme z naměřených poloh, nejistotu odhadneme na dva snímky, tedy $\Delta_B T = 2/50 \text{ s} = 40 \text{ ms}$. Nejistota měření délky (přesněji polohy těžiště kuličky) je $\Delta_B l = 5 \text{ mm}$. Do nejistoty měření poloměru oběhu musíme zahrnout i fakt, že kulička neopisuje přesně kružnici. Vypočítáme tedy výběrovou směrodatnou odchylku aritmetického průměru poloměru oběhu během každé periody podle rovnice (5) a její nejvyšší hodnotu budeme považovat za nejistotu typu B měření poloměru oběhu. Tato byla u našich měření nejvýše $\Delta_B r = 14 \text{ mm}$ (opět zaokrouhlujeme nejistotu na dvě platné číslice, protože první číslice je 1). Nejistota daná



Obr. 13: Pohyb kuličky osvětlené stroboskopem (frekvence 50 Hz) v tíhovém poli (tíhové zrychlení směřuje doprava).



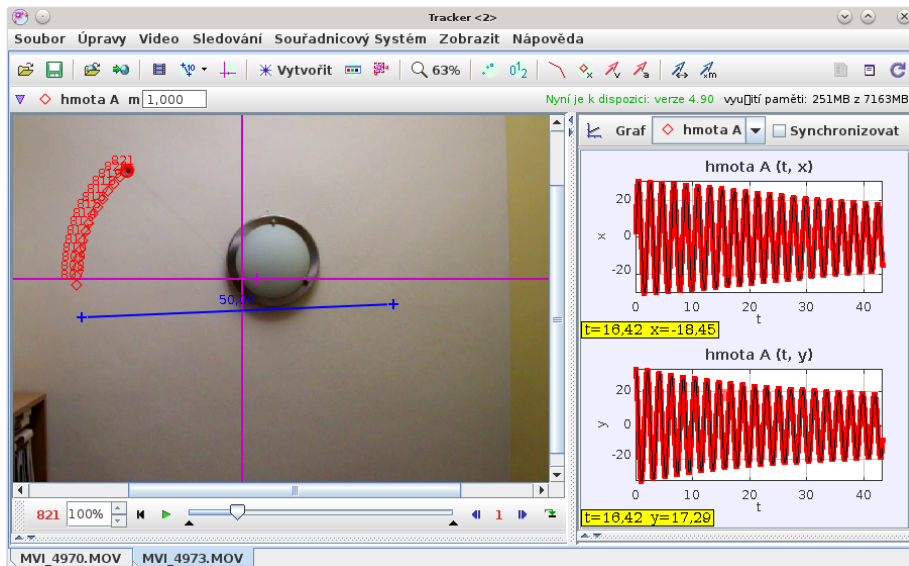
Obr. 14: Hmotný bod na nehmotném závěsu konající rovnoměrný pohyb po kružnici.

nepřesností měření polohy je pak vůči této nejistotě zanedbatelná. Výslednou nejistotu typu B měření tíhového zrychlení vypočítáme podle zákona šíření nejistot jako

$$\begin{aligned} \Delta_B g &= \sqrt{\left(\Delta_B T \frac{\partial g}{\partial T}\right)^2 + \left(\Delta_B l \frac{\partial g}{\partial l}\right)^2 + \left(\Delta_B r \frac{\partial g}{\partial r}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\Delta_B T \frac{8\pi^2}{T^3} \sqrt{l^2 - r^2}\right)^2 + \left(\Delta_B l \frac{4\pi^2 l}{T^2 \sqrt{l^2 - r^2}}\right)^2 + \left(\Delta_B r \frac{4\pi^2 r}{T^2 \sqrt{l^2 - r^2}}\right)^2} = \\ &= \frac{4\pi^2}{T^2} \sqrt{l^2 - r^2} \sqrt{\left(\frac{2\Delta_B T}{T}\right)^2 + \left(\Delta_B l \frac{l}{l^2 - r^2}\right)^2 + \left(\Delta_B r \frac{r}{l^2 - r^2}\right)^2}. \end{aligned}$$

Je zřejmé, že nejistota bude nejvyšší pro nejmenší periodu a poloměr, proto jsme dosadili právě tyto hodnoty, čímž jsme dostali $\Delta_B g = 0,19 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Co se týče nejistoty typu A, tu jsme pro všechny naměřené hodnoty tíhového zrychlení vypočítali dle rovnice (5) a následného textu, přičemž nám vyšlo $\Delta_A g = 0,04 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Výsledná nejistota měření tíhového zrychlení je tedy $\Delta g = \sqrt{(\Delta_A g)^2 + (\Delta_B g)^2} = 0,19 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Touto metodou tedy bylo naměřené tíhové zrychlení $g = (9,77 \pm 0,19) \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.



Obr. 15: Video kuličky pohybující se na závěsu po kružnici v programu Tracker.

Závěr

Změřili jsme velikost tíhového zrychlení pěti různými metodami:

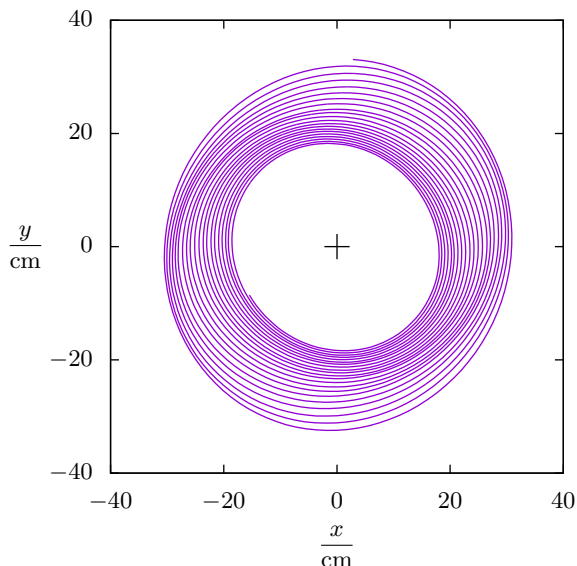
- akcelerometrem (ten se však pro přesné absolutní měření tíhového zrychlení příliš nehodí), naměřená hodnota byla $9,75 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$
- matematickým kyvadlem: $(9,88 \pm 0,08) \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$,
- fyzickým kyvadlem: $(9,83 \pm 0,10) \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$,
- pomocí volného pádu: $(9,9 \pm 0,3) \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$,
- pomocí pohybu hmotného bodu po kružnici: $(9,77 \pm 0,19) \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

V rámci nejistot měření se hodnoty naměřené pomocí různých metod shodují, přičemž nejnižší nejistota měření byla stanovena u měření pomocí matematického kyvadla, pomocí kterého byla naměřena hodnota $g = (9,88 \pm 0,08) \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, která v rámci nejistot měření odpovídá běžně udávané a teoreticky vypočítané hodnotě $9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Komentáře k došlým řešením

Vzhledem k tomu, že se jednalo o experimentální úlohu první série, bylo hodnocení poměrně mírné, určitě ale lze doporučit, abyste mrkli do sekce Experimenty na FYKOSích stránkách a nastudovali, co všechno by řešení experimentální úlohy mělo zahrnovat. Mnohdy se totiž nedá říct, že byste měli úlohu špatně, ale pouze vám v ní něco chybí na to, abyste mohli dostat plný počet bodů.

Většina z vás si našla vhodné dvě metody, jak změřit tíhové zrychlení, přesto se v řešeních objevovaly různé nedostatky. Velmi málo řešení se například věnovalo tomu, co to vlastně tíhové zrychlení je, což není na škodu v teoretickém úvodu zmínit, když už se jeho měřením chceme



Obr. 16: Naměřená trajektorie kuličky na závěsu.

zabývat, někomu to možná může připadat triviální a zbytečné, ale alespoň by pak třeba tolik z vás netrvalo na tom, že měří gravitační zrychlení, nebo dokonce gravitační konstantu. K dalším tradičním zlovykům patří opisování spousty desetinných míst z kalkulačky. To, co napíšete jako výsledek, by mělo odrážet přesnost, jaké vaše měření dosahuje. S tím souvisí to, že byste neměli zapomínat určit nejistoty měření.

Poslední věc, na kterou bychom vás rádi upozornili, už vlastně s fyzikou ani nesouvisí. Čtete si po sobě, co napíšete. Můžete tak eliminovat netriviální množství hrubek, překlepů, nesmyslných vět, nedokončených myšlenek a podobně. Ve FYKOSu sice tohle v podstatě neřešíme, třeba se i rádi zasmějeme tomu, že chcete měřit tíhové zrychlení pomocí matematického kladiva, ale jinde vás může docela shodit, když si podobné věci nepohlídáte.

Tomáš Pikálek
pikos@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.