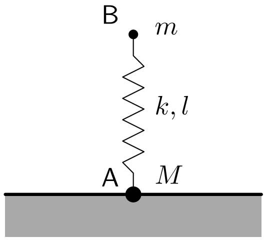
Úloha III.3 ... kdy vyskočí?

3 body; průměr 1,84; řešilo 61 studentů

Mějme nehmotnou pružinu o tuhosti k. Na jednom jejím konci je připevněno závaží o hmotnosti m, na jejím druhém konci je připevněno druhé závaží o hmotnosti M. Tuto sestavu položíme na vodorovnou desku tak, že závaží o hmotnosti M bude ležet na desce a závaží o hmotnosti m bude trčet na pružině přímo nad prvním závažím. Soustava je v rovnovážném stavu (tj. první závaží nekmitá) a délka pružiny v tomto stavu je l. Určete jak moc musíme pružinu stlačit, aby po jejím uvolnění závaží o hmotnosti M nadskočilo. Uvažujte pouze vertikální pohyb.

Michalovi byla zima, a tak hrál pružinky.

Celou sestavu si budeme představovat jako dva hmotné body spojené pružinou (viz 1) a budeme uvažovat jen síly působící ve vertikálním směru.



Obr. 1: Náčrtek problému v situaci, kdy je soustava v klidu

V tomto klidovém stavu nebude závaží B kmitat, výslednice sil na něj působících tedy musí být v tomto okamžiku nulová. Spodní závaží (tj. hmotný bod A) nadskočí, právě když součet sil na něj působících bude směřovat nahoru. Víme, že na závaží A působí tíhová síla směrem dolů, která má velikost

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{G}} = (M + m)g\,,$$

a jejíž pohybové účinky jsou vyrušeny reakční silou podložky. Když nyní pružinku stlačíme a uvolníme, začne závaží B kmitat. Na tomto místě si musíme uvědomit, že síla, která bude působit na závaží A v důsledku kmitání závaží B, bude rovna síle, kterou působí pružina na závaží B, jen s opačným znaménkem (plyne z Newtonových zákonů). Tuto sílu umíme poměrně jednoduše vyjádřit, jde jen o sílu, kterou působí napnutá pružina, má podle linearizovaného Hookeova zákona tedy tvar

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{p}} = k\Delta l\,,$$

kde Δl je rozdíl momentální délky pružiny a délky pružiny v klidovém stavu. Zajímá nás, kdy bude tato síla největší (chápáno s orientací nahoru). To zřejmě nastane ve chvíli, kdy bude hmotný bod B v nejvyšším bodě kmitavého pohybu, který vykonává. Označme si L vzdálenost tohoto místa od rovnovážné polohy hmotného bodu B. Zjevně bude L rovno vzdálenosti, o kterou jsme pružinu stlačili, neboť neuvažujeme energetické ztráty (maximální výchylky kmitavého pohybu závaží B budou na obě strany stejné, neboť účinky gravitačního pole jsou již zahrnuty v rovnovážné poloze závaží). Žádné další síly už na hmotný bod A působit nebudou. Výslednice sil bude mít tedy velikost

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{p}} - \boldsymbol{F}_{\mathrm{G}}$$

a závaží A nadskočí, právě když bude $\boldsymbol{F}$ kladná. To nás přivádí k podmínce

$$kL - (M + m)g > 0\,,$$

což je ekvivalentní podmínce

$$L > \frac{(M + m)g}{k}\,.$$

Vidíme tedy, že aby závaží A nadskočilo musíme pružinu stlačit alespoň o něco málo více než o $L = (M+m)g/k$. Přičemž si musíme dát samozřejmě pozor, aby byla splněna podmínka $L < l$.

Michal Nožička
nozicka@fykos.cz