

Úloha III.P ... Lukášova díra

5 bodů; průměr 2,88; řešilo 40 studentů

Lukáš posiloval a povedlo se mu vyrobit černou díru o hmotnosti 1 kg. Protože nemá úplně v lásce kvantovou teorii pole na křivém pozadí, tak jeho díra nic nevyzařuje. Lukáš tuto díru upustí a ona začne kmitat uvnitř Země. Zkuste odhadnout, za jak dlouho se hmotnost díry zdvojnásobí. Je nebezpečné si doma pokoutně vyrábět černé díry?

Lukáš chtěl zničit Zemi, ale moc se mu to nepovedlo.

Zamysleme se nejprve, co na nás ze zadání kouká a čím bychom mohli začít. V zadání se dočteme o černé díře a její hmotnosti. Letným pohledem na internet zjistíme, že z těchto údajů dokážeme vypočítat například její poloměr,¹ kterému se také jinak říká Schwarzschildův. Tak si jej spočítáme

$$r_g = \frac{2GM}{c^2} = 1,5 \cdot 10^{-27} \text{ m},$$

kde G je gravitační konstanta, c je rychlost světla a M je hmotnost černé díry. Poloměr, který nám vyšel, vypadá na první pohled velmi malý. Srovnáme jej tady s různými fyzikálními rozměry a z toho usoudíme, jakou další fyziku bychom měli uvažovat. Poloměr atomu je přibližně $(0,3 - 3) \cdot 10^{-10}$ m, musíme se tedy zabývat fyzikou na výrazně menší škále. Průměr jádra je přibližně 10^{-15} m, to je stále ještě o hodně více než velikost naší černé díry. Musí nás proto zajímat fyzika stavby jádra, případně vlastnosti jádra, ale vlastnostmi elektronového obalu se nebudeme muset tolik zabírat.

Víme již, že černá dírka je o hodně menší než atomové jádro. Zamysleme se proto nad druhou částí zadání, tedy tím, že by se černá díra měla být schopna nějak „krmit“. Aby přibírala na váze, musí obědvat hlavně atomová jádra. Máme tedy model: černá díra prolétá krystalovou mřížkou a konzumuje atomová jádra. Jaké síly tedy působí na atomová jádra? Jsou to jednak elektromagnetické síly zprostředkované okolními atomy a samozřejmě také gravitační síla způsobená prolétající černou dírou. Rozhodně zajímavým parametrem bude, v jaké vzdálenosti se tyto dvě síly vyrovnají. Pro velikost gravitační síly budeme moci rozhodně použít Newtonův gravitační zákon (obecná relativita je pouze oprava Newtonova gravitačního zákona pro silné pole), ale co se silou, kterou jsou atomy (tedy i atomová jádra) drženy v krystalové mřížce? Na to žádný jednoduchý model neznáme, ale co víme je, že energie chemických vazeb je přibližně kolem jednoho elektronvoltu.² Sílu lze odhadnout z poměru vykonané práce na rozbití chemické vazby a dráhy, na které je tato práce vykonána. V našem případě půjde přibližně o průměr atomu, což je již výše zmíněných 10^{-10} m. Velikost síly, kterou musíme působit na atom, abychom jej vytrhli z krystalové mřížky je tedy přibližně $F_v \approx 10^{-9}$ N. Můžeme nakonec z Newtonova gravitačního zákona určit jak velký prostor okolo sebe dokáže naše černá díra vyčistit od jader

$$\frac{GMm_j}{d_{\max}^2} = F_v \quad \Rightarrow \quad d_{\max} \approx \sqrt{\frac{GMm_j}{F_v}} \doteq 1 \cdot 10^{-14} \text{ m}.$$

V této části řešení si už můžeme dovolit zanedbat malé konstanty, jako například nukleonové číslo jádra, jde pouze o přibližný výpočet. Zjistili jsme ale důležitou věc a to, že naše černá díra není schopna vytrhnout jádro z mřížky, ale může jej sporádat pouze tehdy, když jej přímo střetne.

¹https://cs.wikipedia.org/wiki/Černá_díra

²Elektronvolt je energie, kterou získá elektron, který je urychlen potenciálovým rozdílem jednoho voltu, tedy $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

Nyní by se hodila *vsuvka* na téma, kde se může jádro nacházet v rámci svého obalu. Jádra v látce nejsou na svých pozicích klidná, ale vibrují. Tyto vibrace jsou způsobeny nenulovou teplotou látky. Jejich relativní (vůči poloměru atomu) amplituda při pokojové teplotě je přibližně³ 1 % K této hodnotě se zanedlouho vrátíme.

Na jednu cestu skrz Zemi potřebuje černá díra 42 minut $\doteq 10^3$ s. Kolik atomových jader cestou zasáhne? Prolétá-li díra jedním atomem, s jakou pravděpodobností zasáhne jádro? Tato pravděpodobnost je rovna poměru plochy jádra ku ploše atomu, obojí myšleno v půdorysu. Tento poměr je pro stojící jádro roven asi 10^{-10} . Pro oscilující jádro, viz *vsuvka*, může tento poměr být i dokonce 10^{-4} . Počítejme nadále s první hodnotu a na konci budeme diskutovat i hodnotu druhou. Kolik atomů černá díra potká? To zjistíme jednoduše podělením průměru Země a průměru jednoho atomu

$$N \approx \frac{6\,000\text{ km}}{1 \cdot 10^{-10}\text{ m}} \doteq 6 \cdot 10^{16}.$$

Toto číslo vypadá veliké, ale ve skutečnosti je neskutečně malé. Hlavně proto, že černá díra zvládne konzumovat jen 10^{-10} z jader atomů, kterými prolétá, takže při jednom průletu zkonsumuje přibližně 10^6 jader. V jednom kilogramu látky je přibližně 10^{26} atomů, to je tedy počet atomů, který musí černá díra zkonsumovat, aby přibrala stejně, kolik sama váží. To se jí tedy povede za 10^{20} průletů Zemí, což je přibližně 10^{23} s $\doteq 10^{16}$ let. Tento výsledek odpovídá době asi deset tisíckrát delší než je doba existence vesmíru. Pokud bychom užili pro efektivní průměr jádra vyšší hodnotu, zjistili bychom, že by takováto díra zdvojnásobila svou hmotnost za 130 miliónů let.

Pokud bychom si takovouto díru vyrobili, tak můžeme spolehlivě říci, že by naši civilizaci za našeho života zničit nedokázala a nejspíše bychom si její přítomnosti ani nepovšimli.

Závěrem by se ještě hodilo říci, že pokud díra zkonsumuje atomové jádro, tak získá náboj, a proto pro ní bude velmi výhodné spořádat nějaký z okolních elektronů a tím se držet v elektricky nenabitěm stavu. Elektrostatická síla je mnohem silnější než síla gravitační; pokud by tomu takto nebylo, tak by náš model zkolaboval a museli bychom použít jiný.

Lukáš Ledvina
lukas1@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.

³http://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/js11/fyz_chem/web/fotony/rot_vib.htm