

Úloha III.4 ... ubrzdi to

4 body; průměr 2,00; řešilo 49 studentů

Po sebeprudším sešlápnutí brzdového pedálu nezačne auto brzdit okamžitě, ale brzdná síla po dobu t_r lineárně narůstá až na hodnotu F_m . Koefficient statického třetí mezi pneumatikou a vozovkou je f . Jakou maximální rychlostí se může tento automobil pohybovat, aby ani při nouzovém brzdění nedošlo ke smyku?
Michal procházel kolem kolony.

Nejprve si rozeberme, jaké síly na auto působí. Ve směru vswislém je to tíha auta G , kterou přesně vyrovnává normálová reakční síla N od silnice. Dále si uvědomme, že brzdy sice působí na kola, která snižují svou úhlovou rychlost, ale to nemá přímý vliv na rychlost auta. Tu snižuje až tření T mezi koly a silnicí. Kola se sice otáčejí, ale třecí síla na ně stejně působí. Tato třecí síla je právě ona brzdná síla F , kterou zprostředkovaně působí brzdy na auto¹.

Podmínka pro neprokluzování kol je

$$T \leq fN,$$

kde fN označuje maximální sílu, kterou je schopné tření poskytnout. Po překročení této meze už bude platit pouze² $T = fN$. V tuto chvíli se změní vztah mezi brzděním kol a zpomalováním auta. Brzdy budou stále působit stejným brzdícím momentem sil na kola, ale tření se silnicí bude najednou nižší a kola začnou prokluzovat.

Z rovností mezi tíhovou a reakční silou a mezi třecí a brzdnou silou dostáváme podmínku, která musí být splněna v každém okamžiku jízdy (brzdění), ve tvaru

$$F \leq fmg.$$

Pokud je maximální brzdná síla F_m nižší (nebo rovna) než tato hodnota, můžeme bezstarostně brzdit a nikdy se do smyku nedostaneme. Pokud však platí $F_m > mgf$, nebudou kola prokluzovat pouze pokud auto stihne zabrzdit dříve než brzdná síla překročí tuto mezní hodnotu.

Protože F roste lineárně s časem, můžeme ho vyjádřit jako

$$F = F_m \frac{t}{t_r} \leq mgf,$$

což samozřejmě platí pouze pro $t \leq t_r$, kde se růst zastaví a brzdná síla bude mít nadále konstantní hodnotu F_m . To nám ale stačí, protože pokud bude nerovnost splněna v čase t_r , pak bude splněna i nadále.

Brzdná síla nabude hodnoty F_m v čase

$$\tau = \frac{mgft_r}{F_m}.$$

Po tuto dobu se auto pohybuje se zrychlením

$$a = -\frac{F}{m} = -\frac{F_m}{m} \frac{t}{t_r}.$$

¹Rozmyslete si, že při rozjíždění působí motor na kola také pouze momentem síly a auto samo zrychluje až díky tření, které v tomto případě působí ve směru jízdy. I při rozjíždění mohou kola „zahrabat“, a tak platí pro rozjezd bez prokluzu stejná podmínka jako při brzdění.

²Ve skutečném případě je koefficient klidového tření častěji vyšší než roven koefficientu smykového tření $f_k > f_s$. Tedy při smyku bude brzdná síla $T = f_s N$ nižší než v mezním případě bez prokluzování kol $T = f_k N$.

Z tohoto vyjádření nerovnoměrně zpomaleného pohybu získáme okamžitou rychlost auta jako integrál zrychlení

$$v = \int -\frac{F_m}{m} \frac{t}{t_r} dt = v_0 - \frac{F_m}{2mt_r} t^2.$$

Nás zajímá okamžik zastavení, tedy $v = 0$, odkud dostaneme vyjádření pro v_0 jako

$$v_0 = \frac{F_m}{2mt_r} t^2.$$

Vidíme, že původní rychlost v_0 je rostoucí funkcí brzdného času (jak odpovídá zdravému rozumu). Proto, když nás zajímá nejvyšší možná počáteční rychlost auta, použijeme nejvyšší čas, který máme k dispozici, a sice $t = \tau$.

$$v_{\max} = \frac{F_m}{2mt_r} \tau^2 = \frac{mg^2 f^2 t_r}{2F_m},$$

což je hledaný výraz pro maximální rychlost auta, aby nedostalo smyk.

Ještě si vypočítáme mezní hodnotu zrychlení, kterou si umíme lépe představit díky setrvačné síle, která na nás působí, když sedíme v autě. Kvalitní pneumatika³ má na silnici koeficient klidového tření $f = 0,8$. Z podmínky $F \leq mgf$ dostaneme

$$a_{\text{mez}} = gf = 0,8g = 7,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2},$$

což je pozitivní, protože většinou brzdíme pozvolněji, a tedy smyk nehrozí.

Protože výraz pro maximální rychlost klesá s maximem brzdné síly F_m , bude nás zajímat, jaká je maximální rychlost beze smyku obecně v případě, kdy $F_m \geq mgf$. Dosaďme tedy do výrazu pro v_{\max} minimální hodnotu brzdné síly, při které toto nastane, a sice $F_m = ma_{\text{mez}} = mgf$. Potom

$$v_{\max} = \frac{gf t_r}{2} = 15 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1},$$

pokud jako t_r bereme jednu vteřinu (reálně to bude spíš méně), tedy toto je opravdu horní odhad rychlosti, při které kola neprokluzují. Celkově vzato, pokud prudce zašlápnete brzdu, dostanete se do smyku téměř bez ohledu na to, jakou jedete rychlostí, pokud právě neparkujete. Pokud se do smyku dostanete i tak, máte pravděpodobně ojeté pneumatiky nebo jste na kluzkém terénu.

Jakub Dolejší
krasnykuba@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.

³http://old.uk.fme.vutbr.cz/zobraz_souborace9.pdf?id=245, str. 23