

## Úvodem

Milí FYKOSáci,

hned ze začátku bychom vám chtěli popřát mnoho dobrého do Nového roku. Pololetí vrcholí a my přicházíme s další várkou úloh. Snad vám poskytnou vítaný odpočinek od školních povinností nebo příjemné rozptýlení o jarních prázdninách.

Kdybyste měli chuť nás v Praze navštívit, srdečně vás zveme na Jeden den s fyzikou, kde si můžete poslechnout spoustu zajímavých přednášek a taky se dozvědět, jak to na matfyzu chodí. Celý program najdete na [mf.cuni.cz/verejnost/jdf/](http://mf.cuni.cz/verejnost/jdf/). A pokud ještě nemáte registrovaný tým na [fyziklani.cz](http://fyziklani.cz), tak to rychle napravte!

Za chybějící vzoráky a statistiky se hluboce omlouváme, co nejrychleji budou zveřejněny na webu.

Těšíme se na vás.

*Organizátoři*



Zadání IV. série



Termín uploadu: 28. 2. 2017 23.59

Termín odeslání: 27. 2. 2017

### Úloha IV.1 ... svitková relativita

3 body

Pohádkové postavy to nemají lehké, chtějí-li zjistit, kdy se objevují na scéně. Dnešní technika jim to ale usnadňuje. Třeba princezna Pointa z pohádky o délce šest kapitol. Všechny kapitoly jsou stejně dlouhé, a tak každá na Karlově displeji měří 1200 pixelů na výšku (samotný displej ale zobrazí jen výšku 900 px). Při čtení Karel souvisle scrolluje a navíc čte pořád stejně rychle. Po třech minutách od začátku čtení Pointa minula první konec posuvníku ve scrollbaru a po sedmi minutách i druhý. V kolikáté kapitole se objeví Pointa?

Poznámka: Poměr výšky posuvníku vůči výšce displeje je stejný jako poměr výšky displeje vůči výšce celého textu pohádky.

### Úloha IV.2 ... ryvové kyvadlo

3 body

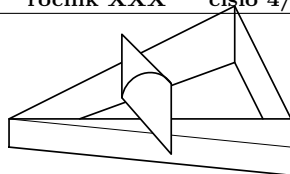
Je známou skutečností, že aby byla jízda vlakem co nejpohodlnější, pak při rozjíždění a brzdění je potřeba, aby se zrychlení měnilo co nejméně. Proto je dobré, když se vlak rozjíždí s malou konstantní změnou zrychlení. Změna zrychlení se nazývá ryv. Určete, jak se v čase mění stabilní poloha kyvadla (úhel odklonění od svislice  $\varphi$ ). Délku kyvadla označme  $l$ , vlak se rozjíždí na rovině, ryv označme  $k$  ( $k = \frac{\Delta a}{\Delta t}$ , kde  $a$  je zrychlení) a vlak jede po Zemi s normálním tíhovým zrychlením  $g$ .

Bonus: Sestavte pohybové rovnice, které numericky vyřešte pro  $\varphi(0) = 0$  a  $\frac{d\varphi}{dt}(0) = 0$  pro různé hodnoty  $k$ .

### Úloha IV.3 ... dvojkužel

8 bodů

Mějme dřevěnou konstrukci, která má půdorys rovnoramenného trojúhelníku a výška jejích dvou ramen roste směrem k základně s úhlem  $\alpha = 2^\circ$ . Do vrcholu naproti základně  $c = 35$  cm, u nějž má trojúhelník úhel  $\beta = 70^\circ$ , umístíme dvojkůžel s vrcholovým úhlem  $\varphi = 40^\circ$  a výškou  $2h = 40$  cm. Kůžel se samovolně začne valit „do kopce“, tedy ve směru růstu hran trojúhelníku.



- Vysvětlíte, proč se dvojkůžel může kutálet do kopce.
- Jak závisí poloha těžiště kůželu na uražené vzdálenosti?
- Jaká je rychlost kůžele těsně před nárazem na základnu?
- Kolik otáček kůžel vykoná během své cesty?

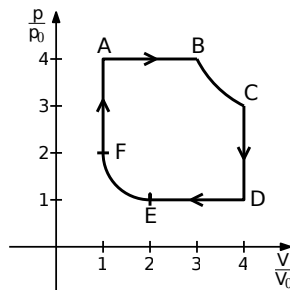
Na počátku je kůžel umístěn horizontálně na konstrukci tak, že jeho těžiště se nachází přesně nad vrcholem trojúhelníku proti základně.

#### Úloha IV.4 ... plynový stroj

8 bodů

Mějme tepelný stroj naplněný ideálním plynem složeným z dvouatomových molekul. Tento tepelný stroj vykonává kruhový děj ABCDEFA, tedy skládá se z šesti dějů

- $A \rightarrow B$  – izobarické zahřátí ze stavu  $4p_0$  a  $V_0$  (teplotu v A označme jako  $4T_0$ ) do stavu s objemem  $3V_0$ ,
- $B \rightarrow C$  – izotermická expanze na objem  $4V_0$ ,
- $C \rightarrow D$  – izochorické ochlazení na tlak  $p_0$ ,
- $D \rightarrow E$  – izobarické ochlazení na objem  $2V_0$ ,
- $E \rightarrow F$  – izotermická komprese na objem  $V_0$ ,
- $F \rightarrow A$  – izochorické zahřátí na tlak  $4p_0$ .



Určete zbývající stavové veličiny ve stavech B, C, D, E a F, maximální a minimální teplotu ideálního plynu v průběhu děje (v násobcích  $T_0$ ), teplo přijaté či odevzdané plynem v jednotlivých dějích a účinnost tepelného stroje. Srovnajte tuto účinnost s účinností Carnotova stroje pracujícího se stejnými maximálními a minimálními teplotami. Pro jednoduchost uvažujte, že se nemění látkové množství plynu ve stroji a nedochází v něm k chemickým přeměnám.

*Bonus* To samé proveďte pro jednodušší cyklický „čtvercový“ děj, tedy ABCDA, kde plyn začíná ve stavu  $p_0$ ,  $V_0$  a  $T_0$  a izochoricky se ohřeje na  $4p_0$ , izobaricky se zahřeje a rozepne na  $4V_0$ , izochoricky ochladí na  $p_0$  a izobaricky se ochladí na  $V_0$ . Srovnajte účinnosti těchto dvou tepelných strojů a diskutujte, který je lepší.

#### Úloha IV.5 ... divná atmosféra

9 bodů

Zažili jste už někdy takovou divnou atmosféru? Do určité výšky je v ní rychlost šíření světla konstantní  $v_0$  a od určité hranice se rychlost šíření světla začne lineárně zvětšovat podle vztahu  $v(\Delta h) = v_0 + k \Delta h$ . V jednom místě, právě ve výšce, kde se začala měnit rychlost světla, vyšleme světelné paprsky pod všemi možnými úhly směrem nahoru. Ukažte, že se budou všechny paprsky pohybovat po částech kružnic a určete poloměry těchto kružnic. Také určete vzdálenost od místa vypuštění paprsků, kde se paprsky vrátí do původní výšky.

**Úloha IV.P ... statistikův denní chléb**

9 bodů

Známe to všichni, krajíc chleba namazaný medem nebo marmeládou, zakousneme se a najednou je kapka mazadla na ruce a jsme za prasata. Spočítejte, jak závisí pravděpodobnost, že v krajici bude díra skrz naskrz, v závislosti na jeho tloušťce. Model kynutí těsta necháme na vás. (Třeba rovnoměrně rozmístěné bubliny s exponenciálně rozděleným poloměrem je dobrý model.)

**Úloha IV.E ... Mikulášova vejce**

11 bodů

Změřte povrch ptačího (např. slepičího) vejce.

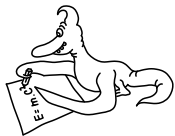
**Úloha IV.S ... testovací**

10 bodů

- Zkuste vlastními slovy popsat, k čemu a jak se používá testování hypotéz (postačí vlastními slovy popsat následující: hypotéza a alternativa, chyba 1. a 2. druhu, hladina testu, testová statistika, kritický obor testu,  $p$ -hodnota testu pro konkrétní naměřená data). Není potřeba uvádět přesná matematická odvození, stačí požadované pojmy a vlastnosti stručně popsat.
- V přiloženém datovém souboru *testovani1.csv* najdete naměřené hodnoty určité fyzikální veličiny. Pomocí jednovýběrového  $t$ -testu otestujte, zda je skutečná hodnota měřené fyzikální veličiny rovna 20. Dále předpokládejme, že je naším cílem ukázat, že hodnota měřené fyzikální veličiny je větší než 20. Použijte vhodnou jednostrannou modifikaci  $t$ -testu k tomu, abyste toto tvrzení ověřili (dejte si pozor na správné zvolení hypotézy a alternativy).
- V přiloženém datovém souboru *testovani2.csv* najdete naměřené hodnoty 2 různých fyzikálních veličin. Představujme si, že se jedná o měření stejné fyzikální charakteristiky ale za různých vnějších podmínek (teplota, tlak atd.). Pomocí dvouvýběrového  $z$ -testu otestujte hypotézu, že hodnota této fyzikální charakteristiky je pro obě volby vnějších podmínek stejná.
- Použijte stejná data jako v seriálové úloze z první série a pomocí Kolmogorovova-Smirnovova testu určete, který ze 4 vzorků dat pochází z normálního rozdělení a který vzorek pochází z exponenciálního rozdělení.

*Bonus* Předpokládejte, že máte k dispozici měření 2 fyzikálních veličin (tedy 2 sady naměřených hodnot), kde jsou všechna měření na sobě nezávislá. Odvoďte upravený dvouvýběrový  $z$ -test, který by testoval hypotézu, že skutečná hodnota první měřené fyzikální veličiny je dvojnásobek skutečné hodnoty druhé měřené fyzikální veličiny. Pro udělení bodů je nutné a postačuje odvodit podobu testové statistiky a kritického oboru. (*Nápověda:* Použijte vícerozměrnou verzi CLV, kde vhodně zvolíte funkci  $f$ , a dále postupujte analogicky jako u odvození klasického dvouvýběrového  $z$ -testu)

Pro práci s daty použijte výpočetní prostředí  $R$ . Pro vyřešení těchto úkolů postačí drobně upravit přiložený skript, ve kterém je pomocí komentářů v kódu vysvětlena potřebná syntaxe jazyka  $R$ .



## Řešení III. série

### Úloha III.1 ... dlouhý film

3 body; průměr 2,76; řešilo 62 studentů

Stahujete si svůj oblíbený film o velikosti 12 GB rychlostí 10 MB/s. Uvažujte, že signál se po kroucené dvojlince pohybuje rychlostí světla a modulace rozprostírá přenosovou rychlost rovnoměrně, tzn. byla-li by 1 b/s, musíme přijmout signál za celou sekundu k obdržení 1 bitu informace. Jak dlouhý úsek kabelu dokáže film zaplnit svými daty, pokud se bude šířit dostatečně dlouhým kabelem?

*Kolega tvrdil Michalovi, že 100Gb ethernet má rámce menší než čip.*

Keďže modulácia rozprestiera signál rovnomerne, dĺžka signálu (nazvime tak dĺžku úseku kábla, v ktorom sa informácia šíri) bude lineárna voči objemu prenášaných dát  $d$  – ak majú dáta  $A$  v kábli dĺžku  $l_A$  a  $n$ krát objemnejšie dáta  $B$  má v kábli dĺžku  $l_B$ , tak medzi nimi platí vzťah

$$l_B = n l_A,$$

inak povedané, dvakrát objemnejší film bude mať dvojnásobne dlhší signál. Vieme určiť, ako dlho potrvá film stiahnuť, keďže rýchosť sťahovania  $v$  je definovaná ako množstvo dát  $d$ , ktoré obdržíme za čas  $t$ :

$$v = \frac{d}{t},$$

tak za znalosti  $d$  a  $v$  určíme čas potrebný na stiahnutie:

$$t = \frac{d}{v}.$$

Ak sa signál šíri v kábli rýchlosťou svetla  $c$ , tak za čas  $t$ , ktorý trvá, než sa do kábla dostane celý signál, sa začiatok signálu dostane do vzdialenosti

$$l = ct.$$

Keďže informácia sa nikde v kábli nemôže hromadiť, tak je vysielaná rovnakou rýchlosťou  $v$ , akou je prijímaná. Než bude celá  $v$  kábli, potrvá to  $t = d/v$ , a než sa do kábla dostane celá informácia  $d$ , začiatok informácie sa dostane do vzdialenosti

$$l = ct = c \frac{d}{v}.$$

Teraz sa každý bit informácie pohybuje rovnakou rýchlosťou a kým sa prvé začnú na druhom konci kábla prijímať, bude mať tento signál celý čas práve túto dĺžku  $l$ . Po dosadení hodnôt zo zadania dostávame výsledok (1 GB = 1000 MB):

$$l = c \frac{d}{v} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \frac{12 \text{ GB}}{10 \text{ MB} \cdot \text{s}^{-1}} = 3,6 \cdot 10^{11} \text{ m}.$$

Dĺžka  $3,6 \cdot 10^{11} \text{ m}$  znamená, že kábel by dosiahol zo Zeme na Slnko a späť, teda predpoklad, že celá informácia sa naraz zmestí do kábla nie je reálny. Tomu nasvedčujú aj bežné hodnoty času

odozvy vzdialeného servera, ktoré sú v rámci kontinentu typicky približne rádu  $10^{-2}$  s až  $10^{-1}$  s, teda pri sťahovaní, ktoré bežne trvá minúty, sa určite nenachádza celá informácia naraz v kábli.

Pri dosadení sme použili vzťah  $1 \text{ GB} = 1000 \text{ MB}$ , keďže v zadaní sú použité jednotky  $GB$  (slovom *gigabyte*) a  $MB$  (slovom *megabyte*), teda využívajúce klasické SI predpony rádu, ktoré udávajú vzťah  $1 \text{ GB} = 1000 \text{ MB}$ , rovnako, ako pre jednotky sily platí  $1 \text{ GN} = 1000 \text{ MN}$  a pre jednotky energie platí  $1 \text{ GeV} = 1000 \text{ MeV}$ . V praxi sú bežne používané aj jednotky  $GiB$  (slovom "gibibyte") a  $MiB$  (slovom "mibibyte"), medzi ktorými platí vzťah  $1 \text{ GiB} = 2^{10} \text{ MiB} = 1024 \text{ MiB}$ , keďže v zadaní sú použité jednotky  $GB$  a  $MB$ , správny prepočet je  $1 \text{ GB} = 1000 \text{ MB}$ . Pri hodnotení sme však uznávali aj použitie prepočtu s  $2^{10}$ .

Nejasnosť mohla spôsobiť informácia, že dáta sťahujeme cez *dvojlinku*. Krútená dvojlinka je iba označenie použitého kábla. Aj keď prakticky prijímame dáta viacerými linkami, toto je už zohľadnené v rýchlosti sťahovania, ktorá nakoniec určuje, ako dlho k nám budú dáta cestovať. Možno si predstaviť, že každou z dvoch liniek prúdia dáta rýchlosťou  $5 \text{ MB/s}$  a preto je výsledná rýchlosť  $10 \text{ MB/s}$ , v zadaní sa však nepíše o rýchlosti po jednej linke, ale o výslednej rýchlosti tak, ako je najrozumnejšie ju definovať, ako reálne množstvo dát, ktoré je presunuté na disk v našom počítači za jednotku času. Preto nie je potrebné (ani správne) deliť čas potrebný na stiahnutie dvomi (ani inou konštantou).

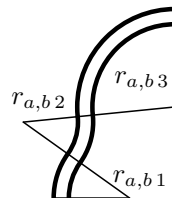
**Samuel Kočiščák**  
samo@fykos.cz

### Úloha III.2 ... pekelná

3 body; průměr 2,65; řešilo 55 studentů

Do pekla vede cesta a silnice po opačných březích řeky. Jdeme po směru řeky, který je vyznačen na obrázku. Břehy řeky jsou tvořeny částmi soustředných kružnic. Pěší cesta kopíruje jeden břeh řeky, silnice druhý břeh, šířka toku je neměnná. Po jaké straně řeky je rychlejší jít? Známe středový úhel každého kružnicového oblouku  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  a poloměr každé kružnice  $r_{a1}, r_{b1}, r_{a2}, r_{b2}, \dots$ , kde indexy  $a, b$  značí levý a pravý břeh.

*Napadla Lukáše cestou do Pekla.*



Víme, že cesta i silnice leží na soustředných kružnicích. Řekněme, že silnice povede po levém břehu řeky. Platí  $\Delta o_i = \Delta r \varphi_i$ , kde  $i$  je číslo příslušného oblouku,  $\Delta r$  je šířka řeky (a tedy i rozdíl poloměrů oblouků v absolutní hodnotě),  $\varphi_i$  je středový úhel oblouku v radiánech (když se řeka točí doprava, má úhel zápornou hodnotu) a  $\Delta o_i$  je, o kolik je cesta delší než silnice. Tedy cesta bude delší než silnice o hodnotu:

$$\sum_{i=1}^n \Delta o_i = \sum_{i=1}^n \Delta r \varphi_i = \Delta r \sum_{i=1}^n \varphi_i,$$

kde  $n$  je (neznámý, ale to nevadí) počet oblouků.  $\varphi_i$  jsou jednak středové úhly jednotlivých oblouků, jednak úhel mezi tečnou ke kružnici na začátku a na konci oblouku, přičemž tečna ke konci  $i$ -tého oblouku je shodná s tečnou k začátku  $(i+1)$ -ho oblouku (orientace úhlu zůstane stejná). Proto je celkový rozdíl délky cesty a silnice roven  $\Delta r \varphi_{tot}$ , kde  $\varphi_{tot}$  je úhel mezi tečnou k silnici na začátku a na konci údolí.  $\Delta r$  je mimochodem vždy kladné, tedy to, zda je delší silnice nebo cesta, můžeme určit čistě ze součtu úhlů. To bude fungovat, pokud se řeka nebude křížit sama se sebou, což se může stát asi jen na cestě do pekla.

Nakonec by to chtělo říci, který břeh je pro nás v tomto konkrétním případě výhodnější. Úhly  $\varphi_1$  a  $\varphi_3$  jsou orientované záporně, úhel  $\varphi_2$  kladně. Také na obrázku vidíme, že  $\varphi_3$  je v absolutní hodnotě větší než  $\varphi_2$ , tedy součet těchto tří úhlů je záporný a cesta je kratší než silnice. Také je vidět, že se řeka stočila doprava a úhel mezi jejím směrem na začátku a konci údolí je orientovaný záporně.

**Markéta Calábková**

calabkovam@fykos.cz

### Úloha III.3 ... kde to píská

7 bodů; průměr 5,89; řešilo 35 studentů

Verčiny uši lze aproximovat dvěma bodovými detektory ve vzdálenosti  $d$ , které detekují zvukové vlny ze všech směrů stejně dobře. Verča umí polohu známého zdroje zvuku poslepu určit velice přesně, proto jednoho dne, když se probudila, vyzvala své přátele k tomu, aby ji vyzkoušeli. Jenže Verča si v jednom uchu zapomněla špunt, který snižuje intenzitu zvuku v jejím levém uchu  $k$ -krát. Verči byly zavázány oči a zdroj byl umístěn do vzdálenosti  $y$  před ni a o  $x$  napravo (či  $-x$  nalevo). Určete, na které místo  $(x', y')$  Verča ukáže, jestliže uši rozeznávají polohu zdroje podle hlasitosti zvuku. *Luboška vyděsil telefon s jedním sluchátkem v uších.*

Existují dva přístupy, jeden více počítačí a druhý více geometrický. Nejdříve tedy zkusme spočítat vztah mezi  $x, y$  a  $x', y'$ . Víme, že intenzita zvuku klesá s druhou mocninou vzdálenosti podle vzorce

$$I = \frac{c}{r^2},$$

v našem případě pak (pro levé a pravé ucho)

$$I_{L,P} = \frac{c}{\left(x \pm \frac{d}{2}\right)^2 + y^2}, \quad (1)$$

kde  $c$  je nám neznámá konstanta, kterou naštestí nebudeme v tomto příkladě potřebovat, a znaménko plus odpovídá levému uchu.

Ze zadání máme

$$\begin{aligned} I'_L &= \frac{I_L}{k} \\ I'_P &= I_P \end{aligned}$$

Dosadíme z (1) a upravíme <sup>1</sup>

$$\left(x' + \frac{d}{2}\right)^2 + y'^2 = k \left(\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + y^2\right) \quad (2)$$

$$\left(x' - \frac{d}{2}\right)^2 + y'^2 = \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + y^2 \quad (3)$$

Vyjádríme  $x'$  a  $y'$

$$x' = \frac{(k-1)\left(x^2 + y^2 + \frac{d^2}{4}\right) + dx(k+1)}{2d} \quad (4)$$

$$y'^2 = \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 - \left(x' - \frac{d}{2}\right)^2 + y^2 \quad (5)$$

<sup>1</sup>Všimněme si, že  $c$  se vykrátí.

Rozhodně v tomto případě nepovažujeme za vhodné odmocňovat vzorec, natož dosazovat za  $x'$  v druhém vzorci, abychom se ve vzorcích vůbec vyznali.

Věnujme se rozboru těchto rovnic. Pro  $k = 1$  se vzorec zredukuje na  $x' = x$  a  $y'^2 = y^2$ , což odpovídá nezkreslenému vnímání. Druhá rovnost může být splněna dvěma způsoby, s opačnými znaménky. To nám říká, že zdroj může být před nebo za Verčou, mezi čímž ona bohužel nedokáže kvůli osově symetrii problému rozhodnout.<sup>2</sup> Se zvyšujícím se  $k$  se zvyšuje i  $x'$ , čímž se bod, na který ukáže, bude zobrazovat čím dál víc napravo od ní. Jak to bude s  $y'$ ? Z rovnice (5) je vidět, že s rostoucím  $x'$  klesá hodnota  $y'$  až k nule, což znamená, že se čárkovaný bod zobrazuje stále více k ose  $x$ , až ji dosáhne, čímž bude bod přesně vpravo od Verči.<sup>3</sup> Pro vyšší  $k$ , a tedy i  $x'$  bude záporný člen rovnice (5) dominovat, čímž posune pravou stranu do záporných čísel, a rovnice nebude mít řešení. V tomto okamžiku si Verča nejspíš uvědomí, že má špunt v uších.

Nyní přejděme ke geometrickému přístupu. Podívejme se na soustavu rovnic (2),(3). To jsou ale rovnice kružnic! Právě strany vyjadřují původní vzdálenosti—které považujeme za konstantu.<sup>4</sup> Nalevo pak jsou rovnice pro kružnice se středy v obou uších. Jedna má za poloměr původní vzdálenost ucha od bodu  $(x, y)$ , a tak tímto bodem prochází, druhá pak má poloměr  $\sqrt{k}$ -krát větší. Mají-li být splněny obě rovnice, musí se jednat o průsečíky obou kružnic, ty jsou dva, pokud se kružnice protínají, což je konzistentní s rovnicí (5). Jediné řešení rovnice pak odpovídá stavu, kdy se kružnice dotýkají. Lépe je to vidět na obrázku 1.

**Mikuláš Matoušek**  
mikulas@fykos.cz

### Úloha III.4 ... radar zadarmo

7 bodů; průměr 4,43; řešilo 53 studentů

*Na všechny patníky podél silnice umístíme kontrolní červené tabulky (vlnová délka červené barvy je  $\lambda_c = 630$  nm). Jakmile řidič vidí na patníku před ním tabulku modrou (vlnová délka modré barvy je  $\lambda_m = 450$  nm), ví, že jede příliš rychle. Jaká je tato mezní rychlost? Jakou má běžné osobní auto při této rychlosti hybnost a kinetickou energii?*

*Kuba našel na internetu futuristickou fotku.*

Jev, který řidič pozoruje, se jmenuje Dopplerův jev. Jedná se o změnu frekvence zdroje vlnění, kterou zaznamená pozorovatel, pokud se vůči zdroji pohybuje. Tento jev lze dobře pozorovat, když se k vám blíží houkající sanitka: frekvence sirény nejdřív roste, a jakmile vás sanitka mine, tak začne klesat. V našem případě se jedná o světlo, tedy vlnění elektromagnetické. V případě tak silného dopplerovského efektu, že se mění barva světla, se auto hýbe rychlostí řádově srovnatelnou s rychlostí světla  $c = 3,0 \cdot 10^8$  m·s<sup>-1</sup>. V takovém případě se začnou projevovat efekty speciální teorie relativity, kdy čas běží pro vzájemně se pohybující pozorovatele různou rychlostí (tomu se říká dilatace času) a vzdálenosti mají různou délku (tomu se říká kontrakce délek). Podle vzorce pro relativistický Dopplerův jev platí pro vztah pozorované vlnové délky  $\lambda_m$  a vlnové délky zdroje  $\lambda_c$  v případě, kdy se pozorovatel přibližuje ke zdroji, vztah<sup>5</sup>

$$\frac{\lambda_c}{\lambda_m} = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}},$$

<sup>2</sup>Pokud by měla Verča třetí ucho, mohla by to zvládnout.

<sup>3</sup>Všimněme si, že v tomto okamžiku má rovnice jen jedno řešení—body před a za Verčou splynou.

<sup>4</sup>Přesněji řečeno za parametru.

<sup>5</sup> Pro signál šířící se přesně rychlostí  $c$ , tedy v prostředí o indexu lomu  $n = 1$ , což vzduch přibližně splňuje.

kde  $v$  je rychlost řidiče. Odtud můžeme vyjádřit a vyčíslit řidičovu rychlost jako

$$v = \frac{\lambda_c^2 - \lambda_m^2}{\lambda_c^2 + \lambda_m^2} c \doteq 0.32c \doteq 9,7 \cdot 10^7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Nyní spočítáme hybnost  $p$ , kam dosadíme relativisticky korigovanou hmotnost (řekněme, že klidová hmotnost auta je  $m_0 = 1\,500 \text{ kg}$ ):

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \doteq 1,5 \cdot 10^{11} \text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Při určování kinetické energie vyjdeme z toho, že celková energie tělesa  $mc^2$  se rovná součtu klidové energie tělesa  $E_0 = m_0c^2$  a jeho kinetické energie  $E_k$ . Kinetickou energii odtud určíme takto:

$$E_k = E - E_0 = mc^2 - m_0c^2 = \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) m_0c^2 - m_0c^2 = m_0c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) \doteq$$

Když řidič vidí modrou tabulku místo červené, jede rychlostí  $9,7 \cdot 10^7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , auto má hybnost asi  $1,5 \cdot 10^{11} \text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$  a kinetickou energii  $7,7 \cdot 10^{18} \text{ J}$ .

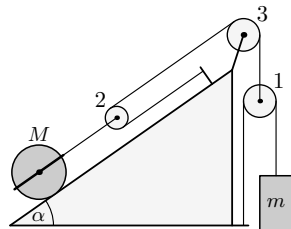
**Dominika Kalasová**  
dominika@fykos.cz

**Jakub Dolejší**  
krasnykuba@fykos.cz

### Úloha III.5 ... kladkovaná

7 bodů; průměr 2,79; řešilo 29 studentů

Mějme rozestavení kladek jako na obrázku. Známé hmotnosti  $m_i$ , poloměry  $R_i$  a momenty setrvačnosti  $J_i$  všech kladek, hmotnost  $m$  závaží a hmotnost  $M$ , poloměr  $R$  i moment setrvačnosti  $J$  válce. Zanedbejte tíhu kladky 2, abyste mohli uvažovat, že lana vedoucí ke kladce 2 jsou rovnoběžná s nakloněnou rovinou. Součinitel smykového i klidového tření mezi válcem a podložkou je  $f$ . Lano na kladkách neprokluzuje. Vypočtete s jakým zrychlením (popř. i úhlovým zrychlením) se bude pohybovat závaží  $m$  a válec  $M$ .



*Kubovi přišlo cvičení zbytečně jednoduché.*

Jelikož nemáme žádnou teorii hmotných kladek, budeme se k nim chovat jako k libovolnému jinému tělesu v mechanice. To znamená, že si napíšeme pohybové rovnice nejen pro válec  $M$  a závaží  $m$ , ale také pro všechny kladky. Zároveň neznáme žádný obecný vztah mezi velikostmi sil působících na kladku (které jsou pro nehmotné kladky stejně veliké, a tedy se vyruší). Na obr. 2 jsou zakresleny všechny síly působící na vyšetřovaná tělesa. Současně tím zavádíme značení sil. Jelikož je kladka 3 pevně uchycena, nemusíme se zabývat silami s nulovým momentem.

Co se týče aproximace ze zadání, uvažujme nyní pouze to, že všechna lana vedoucí ke kladce 2 jsou rovnoběžná s povrchem nakloněné roviny. Toho lze například dosáhnout umístěním kladky 2 do drážky bez tření. Zanedbání typu  $m_2 \approx 0$  provedeme až ve výsledku, kde teprve uvidíme, co můžeme zanedbat.

Dále si musíme uvědomit, že na volných kladkách se zrychlení půlí (vzhledem k tomu, že se lano musí prodloužit dvakrát více, než se skutečně kladka posune). Označme  $a$  zrychlení válce. Za kladný směr zrychlení považujeme případ, kdy válec bude klesat. Potom se kladka 2



pohybuje se zrychlením  $a$ , kladka 1 se zrychlením  $2a$  a závaží  $m$  se zrychlením  $4a$ . Pohybové rovnice závaží a válce vypadají následovně,

$$4ma = mg - N_1, \quad (6)$$

$$Ma = N_2 - Mg \sin \alpha - T, \quad (7)$$

$$J\varepsilon = TR, \quad (8)$$

kde  $\varepsilon$  je úhlové zrychlení válce.

Obvodové zrychlení kladek musíme brát v soustavě spojené s kladkou, tedy od zrychlení lana musíme odečíst zrychlení kladky. Pohybové rovnice rovnice pro kladky nabývají tvaru

$$2m_1a = m_1g + N_1 + F_1 - N_{31}, \quad (9)$$

$$J_1 \frac{2a}{R_1} = (N_1 - F_1)R_1, \quad (10)$$

$$J_3 \frac{2a}{R_3} = (N_{31} - N_{32})R_3, \quad (11)$$

$$m_2a = -m_2g \sin \alpha + N_{32} + F_2 - N_2, \quad (12)$$

$$J_2 \frac{a}{R_2} = (N_{32} - F_2)R_2. \quad (13)$$

Jelikož lana neprokluzují na kladkách, počítá se úhlové zrychlení kladek jako podíl zrychlení lana na kladce vůči její středu a poloměru kladky.

Nyní však máme pouze 8 rovnic pro 9 neznámých  $a$ ,  $\varepsilon$ ,  $T$ ,  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_{31}$ ,  $N_{32}$ . Pro jednoznačné řešení potřebujeme přidat ještě devátou rovnici. Pokud je třecí koeficient dostatečně vysoký, tj. třecí síla je nižší než normálová síla  $F_N$  působící mezi válcem a podložkou,

$$|T| \leq fF_N = Mgf \cos \alpha,$$

nebude docházet k prokluzování válce, a můžeme psát

$$a = \varepsilon R. \quad (14)$$

Jelikož směr působení síly  $T$  je závislý na směru pohybu, píšeme velikost  $|T|$ .

Pokud je naopak třecí koeficient příliš malý, nemůže třecí síla  $T$  růst výše než  $fF_N$ , a na této hodnotě už zůstane, tedy

$$T = Mgf \cos \alpha. \quad (15)$$

Toto platí v případě  $a > 0$ . Pokud však vyjde  $a < 0$ , musíme v naší znaménkové konvenci počítat

$$T = -Mgf \cos \alpha. \quad (16)$$

Jelikož se v žádné jiné rovnici nevyskytuje  $f$ , odpovídá tato změna přechodu od  $f$  k  $-f$ , stačí tedy spočítat první případ a pro druhý případ pouze v řešení udělat tuto změnu. Pokud válec neprokluzuje, vyjde řešení stejně pro oba směry pohybu.

Vyřešením této soustavy 9 lineárních rovnic dostáváme řešení pro případ, kdy válec neprokluzuje

$$a = g \frac{4m + 2m_1 - M \sin \alpha - m_2 \sin \alpha}{M + 16m + 4m_1 + m_2 + \frac{J}{R^2} + 4\frac{J_1}{R_1^2} + \frac{J_2}{R_2^2} + 4\frac{J_3}{R_3^2}}, \quad (17)$$

Odtud získáme zrychlení závaží jako  $4a$  a úhlové zrychlení válce jako  $\varepsilon = a/R$ .

V případě, kdy válec prokluzuje, dostáváme

$$a = g \frac{4m + 2m_1 - M(\sin \alpha + f \cos \alpha) - m_2 \sin \alpha}{M + 16m + 4m_1 + m_2 + 4 \frac{J_1}{R_1^2} + \frac{J_2}{R_2^2} + 4 \frac{J_3}{R_3^2}}, \quad (18)$$

$$\varepsilon = \frac{g}{R} \frac{MR^2 f \cos \alpha}{J}. \quad (19)$$

Jestliže vychází opačný směr pohybu, musíme řešení upravit na tvar

$$a = g \frac{4m + 2m_1 - M(\sin \alpha - f \cos \alpha) - m_2 \sin \alpha}{M + 16m + 4m_1 + m_2 + 4 \frac{J_1}{R_1^2} + \frac{J_2}{R_2^2} + 4 \frac{J_3}{R_3^2}}, \quad (20)$$

$$\varepsilon = -\frac{g}{R} \frac{MR^2 f \cos \alpha}{J}. \quad (21)$$

K důkladnějšímu rozboru této změny se ještě vrátíme. Zrychlení závaží získáme v obou případech opět jako  $4a$ .

Vidíme, že když válec prokluzuje, nemá jeho moment setrvačnosti žádný vliv na jeho translační zrychlení, ale pouze na rotační pohyb.

V tuto chvíli můžeme oprávněně provést aproximaci  $m_2 \approx 0$  a vyškrtnout z výrazů (17)-(21) všechny členy obsahující  $m_2$ . Pro jednoduchost se v následujících úvahách nebudeme zabývat patologickými případy, kdy naši aproximaci nelze použít takto jednoduše.

Nyní je třeba vyšetřit, kdy bude a kdy nebude válec prokluzovat. To lze udělat z řešení libovolného z těchto dvou případů. Uděláme to tedy pro názornost oběma metodami. Když válec neprokluzuje, je splněná podmínka  $a = \varepsilon R$  a třecí síla se podle toho patřičně upravuje (s rostoucím  $\varepsilon$  roste). Proto stačí najít mezní případ  $f$ , pro který je splněna rovnost  $|T| = fF_N$ . Jednoduchým dosazením do soustavy dostáváme

$$T = \frac{J\varepsilon}{R} = \frac{J}{R^2} a, \\ \frac{J}{R^2} |a| \leq fF_N = Mgf \cos \alpha.$$

Dosazením za  $a$  z (17) a řešením této lineární nerovnice dostáváme, že válec neprokluzuje pro

$$f \geq \frac{J}{MR^2 \cos \alpha} \cdot \frac{|4m + 2m_1 - M \sin \alpha|}{\frac{J}{R^2} + 4 \frac{J_1}{R_1^2} + \frac{J_2}{R_2^2} + 4 \frac{J_3}{R_3^2} + M + 16m + 4m_1}. \quad (22)$$

V případě, kdy válec prokluzuje je naopak splněna rovnost  $|T| = fF_N$  a pro zrychlení platí  $|a| > |\varepsilon|R$  – musíme tedy vyřešit mezní podmínku  $a = \varepsilon R$ . Tentokrát máme už vyjádřené všechny potřebné veličiny ve vztazích (18) a (19), resp. (20) a (21), proto rovnou píšeme podmínku pro prokluzování válce, (23) pro  $a > 0$  a (24) pro  $a < 0$ ,

$$g \frac{4m + 2m_1 - M(\sin \alpha + f \cos \alpha)}{M + 16m + 4m_1 + 4 \frac{J_1}{R_1^2} + \frac{J_2}{R_2^2} + 4 \frac{J_3}{R_3^2}} > g \frac{MR^2 f \cos \alpha}{J}, \quad (23)$$

$$g \frac{4m + 2m_1 - M(\sin \alpha - f \cos \alpha)}{M + 16m + 4m_1 + 4 \frac{J_1}{R_1^2} + \frac{J_2}{R_2^2} + 4 \frac{J_3}{R_3^2}} < -g \frac{MR^2 f \cos \alpha}{J}. \quad (24)$$

Řešení těchto nerovnic se liší znaménkem – můžeme je tedy spojit do jedné, společné podmínky (25),

$$f < \frac{J}{MR^2 \cos \alpha} \cdot \frac{|4m + 2m_1 - M \sin \alpha|}{\frac{J}{R^2} + 4\frac{J_1}{R_1^2} + \frac{J_2}{R_2^2} + 4\frac{J_3}{R_3^2} + M + 16m + 4m_1}. \quad (25)$$

Obě podmínky (22) a (25) skutečně vyšly stejně, přestože druhý případ na první pohled nevyplývá, že by měl mít řešení právě ve stejném tvaru.

Pokud bychom měli různý dynamický a statický koeficient tření, byla by správně metoda z případu, kdy válec neprokluzuje. V případě metody druhé bychom museli jako poslední krok nahradit dynamický koeficient statickým, čímž bychom opět dospěli ke stejnému závěru. Poznamenejme však, že pokud by se koeficienty lišily, mohli bychom dostat komplikovaný trhavý pohyb.

Nyní se vraťme k rozboru  $a \geq 0$  v případě prokluzujícího válce. Nejprve poznamenejme, že v případě  $a = 0$ , tedy

$$4m + 2m_1 - M(\sin \alpha \pm f \cos \alpha) = 0,$$

musí nutně platit také  $\varepsilon = 0$ , protože nepůsobí žádný moment roztáčející válec. V tomto případě tedy válec neprokluzuje, a konkrétně setrvává na místě, stejně jako celá soustava. Dále tedy uvažujme pouze  $a \neq 0$ , díky čemuž můžeme všechny následující nerovnosti uvažovat ostré.

Soustava se bude pohybovat v kladném směru, pokud bude splněna nerovnost  $a > 0$  pro  $a$  ze vzorce (18), tedy

$$4m + 2m_1 - M(\sin \alpha + f \cos \alpha) > 0. \quad (26)$$

Naopak v záporném směru se bude pohybovat pokud bude splněna nerovnost  $a < 0$  pro  $a$  ze vzorce (20), tedy

$$4m + 2m_1 - M(\sin \alpha - f \cos \alpha) < 0. \quad (27)$$

Nerovnosti nemohou být splněny současně, tedy dostáváme jednoznačnou předpověď vývoje systému. Neplatnost žádné z nich však neimplikuje platnost druhé, tedy může nastat situace, kdy nebude splněna ani jedna z nich. Úvahou můžeme dospět k tomu, že pak musí válec neprokluzovat – tento fakt nyní odvodíme.

Přepokládejme, že nerovnosti (26) a (27) nejsou splněné – jsou tedy splněné nerovnosti

$$4m + 2m_1 - M(\sin \alpha + f \cos \alpha) < 0,$$

$$4m + 2m_1 - M(\sin \alpha - f \cos \alpha) > 0.$$

Z obou z nich vyjádříme  $f$  a spojením výsledků (liší se opět pouze znaménkem) dostáváme nerovnost

$$f > \frac{1}{\cos \alpha} \frac{|4m + 2m_1 - M \sin \alpha|}{M} > f_{\text{mez}} \frac{MR^2}{J} > f_{\text{mez}},$$

kde jsme využili toho, že pro každé těleso platí  $J < MR^2$ , kde  $R$  značí největší vzdálenost bodu tělesa od osy, vůči které počítáme moment setrvačnosti, v našem případě poloměr (okraj od středu). Tím jsme ověřili platnost nerovnosti (22), a tedy válec skutečně neprokluzuje. Vzhledem k tomuto výsledku nesplnění jedné z nerovností (26) nebo (27) automaticky implikuje splnění druhé z nich (pokud víme, že válec prokluzuje).

Při zadaných počátečních podmínkách se tedy musíme podívat na nerovnost (22), zda válec prokluzuje, nebo ne. Pokud prokluzuje, musíme ověřit nerovnost (26), abychom zjistili, jakým směrem se bude pohybovat, a podle toho použili příslušné vyjádření zrychlení.

**Jakub Dolejší**  
krasnykuba@fykos.cz

## Úloha III.P ... srdeční

8 bodů; průměr 5,69; řešilo 45 studentů

Odhadněte, jakou práci vykoná lidské srdce na pumpování krve za jeden den. S čím se dá tato energie srovnat? Jaké procento z doporučeného denního příjmu energie tvoří váš odhad?

*Karlovi se rozbušilo srdce.*

Nejdříve proberme, jak vlastně srdce pracuje. Srdce je sval, který svými stahy zajišťuje oběh krve v těle. Skládá se ze dvou síní a dvou komor. Přes pravou síň a komoru pumpuje krev do plic, skrz levou síň a komoru proudí krev do zbytku celého těla<sup>6</sup>. Srdce tedy funguje jako živá pumpa, jejíž nejvýraznější podíl na práci má tlakově-objemová práce  $W_p$ . Vedle toho stahy srdce udílí krvi jistou rychlost, můžeme mluvit o kinetické práci  $W_k$ . Celkovou práci srdce  $W$  tedy budeme počítat jako

$$W = W_k + W_p. \quad (28)$$

Hustota krve je udávána<sup>7</sup> jako  $\rho = 1060 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ . Objem každé komory je<sup>8</sup> zhruba 70 ml. Z těchto údajů můžeme ze známého vzorečku  $m = V\rho$  vypočítat hmotnost krve vypuzené při jednom stahu  $m = 74,2 \text{ g}$ . Také se udává, že srdce udělí krvi při vypuzování rychlost  $v = 0,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Z těchto údajů už můžeme vypočítat celkovou kinetickou práci srdce

$$W_k = 2 \frac{1}{2} m v^2 = 0,019 \text{ J}$$

kde faktor 2 je přítomen kvůli tomu, že počítáme dvě komory.

Pro výpočet tlakově-objemové práce budeme potřebovat ještě tlaky, pod kterými je krev vypuzována z komory. Protože krev je vypuzována při tzv. systole, budeme v našem přiblížení pracovat se systolickým tlakem, který je v případě levé komory roven  $p_l = 16 \text{ kPa}$ , v případě pravé komory je to  $p_p = 2 \text{ kPa}$  (ještě jednou připomeňme, že objemy obou komor jsou shodně po 70 ml)

$$W_p = V(p_l + p_p) = 1,26 \text{ J}.$$

Z rovnice (28) můžeme vypočítat, že  $W = 1,28 \text{ J}$ . Vidíme, že kinetická práce je zanedbatelná vůči tlakově-objemové. Navíc díky rozdílům systolických tlaků můžeme tvrdit, že největší podíl na tomto čísle má tlakově-objemová práce levé komory. Uvedená práce srdce  $W$  se vztahuje na jeden stah srdce. Proto musíme číslo vynásobit počtem stahů za den, abychom získali práci srdce za jeden den  $W_{\text{den}}$ . Průměrná tepová frekvence je uváděna<sup>9</sup> zhruba  $70 \text{ tep}\cdot\text{min}^{-1}$ . Den má 1440 minut. Za den máme tedy 101 tisíc tepů. Vynásobením prací srdce  $W$  dostaneme, že srdce za den spotřebuje  $W_{\text{den}} = 130 \text{ kJ}$ .

Podívejme se dál, jaký podíl z celkové energie srdce spotřebuje. Samozřejmě to závisí na každém člověku. Pokud vezmeme nějakého konkrétního člověka (70 kg, 175 cm, 25 let, muž) máme doporučenou denní dávku energie<sup>10</sup>  $W_{\text{ddp}} = 9590 \text{ kJ}$ .

Z předchozích údajů už můžeme spočítat, že podíl energie, kterou spotřebovává srdce  $\eta$ , je

$$\eta = \frac{W_{\text{den}}}{W_{\text{ddp}}} = 1,4\%.$$

<sup>6</sup><https://cs.wikipedia.org/wiki/Srdce>

<sup>7</sup>[http://www.wikiskripta.eu/index.php/Krevní\\_řečiště](http://www.wikiskripta.eu/index.php/Krevní_řečiště)

<sup>8</sup>[http://www.wikiskripta.eu/index.php/Biomechanika\\_krevního\\_oběhu](http://www.wikiskripta.eu/index.php/Biomechanika_krevního_oběhu)

<sup>9</sup><https://www.sportvital.cz/sport/klidova-srdecni-frekvence>

<sup>10</sup><http://www.kaloricke-tabulky.cz/nastroje/denni-kaloricky-prijem>

Z různých zdrojů můžeme pro tento podíl najít dvě různé hodnoty no opravdu, zkuste si to). Toto číslo platí pouze v tom případě, že účinnost srdce je  $u' = 100\%$ . ale účinnost srdce v klidu je udávána zhruba  $u = 10\%$ . proto do srdce neputuje pouze 1,4% energie, ale desetkrát vyšší procento.

Do porovnávání nebudeme započítávat účinnost srdce (tzn. budeme brát jen 130 kJ na den) a budeme hledat, jaké množství jídla dokáže pohánět srdce celý den. Hledáme v internetových kalorických tabulkách<sup>11</sup>. Odpovídá tomu například 70 ml pomerančového džusu nebo čtvrtka bílého rohlíku nebo např. 22 g tvarohu.

*Kateřina Smítalová*  
katka@fykos.cz

### Úloha III.E ... reflexní náramek

12 bodů; průměr 7,06; řešilo 34 studentů

Změřte co nejvíce charakteristik samonavíjecího reflexního náramku. Zajímá nás především:

- Náramek je vyztužen kusem plechu, který může být ohnut podélně (svinutý náramek) nebo příčně (narovnaný náramek). Jaký poloměr křivosti mají tyto ohyby, pokud na plech nepůsobí vnější síla?
- Pokud náramek narovnáme a budeme ohýbat v jednom místě, při jakém úhlu přejde do ohnutého stavu? Při jakém úhlu se opět narovná? (Pozorujeme hysterezi?)
- Jaký moment síly je potřebný k ohnutí náramku?
- Je některý ze stavů náramku (svinutý nebo narovnaný) energeticky výhodnější? Odhadněte o kolik.

*Erikovi se ne a ne ohnout.*

*Erik Hendrych*  
erik@fykos.cz

### Úloha III.S ... limitní

10 bodů; průměr 7,81; řešilo 26 studentů

- a) Zkuste vlastními slovy popsat postup konstrukce intervalových odhadů střední hodnoty v případě obecného rozdělení měřených dat (postačí vlastními slovy popsat následující: centrální limitní věta a předpoklady jejího použití, kovariance a korelace (a jejich odhady), vícerozměrná centrální limitní věta a předpoklady jejího použití, zákon šíření nejistot a kdy ho lze použít). Není potřeba uvádět přesná matematická odvození, stačí požadované pojmy a vlastnosti stručně popsat.
- b) V přiloženém datovém souboru mereni3-1.csv najdete výsledky měření určité fyzikální veličiny  $v$ . Předpokládejme, že si nemůžeme být jisti, zda mají měřená data normální rozdělení. Vyjádřete nejistotu měření této fyzikální veličiny (nejistotu typu B neuvažujte), zkonstruujte intervalové odhady na základě CLV a stručně interpretujte jeho význam. Jak by se změnilly výsledky a interpretace, pokud bychom měli k dispozici jen čtvrtinu měření (řekněme první čtvrtinu dat z datového souboru)?

<sup>11</sup><https://www.kaloricketabulky.cz/search.php>

- c) Předpokládejme, že naším cílem je naměřit fyzikální veličiny  $x$  a  $y$ , které budeme chtít využít pro dosažení do vzorce

$$v = \frac{1}{2}xy^2.$$

Předpokládejme, že díky znalosti způsobu měření jsme si jisti, že jsou všechna měření na sobě nezávislá a ze zpracování naměřených dat měření máme následující výsledky, které jsou založeny na velkém počtu měření (více než 30 měření každé fyzikální veličiny)

$$x = (5,2 \pm 0,1),$$

$$y = (12,84 \pm 0,06).$$

Určete odhad fyzikální veličiny  $v$  a nejistotu měření fyzikální veličiny  $v$ .

Nápověda: Mohly by se vám hodit následující vztahy:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2}xy^2 \right) = \frac{1}{2}y^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2}xy^2 \right) = xy.$$

- d) Pomocí simulace ve výpočetním prostředí R demonstруйте platnost centrální limitní věty. Tj. generujte  $n$ -tice nezávislých realizací náhodné veličiny, která nemá normální rozdělení (pro tento případ použijte exponenciální, rovnoměrné a Poissonovo rozdělení s libovolně zvolenými parametry) a na histogramu ukažte, že pokud na data provedeme následující transformaci

$$\sqrt{n} \frac{\overline{x_n} - \mu}{S_n},$$

takto transformovaná data už budou rozdělena přibližně podle normálního rozdělení  $N(0, 1)$ . (Součástí hodnocení bude i hodnocení vzhledu grafů – zejména vhodně zvolené popisky os a legenda.)

- Bonus: Předpokládejme, že naším cílem je naměřit fyzikální veličiny  $x$  a  $y$ , které budeme chtít dosadit do vzorce

$$v = x^2 \sin y.$$

Uvažujme nejobecnější model měření (tj. měřená data nemají normální rozdělení a měření různých fyzikálních veličin na sobě mohou být závislá). V datovém souboru mereni3-2.csv máme výsledky měření fyzikálních veličin  $x$  a  $y$ , určete nejistotu určení veličiny  $v$  a zkonstruujte pro ni intervalový odhad. *Michal se pokusil vymyslet limitně těžké zadání seriálové úlohy.*

- a) Detailní odpověď na tuto otázku dostanete pouze přečtením 3. dílu seriálu, v tomto vzorovém řešení uvedeme jen ty nejdůležitější věci.

Centrální limitní věta je důležitá pro zpracování měřených dat (zejména pro intervalový odhad střední hodnoty), o kterých si nemůžeme být jisti, že mají normální rozdělení. Pokud si označíme měřená data jako  $x_1, \dots, x_n$ , potom centrální limitní věta říká, že následující transformace našich dat (musíme si uvědomit, že jde o náhodnou veličinu, neboť závisí na náhodných datech a nemůžeme tedy dopředu znát její hodnotu)

$$\sqrt{n} \frac{\overline{x_n} - \mu}{S_n}$$

konverguje v distribuci k rozdělení  $N(0, 1)$ , nezávisle na tom, jaké rozdělení<sup>12</sup> měla naše

<sup>12</sup>Ve skutečnosti je zde ještě podmínka na konečný rozptyl.

původní data. Matematicky zapsáno platí

$$\sqrt{n} \frac{\bar{x}_n - \mu}{S_n} \xrightarrow{D} N(0, 1).$$

Pokud chceme v praxi používat aproximace založené na CLV, musíme si uvědomit, že potřebujeme mít dostatečně velký počet měření, aby byla takováto aproximace přesná. Obecné pravidlo zní:

- Pokud máme alespoň 30 měření, potom je aproximace pomocí CLV velice přesná.
- Pokud máme alespoň 10 měření, potom je aproximace pomocí CLV pouze přibližná, ale stále poměrně přesná.
- Pokud máme méně než 10 měření, potom může být aproximace pomocí CLV značně nepřesná.

Pokud měříme více fyzikálních veličin najednou, musíme se zabývat také tím, zda nejsou naše měření závislá. Závislost našich měření (tedy vlastně náhodných veličin) měříme pomocí kovariance a korelace, které jsou pro dvě náhodné veličiny  $X$  a  $Y$  definovány následovně

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &= E[(X - EX)(Y - EY)], \\ \text{corr}(X, Y) &= (X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}(X) \cdot \text{var}(Y)}}. \end{aligned}$$

Korelace je vhodně znormovaná kovariance (může nabývat jen hodnot od  $-1$  do  $1$ ) a vyjadřuje, jak moc jsou náhodné veličiny lineárně závislé (hodnoty kolem  $0$  značí malou závislost, hodnoty blízké  $1$  nebo  $-1$  značí velkou závislost). Pokud jsou veličiny  $X$  a  $Y$  nezávislé, potom je kovarianční i korelační koeficient roven  $0$  (obrácená implikace ale neplatí). V praxi je důležité vědět, jak z naměřených dat odhadovat kovarianční a korelační koeficient. K tomu slouží výběrový kovarianční koeficient (resp. výběrový korelační koeficient) definovaný jako

$$\begin{aligned} \widehat{\text{cov}}(X, Y) &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)(y_i - \bar{y}_n), \\ \widehat{\text{corr}}(X, Y) &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)(y_i - \bar{y}_n)}{\sqrt{S_{X,n}^2 \cdot S_{Y,n}^2}}. \end{aligned}$$

Na tomto místě musíme poznamenat, že při výpočtu výběrového kovariančního (resp. korelačního) koeficientu musíme vždy používat dvojice odpovídajících si měření. Nelze postupovat tak, že si měření libovolně popárujeme.

Existuje i vícerozměrná verze CLV, která se zabývá případem, kdy chceme změřit  $k$  fyzikálních veličin  $v^{(1)}, \dots, v^{(k)}$ , dosadit je do vzorce

$$v = f(v^{(1)}, \dots, v^{(k)})$$

a následně chceme určit nejistotu měření fyzikální veličiny  $v$  a konstruovat pro ni intervalové odhady. Vícerozměrná centrální limitní říká, že v tomto případě platí

$$\frac{f(\bar{v}_n^{(1)}, \dots, \bar{v}_n^{(k)}) - f(v^{(1)}, \dots, v^{(k)})}{\sqrt{S^2}} \xrightarrow{D} N(0, 1),$$

kde  $\overline{v_n^{(i)}}$  je výběrový průměr měření  $i$ -té fyzikální veličiny,  $v^{(i)}$  je skutečná hodnota  $i$ -té fyzikální veličiny a  $S^2$  je vhodný normalizační koeficient, který se spočte podle vzorce

$$S^2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial v^{(1)}}(\bar{v}) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial v^{(k)}}(\bar{v}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{n_1}^2 & \cdots & \widehat{\text{cov}}(v^{(1)}, v^{(k)}) \\ \frac{\widehat{\text{cov}}(v^{(2)}, v^{(1)})}{\sqrt{n_2 n_1}} & \cdots & \frac{\widehat{\text{cov}}(v^{(2)}, v^{(k)})}{\sqrt{n_2 n_k}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\widehat{\text{cov}}(v^{(k)}, v^{(1)})}{\sqrt{n_k n_1}} & \cdots & s_{n_k}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial v^{(1)}}(\bar{v}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial v^{(k)}}(\bar{v}) \end{pmatrix}, \quad (29)$$

kde

$$\bar{v} = \left( \overline{v_{n_1}^{(1)}}, \dots, \overline{v_{n_k}^{(k)}} \right).$$

Pro použití vícerozměrné CLV opět platí podobná pravidla jako pro použití jednorozměrné CLV, tedy:

- Pokud máme alespoň 30 měření každé fyzikální veličiny  $v^{(1)}, \dots, v^{(k)}$ , potom je aproximace pomocí vícerozměrné CLV velmi přesná.
- Pokud máme alespoň 10 měření každé fyzikální veličiny, potom je aproximace pomocí vícerozměrné CLV pouze přibližná, ale stále poměrně přesná.
- Pokud máme méně než 10 měření nějaké fyzikální veličiny, potom může být aproximace pomocí vícerozměrné CLV značně nepřesná.

V případě, že si ze znalosti průběhu experimentu můžeme být jistí, že jsou všechna měření různých fyzikálních veličin na sobě nezávislá (což je v praxi velmi časté), se vzorec na výpočet členu  $S^2$  velmi zjednoduší na tvar

$$S = \sqrt{\left( \frac{\partial f(\overline{v_{n_1}^{(1)}})}{\partial v^{(1)}} \right)^2 s_{n_1}^{(1)2} + \cdots + \left( \frac{\partial f(\overline{v_{n_k}^{(k)}})}{\partial v^{(k)}} \right)^2 s_{n_k}^{(k)2}}.$$

Tomuto vzorci se často říká zákon šíření nejistot (případně zákon propagace nejistot).

V obou případech můžeme konstruovat intervaly spolehlivosti pro výslednou fyzikální veličinu  $v$ . Ze znění vícerozměrné CLV lze odvodit, že platí

$$P\left(f\left(\overline{v_n^{(1)}}, \dots, \overline{v_n^{(k)}}\right) - u_{1-\frac{\alpha}{2}} S < f\left(v^{(1)}, \dots, v^{(k)}\right) < f\left(\overline{v_n^{(1)}}, \dots, \overline{v_n^{(k)}}\right) + u_{1-\frac{\alpha}{2}} S\right) \simeq 1 - \alpha.$$

Tedy intervalový odhad pro skutečnou hodnotu výsledné fyzikální veličiny  $v$  bude mít tvar

$$\left( f\left(\overline{v_n^{(1)}}, \dots, \overline{v_n^{(k)}}\right) \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} S \right).$$

Fyzikové tento intervalový odhad zapisují zkráceně jen jako

$$(f(\bar{v}_n) \pm S)$$

a členu  $S$  říkají standardní odchylka.



- b) V přiloženém datovém souboru se nachází 40 naměřených dat, se kterými budeme pracovat. Nejprve musíme spočítat výběrový průměr našich dat podle vzorce

$$\overline{x_{40}} = \frac{1}{40} \sum_{i=1}^{40} x_i = 9,826.$$

Dále spočítáme výběrovou směrodatnou odchylku průměru podle vzorce

$$s_{40} = \sqrt{\frac{1}{40(40-1)} \sum_{i=1}^{40} (x_i - \overline{x_n})^2} = 0,036.$$

V našem případě, kdy neuvažujeme žádnou nejistotu typu B, vyjadřuje výběrová směrodatná odchylka nejistotu měření.

Podle teorie odvozené v seriálu bude mít asymptotický intervalový odhad založený na CLV o spolehlivosti  $(1 - \alpha)$  tvar

$$\left( \overline{x_n} \pm s_n u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right).$$

Pokud použijeme standardní zkrácený zápis, vyjde nám následující výsledek

$$(9,83 \pm 0,04).$$

Jelikož jsme použili velké množství dat (tj. více než 30), bude aproximace pomocí CLV už velice přesná. Tedy takovýto interval bude mít pravděpodobnost pokrytí skutečné hodnoty měřené fyzikální veličiny velice blízkou 68%.

Pokud bychom uvažovali, že máme k dispozici jen první čtvrtinu měření (tj. prvních 10 měření), dostali bychom jiné hodnoty výběrového průměru a výběrové směrodatné odchylky průměru. Konkrétně bychom dostali

$$\overline{x_{10}} = 9,92,$$

$$s_{10} = 0,06.$$

Intervalový odhad pro měřenou fyzikální veličinu by v tomto případě byl následující (používáme zkrácený zápis)

$$(9,92 \pm 0,06).$$

Je zřejmé, že za použití jiných vstupních dat dostaneme jiné číselné výsledky (i na tomto je vidět, že výběrový průměr a výběrová směrodatná odchylka průměru jsou náhodné veličiny). V tomto případě jsme provedli méně měření, takže jsme vcelku logicky dostali větší nejistotu měření. V tomto případě je ale nutné poznamenat, že náš intervalový odhad byl založen na poměrně málo měřeních (jen 10 měření), takže v tomto případě aproximace pomocí CLV nemusí být tolik přesná. Tento interval má tedy pravděpodobnost pokrytí skutečné hodnoty měřené fyzikální veličiny pouze přibližně 68%.

- c) Odhad fyzikální veličiny  $v$  se zkonstruuje jednoduše tak, že do funkce  $f$  dosadíme odhady fyzikálních veličin  $x$  a  $y$ . V našem případě dostaneme

$$\overline{v_n} = f(\overline{x_n}, \overline{y_n}) = \frac{1}{2} \cdot 5,2 \cdot 12,84^2 = 428,65.$$

V tomto speciálním případě, kdy můžeme měření různých fyzikálních veličin považovat za nezávislé, můžeme na výpočet nejistoty měření fyzikální veličiny  $v$  použít zákon šíření nejistot. Všechny potřebné údaje máme zadané, takže stačí dosadit. V tomto vzorovém řešení budeme dosazování dělat postupně, aby bylo všem jasné, jak jsme na náš výsledek přišli.

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{\left(\frac{\partial f(\bar{x}_n)}{\partial x}\right)^2 s_n^{(x)^2} + \left(\frac{\partial f(\bar{y}_n)}{\partial y}\right)^2 s_n^{(y)^2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\bar{y}_n^2\right)^2 s_n^{(x)^2} + (\bar{x}_n\bar{y}_n)^2 s_n^{(y)^2}} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{2} \cdot 12,84^2\right)^2 \cdot 0,1^2 + (5,2 \cdot 12,84)^2 \cdot 0,06^2} = 9,165. \end{aligned}$$

Když bychom měli zapsat intervalový odhad pro fyzikální veličinu  $v$  ve zkráceném tvaru, vypadal by následovně

$$(429 \pm 9).$$

- d) S využitím výpočetního prostředí  $R$  provedeme přesně to, co se píše v zadání. Nejprve si zvolíme přirozené číslo  $n$ . Toto číslo bude v našem modelu představovat počet měření, které při konkrétním experimentu provádíme (budeme volit hodnoty v řádu nízkých desítek nebo jednotek, což je typický počet měření při fyzikálních experimentech). Dále zvolíme počet opakování naší simulace (ideálně zvolit co nejvyšší, v našem případě zvolíme 10 000).

Nyní už můžeme začít se samotnou simulací. V každé jednotlivém cyklu vygenerujeme  $n$  nezávislých realizací náhodné veličiny s určitým rozdělením, které není normální (v našem případě používáme rozdělení  $Exp(2)$ ,  $R(0, 10)$  a  $Poiss(2)$ ). Z těchto  $n$  realizací spočteme následující transformaci

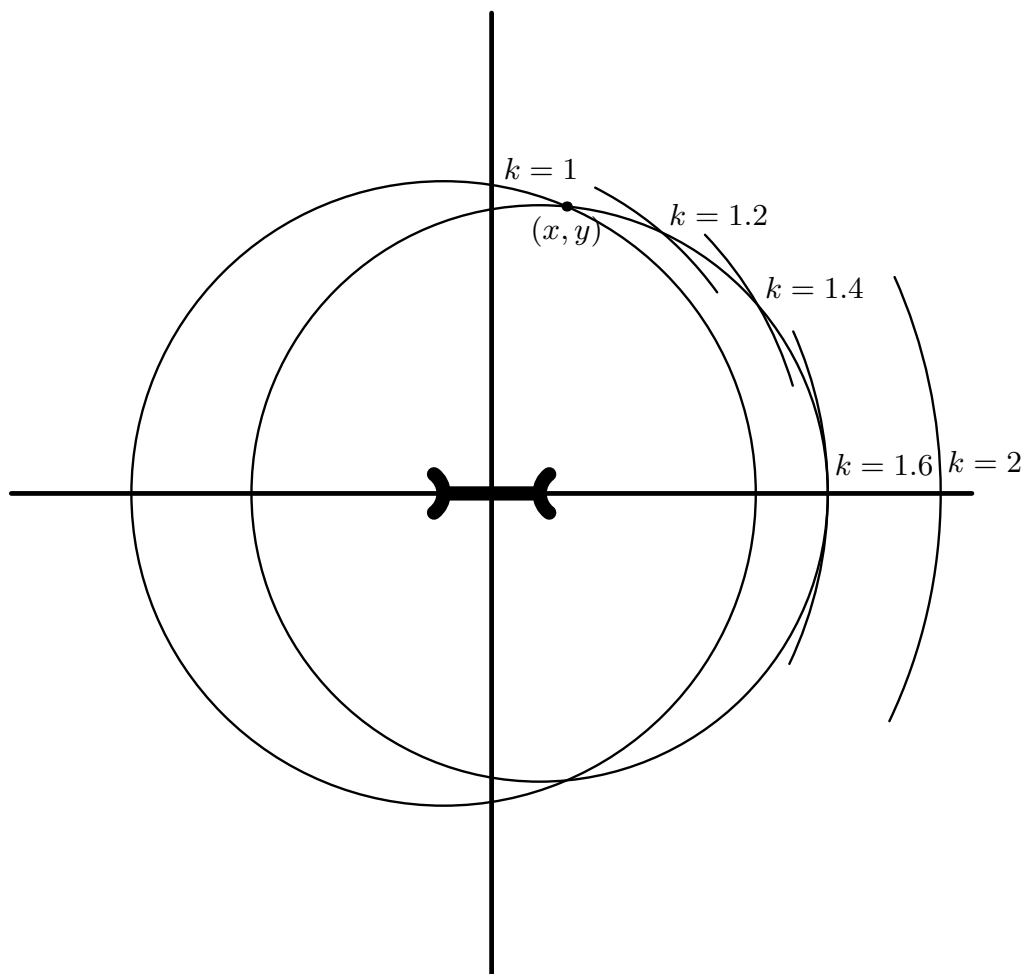
$$t = \sqrt{n} \frac{\bar{x}_n - \mu}{S_n}, \quad (30)$$

kde  $\mu$  představuje skutečnou střední hodnotu rozdělení, ze kterého jsme generovali použité realizace náhodné veličiny (tedy  $\frac{1}{2}$  u exponenciálního rozdělení, 5 u rovnoměrného rozdělení a 2 u Poissonova rozdělení). Toto opakujeme celkem 10 000krát, čímž získáme transformace

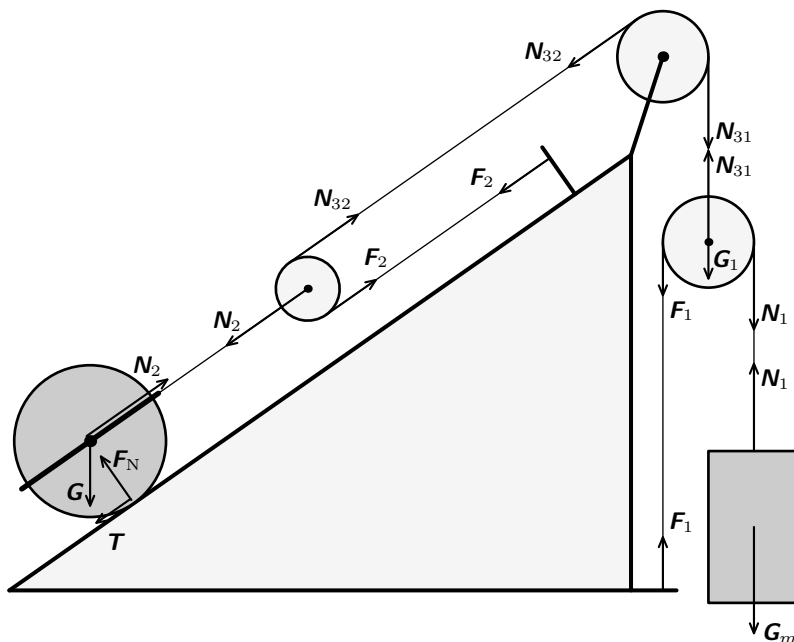
$$t_1, \dots, t_{10\,000}.$$

Pokud centrální limitní věta platí, potom by mělo být rozdělení takto transformovaných dat velice podobné rozdělení  $N(0, 1)$ . Toto ověříme na histogramu a budeme zkoumat závislost podoby s rozdělením  $N(0, 1)$  na volbě  $n$ .

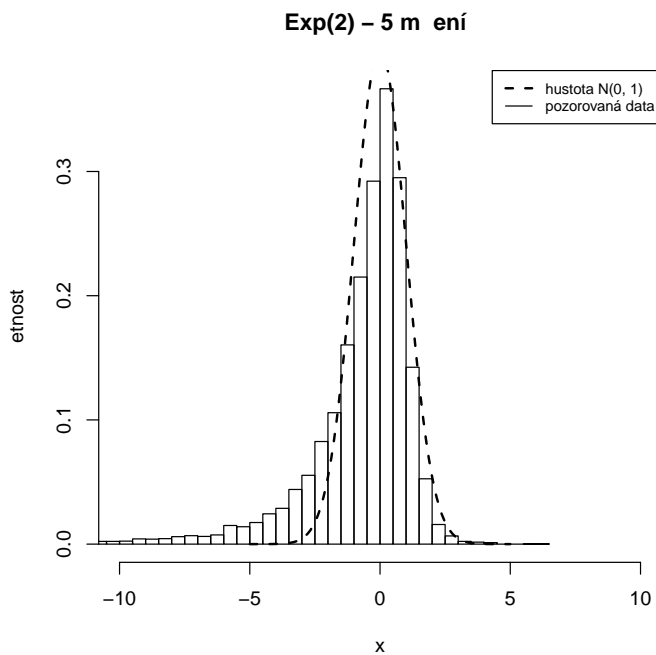
Nyní už k samotným výsledkům. Příslušné histogramy můžeme vidět na obrázcích 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 a 11. Ze všech těchto obrázků je vidět, že limitní rozdělení transformace měřených dat (30) je právě rozdělení  $N(0, 1)$ , přesně jak říká CLV. Je dobré si povšimnout, že rychlost konvergence je pro různá rozdělení měřených dat různá. Pokud ale provedeme alespoň 30 měření, je už rozdělení transformace měřených dat velice podobné rozdělení  $N(0, 1)$ , tedy aproximace pomocí CLV už bude v takovýchto případech velice přesná.



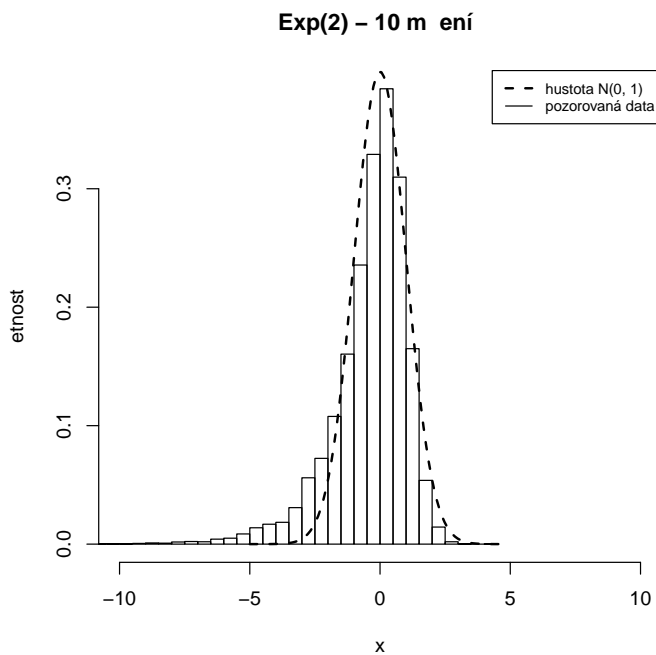
Obr. 1



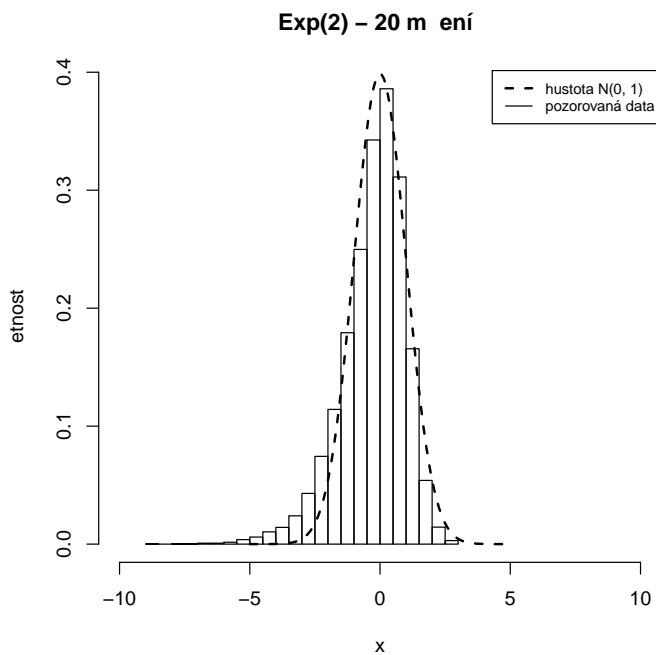
Obr. 2: Znázornění všech relevantních působících sil.



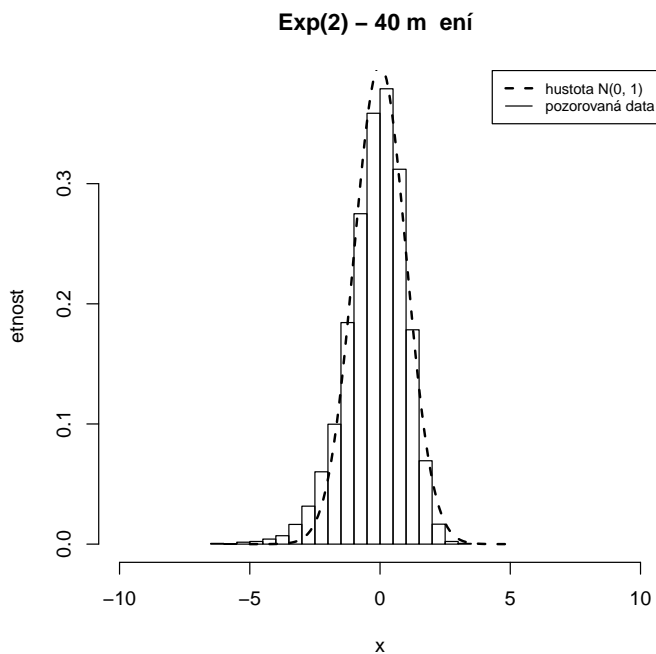
Obr. 3: Histogram transformace měřených dat pocházejících z exponenciálního rozdělení pro 5 měření.



Obr. 4: Histogram transformace měřených dat pocházejících z exponenciálního rozdělení pro 10 měření.

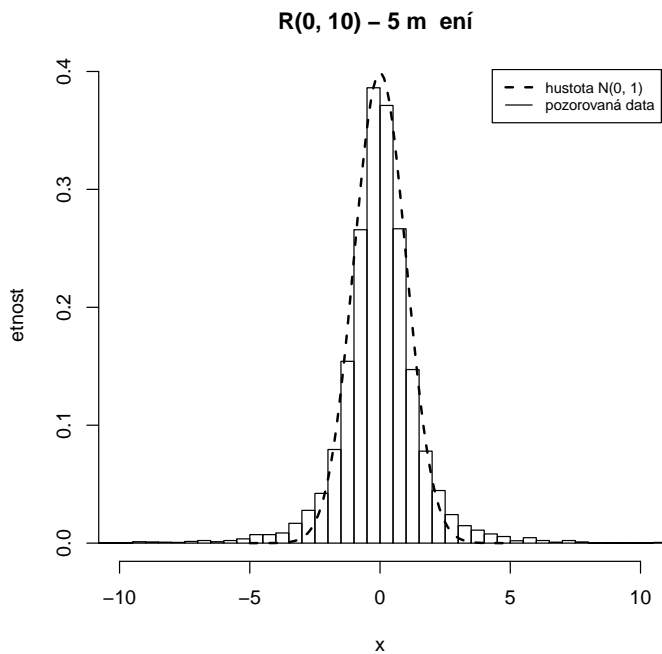


Obr. 5: Histogram transformace měřených dat pocházejících z exponenciálního rozdělení pro 20 měření.

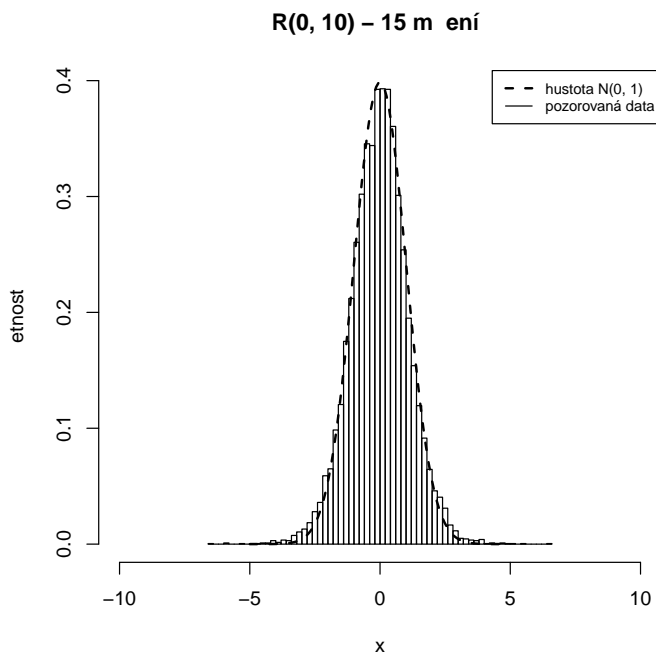


Obr. 6: Histogram transformace měřených dat pocházejících z exponenciálního rozdělení pro 40 měření.

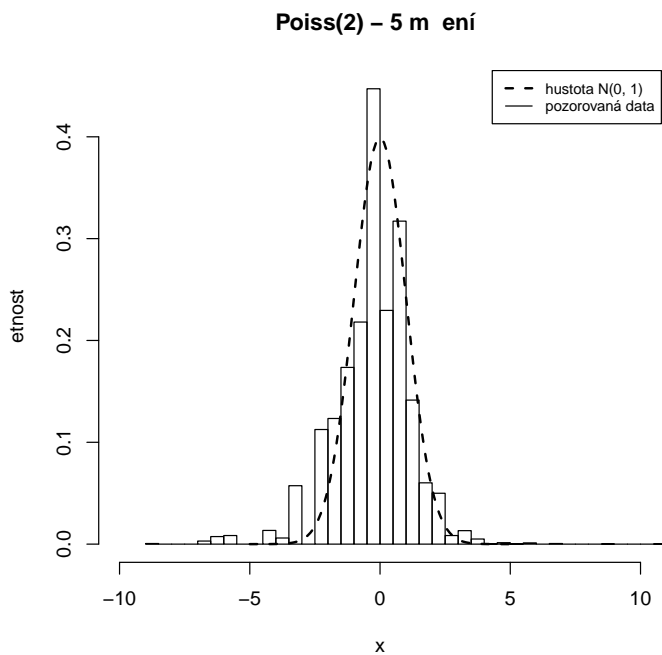




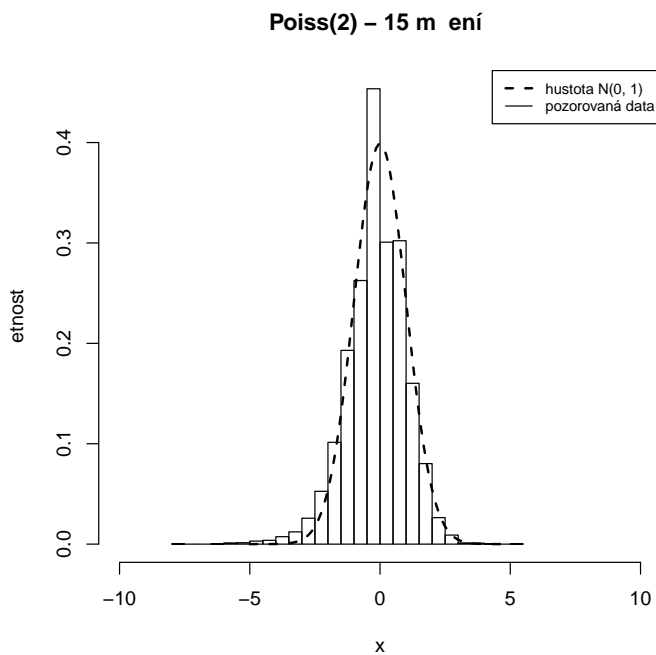
Obr. 7: Histogram transformace měřených dat pocházejících z rovnoměrného rozdělení pro 5 měření.



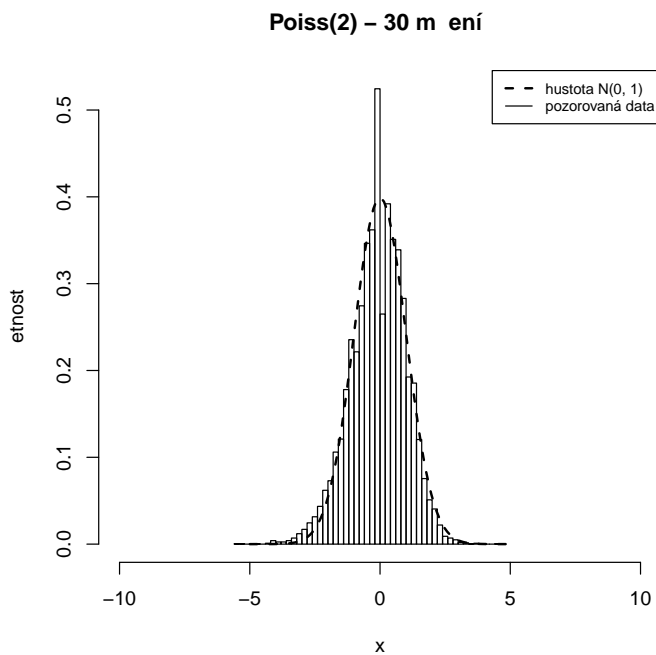
Obr. 8: Histogram transformace měřených dat pocházejících z rovnoměrného rozdělení pro 15 měření.



Obr. 9: Histogram transformace měřených dat pocházejících z Poissonova rozdělení pro 5 měření.



Obr. 10: Histogram transformace měřených dat pocházejících z Poissonova rozdělení pro 15 měření.



Obr. 11: Histogram transformace měřených dat pocházejících z Poissonova rozdělení pro 30 měření.

*Bonus:* Jediné, co pro vyřešení tohoto úkolu potřebujeme, je dosadit do vícerozměrné centrální limitní věty. Nejprve vypočítáme nejistotu určení fyzikální veličiny podle vzorce (29). K tomu budeme potřebovat znát parciální derivace funkce  $f$ , které mají tvar

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= 2x \sin y, \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= x^2 \cos y.\end{aligned}$$

Nyní už můžeme psát, čemu se rovná nejistota určení fyzikální veličiny  $v$

$$S^2 = \begin{pmatrix} 2\bar{x}_n \sin \bar{y}_n & \bar{x}_n^2 \cos \bar{y}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{s_n^{(x)^2}} & \widehat{\text{cov}(x, y)} \\ \widehat{\text{cov}(x, y)} & \widehat{s_n^{(y)^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\bar{x}_n \sin \bar{y}_n \\ \bar{x}_n^2 \cos \bar{y}_n \end{pmatrix},$$

kde používáme standardní značení. Za použití matematického softwaru (výpočetní prostředí  $R$ ) dostáváme, že nejistota určení veličiny  $v$  je

$$S = 6,03.$$

Odhad veličiny  $v$  získáme pouze dosazením výběrových průměrů do naší funkce, tedy

$$\bar{v}_n = \bar{x}_n^2 \sin \bar{y}_n.$$

Za použití matematického softwaru dostáváme výsledek

$$\bar{v}_n = 51,57.$$

Vícerozměrná centrální limitní věta potom říká, že intervalový odhad pro fyzikální veličinu  $v$  bude tvaru

$$\left( \bar{v}_n \pm Su_{1-\frac{\alpha}{2}} \right).$$

Pokud použijeme zkrácený zápis intervalového odhadu a dosadíme naše konkrétní číselné výsledky, dostaneme

$$v = (52 \pm 6).$$

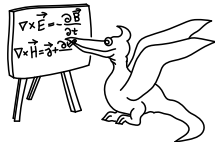
Jelikož máme dostatečně velký počet měření obou fyzikálních veličin (tj. více než 30) bude tento intervalový odhad už velice přesný.

Jen pro zajímavost na tomto místě uvedeme, že pokud bychom předpokládali nezávislá data a použili bychom pouze zákon šíření nejistot, dostali bychom výsledek

$$v = (52 \pm 7).$$

Vidíme, že rozdíl v získaných výsledcích není velký, nicméně je nutné poznamenat, že takovýto postup není správný, neboť zanedbává korelaci v našich měřených datech. V jiných příkladech z praxe už může být chyba, které bychom se takovýmto zanedbáním dopustili, velmi velká.

*Michal Nožička*  
nozicka@fykos.cz



## Seriál: Zpracování dat fyzikálních měření

V tomto díle seriálu se budeme věnovat statistickému testování hypotéz. Tento díl bude výrazným způsobem navazovat na všechny 3 předchozí díly seriálu, proto doporučujeme si nejprve zběžně připomenout obsah minulých dílů. Nyní už k samotnému tématu tohoto dílu seriálu: co to je statistické testování hypotéz?

Jistě se každý mnohokrát setkal se situací, kdy si potřeboval na základě naměřených dat ověřit nějakou domněnku, hypotézu. Jako fyzikální příklad můžeme uvést třeba porovnávání rychlostí zvuku v různých prostředích (chceme například testovat domněnku, že se zvuk v železe šíří rychleji než ve vzduchu) nebo můžeme chtít zjistit, jestli má například namokření povrchu vliv na koeficient tření a podobně.

Naše závěry musí být vždy založeny na naměřených datech. Kdybychom uměli fyzikální veličiny měřit přesně, tak by odpověď na položenou otázku byla velice jednoduchá, stačilo by příslušné fyzikální veličiny změřit a rozhodnout o platnosti hypotézy. V praxi to ovšem tak jednoduše udělat nemůžeme, neboť nikdy nebudeme mít naprosto přesná měření. Jak si jistě z minulých dílů pamatujete, naměřená data v našem matematickém modelu považujeme za realizace náhodné veličiny. Problém tedy spočívá v tom, že teoreticky můžeme naměřit jakákoliv data (i když třeba s velice malou pravděpodobností). Následně je potřeba se rozhodovat na základě takovýchto „náhodných“ dat, což není jednoduchý úkol. Představme si například, že měříme dvě fyzikální veličiny a následně je chceme porovnat (tj. zjistit, která je větší). Naměřená data mohou vypadat například jako data v tabulce 1.

Na první pohled je vidět, že data naměřená ve 2. vzorku mají mírně vyšší hodnoty (alespoň tedy v průměru). Jak ale poznat, že je to opravdu způsobeno vyšší hodnotou měřené fyzikální veličiny a ne pouze tím, že jsme zrovna náhodně naměřili takováto data (vzpomeňte si na to, že naměřenou hodnotu považujeme za náhodnou veličinu, proto při každém měření můžeme naměřit jinou hodnotu)? Tomuto procesu se říká testování hypotéz.

Tab. 1: Hypotetická naměřená data.

1. vzorek	8	7	9	8	8	6	10	7	8	7
2. vzorek	9	8	9	7	10	8	8	7	9	7

### Základní idea testování hypotéz

Nyní už si budeme postup statistického testování hypotéz popisovat matematicky přesněji, než jsme to udělali v úvodu, kde jsme jenom nastílnili obecný problém.

Naše otázka bude vždy formulovaná tak, že budeme mít nějaký výrok, který budeme označovat za hypotézu (například výrok „Namokření podložky nemá žádný vliv na třecí koeficient.“), kterou budeme zkráceně značit  $H$ . K hypotéze si musíme zkonstruovat opačný výrok, který budeme označovat jako alternativu (v našem případě by to byl výrok „Namokření podložky má vliv na třecí koeficient.“), kterou budeme označovat jako  $A$ . Je důležité dát si pozor na to,

aby alternativa byla opravdu opačný výrok k hypotéze <sup>13</sup>. V našem případě by například výrok „Namokření podložky snižuje třecí koeficient“ nemohl být považován za alternativu (může totiž platit ještě něco jiného než hypotéza a alternativa, tj. výrok „Namokření podložky zvyšuje třecí koeficient.“).

Testování hypotéz bude vlastně proces, jak budeme na základě naměřených dat (tedy realizací náhodných veličin) rozhodovat o platnosti hypotézy nebo alternativy. V případě, že budeme mít vyhovujícím způsobem zformulovanou hypotézu a alternativu, budeme postupovat tak, že budeme zamítat nebo nezamítat <sup>14</sup> platnost hypotézy. Musíme se smířit s tím, že nikdy nebudeme schopni s určitostí říci, jestli hypotéza platí nebo ne. Je to způsobeno tím, že považujeme výsledky měření za náhodnou veličinu, a proto můžeme naměřit (i když s velice malou pravděpodobností) v podstatě jakákoliv data. Následně nemáme žádné prostředky na to, jak posoudit, zda tato data jsou skutečně reprezentativní, nebo zda jde jen o velkou anomálii.

Když se budeme rozhodovat, jak při rozhodování o platnosti hypotézy postupovat, musíme si nejprve uvědomit, jaké všechny možnosti mohou nastat a zanalyzovat si, jaké chyby můžeme případně udělat. Na základě této analýzy budeme potom navrhnout postup testování hypotéz.

Jak je z tabulky 2 vidět, můžeme při našem rozhodování udělat 2 druhy chyb, které jsme si označili jako chyba 1. a 2. druhu. Nyní se zaměříme na to, jak těmto chybám čelit a zvolíme takový postup, kdy se budeme s největší pravděpodobností rozhodovat správně.

naše rozhodnutí / skutečný stav	platí hypotéza	platí alternativa
zamítáme hypotézu	chyba 1. druhu	správně
nezamítáme hypotézu	správně	chyba 2. druhu

Tab. 2: Tabulka možných rozhodnutí a chyb

Základní ideou testování hypotéz je zvolit takový postup rozhodování o platnosti hypotézy, aby byla pravděpodobnost chyby 1. druhu rovna nějaké předem zvolené konstantě  $\alpha$  (většinou se v praxi volí hodnota  $\alpha = 0,05$ ) a pravděpodobnost chyby 2. druhu byla co možná nejmenší. Na první pohled se takovýto postup může zdát komplikovaný a neoptimální, ale je to opravdu to nejlepší, co můžeme udělat <sup>15</sup>.

### Základní postup při odvozování testů

Nyní už podrobněji k samotnému postupu rozhodování o (ne)zamítnutí hypotézy. Nejprve zde poskytneme základní postup odvozování statistických testů a následně si odvodíme nejčastěji používané testy.

První věc, kterou musíme při odvozování statistických testů udělat, je vhodně zapsat testovanou hypotézu a alternativu. Vhodným zápisem se rozumí zápis pomocí rovností nebo nerovností určitých parametrů našeho modelu.

Následně musíme zvolit testovou statistiku. Testová statistika bude určitá transformace našich naměřených dat (tím pádem to bude náhodná veličina, neboť naše měřená data považujeme za náhodné veličiny), o které budeme vědět, jak se chová za platnosti hypotézy i alternativy.

<sup>13</sup>Tj. aby se nemohlo stát, že bude ve skutečnosti platit ještě něco úplně jiného, ani že budou platit hypotéza i alternativa zároveň.

<sup>14</sup>Nezamítnout neznamená to samé co potvrdit platnost!

<sup>15</sup>Zejména je nutné si uvědomit, že opravdu nemáme žádný nástroj na přímé ověření, zda hypotéza platí. Jediné, co můžeme dělat, je otestovat tuto hypotézu oproti vhodné alternativě.



Tím se zejména myslí, že budeme v obou případech znát její rozdělení. Testová statistika je ve většině případů pouze jednorozměrná náhodná veličina, tedy použitá transformace z  $n$  naměřených dat určitým způsobem (určitým vzorcem) vyrobí pouze jedno číslo (realizaci testové statistiky).

Posledním krokem bude volba tzv. kritického oboru testu. Když víme, jaké rozdělení by měla mít testová statistika za platnosti hypotézy a za platnosti alternativy, můžeme se rozhodnout, zda realizovaná hodnota testové statistiky odpovídá spíše hypotéze či alternativě. To provedeme tak, že si pro předem zvolenou hladinu testu  $\alpha$  určíme interval, ve kterém bude za platnosti hypotézy s pravděpodobností  $1 - \alpha$  ležet realizovaná hodnota testové statistiky. Takovýto interval samozřejmě bude existovat nekonečně mnoho, my se ale budeme zajímat o takový interval, aby za platnosti alternativy ležela realizovaná hodnota testové statistiky v tomto intervalu s co nejmenší pravděpodobností. Doplněk tohoto intervalu budeme označovat jako kritický obor testu. Konečné rozhodnutí je potom jednoduché, pokud leží realizovaná hodnota testové statistiky v kritickém oboru, zamítneme hypotézu ve prospěch alternativy, pokud realizovaná hodnota testové statistiky neleží v kritickém oboru, nebudeme zamítat testovanou hypotézu.

Každý statistický test je tedy určen čtveřicí hypotéza, alternativa, testová statistika a kritický obor.

Je nutné si uvědomit, že testování hypotéz nedává jednoznačné odpovědi a kvůli náhodnosti měřených dat ani dávat nemůže. Vždy budeme pracovat na určité hladině spolehlivosti  $\alpha$  (obvykle se volí hladina  $\alpha = 0,05$ ) a všechny naše závěry tedy bude nutné interpretovat tak, že je pravděpodobnost  $\alpha$ , že jsme udělali chybu 1. druhu. O volbě hladiny spolehlivosti testů v konkrétních případech budeme mluvit ještě v další části tohoto textu, nyní už si můžeme odvodit několik nejzákladnějších statistických testů.

### Jednovýběrový $t$ -test

Při jednovýběrovém  $t$ -testu předpokládáme, že měřená data mají normální rozdělení (s libovolnými parametry) a že jsou jednotlivá měření na sobě nezávislá. Jednovýběrový  $t$ -test testuje hypotézu, že měřená fyzikální veličina (tedy střední hodnota měřených dat) je rovna nějaké předem zvolené konstantě, oproti alternativně, že střední hodnota měřené náhodné veličiny této konstantě rovna není. Zkráceně se často píše

$$\begin{aligned} H : \mu_x &= \mu_0 , \\ A : \mu_x &\neq \mu_0 , \end{aligned}$$

kde  $\mu_x$  označuje skutečnou hodnotu střední hodnoty měřené náhodné veličiny (tuto hodnotu v praxi téměř nikdy neznáme),  $\mu_0$  označuje hypotetickou hodnotu střední hodnoty měřené náhodné veličiny (tuto hodnotu dopředu známe) a písmena  $H$ ,  $A$  označují hypotézu a alternativu.

Nyní si můžeme podrobně popsat odvození testové statistiky jednovýběrového  $t$ -testu. Vyjdeme z předpokladu, že za platnosti hypotézy bude mít transformace naměřených dat

$$T_n = \sqrt{n} \frac{\bar{x}_n - \mu_0}{S_n} , \quad (31)$$

kde  $\bar{x}_n$ , resp.  $S_n$ , označují výběrový průměr, resp. výběrovou směrodatnou odchylku, Studentovo rozdělení o  $n - 1$  stupních volnosti  $t_{n-1}$ . Tento fakt byl podrobně popsán v druhém dílu seriálu.

Nyní si stačí uvědomit, že za platnosti hypotézy bude pravděpodobnost, že testová statistika  $T_n$  nabyde hodnoty z intervalu

$$(t_{n-1, \frac{\alpha}{2}}, t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}), \quad (32)$$

rovna přesně  $1-\alpha$ . Toto tvrzení vychází přímo z definice kvantilu Studentova rozdělení (podobný koncept už se používal v minulých dílech seriálu). Zároveň bude platit, že za platnosti alternativy bude s největší pravděpodobností hodnota testové statistiky výrazně odlišná od nuly. Toto je způsobeno tím, že  $\bar{x}_n$  bude pro velká  $n$  s největší pravděpodobností velice blízká skutečné střední hodnotě  $\mu_x$  a tím pádem bude čítec zlomku (31) s největší pravděpodobností velice blízký hodnotě

$$\Delta = \mu_x - \mu_0.$$

Jmenovatel zlomku (31) bude pro velká  $n$  s největší pravděpodobností velice blízký skutečné směrodatné odchylce. Tedy hodnota celého zlomku (31) bude pro velká  $n$  s největší pravděpodobností velice blízká hodnotě

$$\frac{\Delta}{\sigma} \neq 0.$$

Po přenásobení této hodnoty číslem  $\sqrt{n}$  potom bude hodnota testové statistiky  $T_n$  buď hodně velká, nebo hodně malá (hodně velké záporné číslo), každopádně bude s největší pravděpodobností výrazně odlišné od nuly. Tento poznatek nás opravňuje ke stanovení kritického oboru  $C$  jako doplňku intervalu (32), tedy jako sjednocení intervalů

$$C = (-\infty, t_{n-1, \frac{\alpha}{2}}) \cup (t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}, \infty).$$

Na závěr k tomuto testu jen uveďme, že pokud nebude splněna podmínka na normální rozdělení měřených dat, bude tento test fungovat asymptoticky (tj. pro velký počet měření, cca víc než 30). Toto vychází z platnosti centrální limitní věty (viz minulý díl seriálu), díky níž bude mít testová statistika  $T_n$  pro velký počet měření přibližně rozdělení  $N(0, 1)$  a kvantily Studentova  $t_{n-1}$  rozdělení a rozdělení  $N(0, 1)$  budou pro takto velké  $n$  prakticky shodné.

Jen drobnou úpravou by se dal tento test upravit na testování dvojice hypotéza a alternativa v následujícím tvaru

$$H : \mu_x \geq \mu_0,$$

$$A : \mu_x < \mu_0.$$

V tomto případě bychom použili stejnou testovou statistiku  $T_n$ , ale volba kritického oboru by se mírně lišila. Podobným způsobem jako v případě klasického  $t$ -testu bude za předpokladu, že platí  $\mu_x > \mu_0$  (tj. za platnosti hypotézy<sup>16</sup>), hodnota testové statistiky pro velká  $n$  velmi velká (neboť hodnota zlomku bude s největší pravděpodobností kladná a po přenásobení členem  $\sqrt{n}$  bude hodnota testové statistiky velmi velká). Naopak za platnosti alternativy (tj. v případě, že platí  $\mu_x < \mu_0$ ) bude hodnota testové statistiky s největší pravděpodobností velké záporné číslo, což lze odvodit podobnou úvahou. Je tedy jasné, že pro velké hodnoty realizace testové statistiky hypotézu zamítat nebudeme a naopak pro velmi malé hodnoty (tj. velké záporné hodnoty) testové statistiky budeme zamítat hypotézu. Co jsou to ale ty „velmi malé hodnoty“? To lze odvodit na základě toho, jak se testová statistika (resp. její rozdělení) chová v hraničním případě, kdy platí  $\mu_x = \mu_0$ . Jak už bylo dříve odvozeno, testová statistika má v tomto případě Studentovo rozdělení o  $n-1$  stupních volnosti  $t_{n-1}$ . Kritický obor tohoto testu tedy musíme

<sup>16</sup>Ve skutečnosti se do platnosti hypotézy ještě vejde případ, kdy  $\mu_x = \mu_0$ , ale to budeme řešit ještě později.

zvolit tak, aby v tomto hraničním případě byla pravděpodobnost, že realizovaná hodnota testové statistiky bude ležet v kritickém oboru, rovna hladině testu  $\alpha$ . Kritický obor tedy bude mít tvar

$$C = (-\infty, t_{n-1, \alpha}),$$

čímž bude tato podmínka splněna a zároveň bude platit, že za platnosti alternativy pro velká  $n$  bude realizovaná hodnota testové statistiky s největší pravděpodobností ležet v kritickém oboru.

Opět platí, že tento test lze použít v případě, kdy měřená data nemají normální rozdělení, ale musíme se smířit s tím, že bude fungovat pouze asymptoticky. Je vhodné ho použít jen v případě, kdy máme k dispozici alespoň 30 měření, jinak mohou jeho výsledky být nepřesné.

Analogickým způsobem by se dal tento test upravit pro testování hypotézy s opačnými znaménky nerovností (použili bychom stejnou testovou statistiku a hypotézu bychom zamítali pouze pro hodnoty realizované testové statistiky větší než  $t_{n-1, 1-\alpha}$ ).

Na závěr jen uvedeme, že v praxi můžeme potkat tzv. pravidlo  $n\sigma$  (za  $n$  dosadíme čísla 1, 2, 3, ...). Toto pravidlo je vlastně jakýmsi ekvivalentním vyjádřením toho, co dělá  $t$ -test, a sice říká, že bychom měli hypotézu zamítat, pokud rozdíl hypotetické hodnoty a hodnoty odhadnuté z naměřených dat (tj. výběrového průměru) bude větší než  $s_n$ , případně  $2s_n, 3s_n \dots$ . Rozmyslete si sami, že rozhodování na základě tohoto pravidla je ekvivalentní  $t$ -testu pro speciální volby  $\alpha = 0,32$ , případně  $\alpha = 0,05$  atd.

### Dvouvýběrový $z$ -test

Dvouvýběrový  $z$ -test se použije v případech, kdy chceme porovnat hodnotu dvou měřených fyzikálních veličin<sup>17</sup>. Předpokládáme, že naměřená data budou mít tedy následující podobu:  $x_1, \dots, x_n$  je měření první veličiny a  $y_1, \dots, y_m$  je měření druhé veličiny. Předpokládáme, že jsou všechna měření na sobě nezávislá a neděláme žádné předpoklady o rozdělení měřených dat<sup>18</sup>.

Na základě těchto měření budeme chtít porovnat skutečné hodnoty těchto dvou fyzikálních veličin (které se rovnají středním hodnotám dvou měřených náhodných veličin, jak bylo ukázáno v předchozích dílech seriálu). Budeme chtít testovat hypotézu

$$H : \mu_x - \mu_y = \vartheta,$$

$$A : \mu_x - \mu_y \neq \vartheta,$$

kde  $\mu_x$  je skutečná střední hodnota 1. měřené náhodné veličiny (tedy hodnota první fyzikální veličiny) a  $\mu_y$  je skutečná hodnota 2. měřené náhodné veličiny (tedy hodnota druhé fyzikální veličiny).  $\vartheta$  představuje předem zvolenou konstantu, jejímž vhodným zvolením můžeme upravovat testovanou hypotézu (nejčastěji volíme  $\vartheta = 0$ , což odpovídá shodným hodnotám měřených fyzikálních veličin).

Nyní potřebujeme odvodit podobu testové statistiky. V minulém dílu seriálu jsme se zabývali vícerozměrnou verzí centrální limitní věty, kterou nyní použijeme (pokud jste zapomněli, co vícerozměrná CLV je, bylo by dobré si to připomenout). Nebudeme zde úplně podrobně

<sup>17</sup>Rozdíl oproti  $t$ -testu je ten, že v tomto případě obě fyzikální veličiny měříme, zatímco v případě  $t$ -testu jsme měřili jen jednu fyzikální veličinu a porovnávali ji s předem známou konstantou.

<sup>18</sup>Ve skutečnosti potřebujeme, aby měřená data měla konečný rozptyl. Tento předpoklad se ovšem v praxi nikdy neověruje a pokládá se za splněný, proto se jím v tomto textu nebudeme dále zabývat.

popisovat dosazení do vícerozměrné centrální věty, pouze uvedeme, že pokud zvolíme funkci  $f$  jako

$$f(x, y) = x - y,$$

dostaneme<sup>19</sup>, že za platnosti hypotézy platí

$$Z_{n,m} = \frac{\bar{x}_n - \bar{y}_m - \vartheta}{\sqrt{\frac{S_{n_x}^2}{n} + \frac{S_{m_y}^2}{m}}} \xrightarrow{D} N(0, 1),$$

kde  $S_{n_x}^2$  označuje výběrový rozptyl měření odpovídající první fyzikální veličině,  $S_{m_y}^2$  označuje výběrový rozptyl měření odpovídající druhé fyzikální veličině a  $\bar{x}_n$ ,  $\bar{y}_m$  označují příslušné výběrové průměry.

Naprostou stejnou úvahou jako v případě  $t$ -testu dojdeme k závěru, že za platnosti alternativy bude testová statistika s největší pravděpodobností nabývat velmi velkých kladných nebo záporných hodnot. Kritický obor  $z$ -testu je tedy optimální zvolit jako

$$C = (-\infty, u_{\frac{\alpha}{2}}) \cup (u_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty),$$

kde  $u$  označuje kvantil normálního rozdělení  $N(0, 1)$ . Takováto volba kritického oboru zajistí, že za platnosti hypotézy bude pravděpodobnost, že realizovaná hodnota testové statistiky bude ležet v kritickém oboru, právě  $\alpha$  (tj. pravděpodobnost chyby 1. druhu bude za platnosti hypotézy rovna  $\alpha$ ). Zároveň bude pro velký počet měření (myšleno pro velké  $m$  i  $n$ ) pravděpodobnost, že za platnosti alternativy padne realizovaná hodnota testové statistiky do kritického oboru, velká. Kritický obor je tedy zvolen optimálně.

Velice jednoduše by šel  $z$ -test upravit pro jednostrannou hypotézu a alternativu, tedy pro testování hypotézy a alternativy ve tvaru

$$\begin{aligned} H &: \mu_x - \mu_y \geq \vartheta, \\ A &: \mu_x - \mu_y < \vartheta. \end{aligned}$$

Stačilo by použít stejný princip jako v případě  $t$ -testu. Pokud by byla znaménka nerovností opačná, také by nebyl problém  $z$ -test příslušně modifikovat.

### $\chi^2$ test rozptylu<sup>20</sup>

$\chi^2$  test rozptylu použijeme ve chvíli, kdy chceme otestovat, že rozptyl měřených dat je roven nějaké předem známé konstantě  $\sigma_0^2$ . Hypotéza a alternativa budou tedy vypadat následovně

$$\begin{aligned} H &: \sigma_x^2 = \sigma_0^2, \\ A &: \sigma_x^2 \neq \sigma_0^2, \end{aligned}$$

kde  $\sigma_x^2$  představuje skutečnou hodnotu rozptylu našich měřených dat.

Pro tento test je důležitý předpoklad toho, že naše měřená data mají normální rozdělení (s libovolnými parametry  $\mu$  a  $\sigma^2$ ). Bez tohoto předpokladu tento test nefunguje<sup>21</sup> (ani asymptoticky) a nemůžeme ho tedy používat.

<sup>19</sup>Pozorný čtenář by si měl toto tvrzení detailně rozmyslet (sám odvodit). Je potřeba použít předpoklad o nezávislosti měřených dat.

<sup>20</sup>Toto řecké písmeno se vyslovuje [chi:], a název testu se obvykle vyslovuje jako  $\chi$  kvadrát test.

<sup>21</sup>Ve většině případů v praxi je předpoklad o normalitě měřených dat oprávněný.

Jako testovou statistiku zvolíme následující transformaci měřených dat

$$CH_n = \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma_0^2},$$

kde  $S_n^2$  je výběrový rozptyl a  $n$  je počet měření. Vzhledem k rozsahu tohoto textu není v našich silách podrobně vysvětlit, proč je zrovna tato volba testové statistiky nevhodnější, ani nezvládneme podrobně odvodit, jaké má za platnosti hypotézy rozdělení. Na tomto místě proto jen uvedeme fakt, že testová statistika  $CH_n$  má za platnosti hypotézy rozdělení  $\chi_{n-1}^2$  (čti  $\chi$  kvadrát o  $n-1$  stupních volnosti).

Rozdělení  $\chi_k^2$  je dalším často se vyskytujícím absolutně spojitým rozdělením. Jeho hustota pravděpodobnosti má příliš komplikovaný tvar na to, abychom ji zde uváděli, také by to nemělo příliš smysl. Pro naše účely se spokojíme s tím, že si v tabulkách můžeme najít kvantily tohoto rozdělení, které budeme značit  $\chi_k^2(\alpha)$ , kde  $\alpha$  značí hladinu ( $\in (0, 1)$ ) a  $k$  značí počet stupňů volnosti rozdělení. Doporučujeme každému čtenáři, aby si v matematickém softwaru vykreslil graf hustoty pravděpodobnosti rozdělení  $\chi_k^2$  pro různé hodnoty stupňů volnosti  $k$ , aby získal představu o tom, jak takováto hustota vypadá a jak se mění v závislosti na počtu stupňů volnosti.

Nyní už k volbě kritického oboru. Lze snadno nahlédnout, že za platnosti hypotézy bude realizovaná hodnota testové statistiky s největší pravděpodobností blízká hodnotě  $n-1$ . To plyne z faktu, že výběrový rozptyl  $S_n^2$  bude s největší pravděpodobností pro velký počet měření nabývat hodnot blízkých skutečnému rozptylu  $\sigma_0^2$ . Zlomek  $\frac{S_n^2}{\sigma_0^2}$  tedy bude s největší pravděpodobností pro velký počet měření nabývat hodnot blízkých 1. Pokud bude platit alternativa, bude testová statistika nabývat buď výrazně menších hodnot než  $n-1$  (v případě, že  $\sigma^2 < \sigma_0^2$ ), nebo výrazně větších hodnot než  $n-1$  (v případě, že  $\sigma^2 > \sigma_0^2$ ). Kritický obor bude proto zvolen následovně<sup>22</sup>

$$C = \left(0, \chi_{n-1}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \cup \left(\chi_{n-1}^2\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right), \infty\right).$$

Takto zvolený kritický obor bude mít opět všechny požadované vlastnosti.

Tento test by se opět dal velice jednoduše upravit pro případ jednostranné hypotézy a alternativy.

### *Několik poznámek ke konstrukci a interpretaci výsledků testů*

Na konec uvedme několik krátkých poznámek.

- Pokud nějaký test zamítá hypotézu, můžeme tvrdit, že hypotéza nejspíš neplatí (z konstrukce testu víme, že pokud proneseme takovýto výrok, budeme se mýlit jen v  $\alpha$  procentech případů). Musíme ale mít stále na paměti možnost, že jsme mohli udělat chybu 1. druhu, tedy nemůžeme nic najisto tvrdit!
- Pokud test nezamítá hypotézu, je interpretace výsledku ještě složitější. Buď to znamená, že hypotéza skutečně platí, nebo to znamená, že sice platí alternativa, ale naměřili jsme data, pro která hypotézu nezamítáme (udělali jsme tedy chybu 2. druhu). S chybou druhého druhu je to poněkud složitější, neboť nemáme pod kontrolou, jaká je pravděpodobnost

<sup>22</sup>Testová statistika může z definice nabývat jen kladných hodnot, proto nemá smysl do kritického oboru zařazovat záporné hodnoty.

chyby 2. druhu za platnosti alternativy. Správnou volbou kritického oboru můžeme zajistit, že za platnosti alternativy bude pravděpodobnost chyby 2. druhu co možná nejmenší a pro velký počet měření bude konvergovat k nule, ale jaká tato pravděpodobnost v konkrétním případě bude, nevíme<sup>23</sup>.

Představme si například, že chceme  $t$ -testem otestovat hypotézu

$$H : \mu_x = 0,$$

$$A : \mu_x \neq 0,$$

ale skutečná hodnota střední hodnoty měřených dat je například  $\mu_x = 0,000\,000\,01$ . Technicky bychom mohli říci, že platí alternativa, ale nemůžeme očekávat, že pokud nebudeme mít opravdu hodně měření, že nám  $t$ -test vyjde ve prospěch alternativy. Proto je nutné být velice opatrný při interpretaci výsledků statistických testů, zejména v případě, že výsledkem je nezamítnutí hypotézy.

- Postavení hypotézy a alternativy není rovnocenné. Pokud je to možné, je vždy lepší volit za alternativu to tvrzení, které bychom chtěli potvrdit. Jak je psáno výše, kde je rozebírána interpretace výsledků testů, v případě zamítnutí hypotézy potom máme větší právo tvrdit, že jsme opravdu potvrdili správnost našeho tvrzení (neboť jsme přesvědčivě vyvrátili opačné tvrzení). Je nutné poznamenat, že vzhledem ke konstrukci testů nelze takovoto možností vždy dosáhnout, potom se musíme spokojit s opačnou volbou hypotézy a alternativy.
- Volba hladiny testu  $\alpha$  je velice důležitá a je nutné ji provést před provedením každého testu. Její volba závisí na tom, jak chceme mít vyváženou pravděpodobnost chyby 1. a 2. druhu. Hladina spolehlivosti testu  $\alpha$  je přímo rovna pravděpodobnosti chyby 1. druhu. Pokud hladinu testu zvolíme malou, budeme mít malou pravděpodobnost chyby 1. druhu, ale naopak větší pravděpodobnost chyby 2. druhu. To souvisí s tím, že pro malé hodnoty  $\alpha$  bude kritický obor každého testu menší než pro velké hodnoty  $\alpha$  (rozmyslete si sami). Obvykle se volí hladina spolehlivosti rovna  $\alpha = 0,05$ . Pokud děláme nějaký důležitý experiment, kde opravdu záleží na správnosti závěrů, snažíme se pravděpodobnost chyby 1. druhu co nejvíce omezit, volíme tedy menší hladinu spolehlivosti (typicky  $\alpha = 0,01$  nebo  $\alpha = 0,005$ ). Při řešení seriálové úlohy pracujte s hladinou spolehlivosti  $\alpha = 0,05$ .

### Zamítání hypotézy na základě $p$ -hodnoty

Doteď jsme rozhodovali o zamítání hypotézy na základě realizované hodnoty testové statistiky a kritického oboru (pokud realizovaná hodnota testové statistiky ležela v kritickém oboru, zamítali jsme hypotézu). Tento postup je velice intuitivní a snadno představitelný, ale jeho nevýhoda je, že máme jen malou informaci o tom, zda jsme hypotézu (ne)zamítali s rezervou, nebo zda se pohybujeme na hranici mezi zamítáním a nezamítáním hypotézy. Proto se pro každý statistický test a konkrétní naměřená data definuje tzv.  $p$ -hodnota, která slouží jako alternaiva k rozhodování o (ne)zamítání hypotézy.  $p$ -hodnotu testu pro konkrétní naměřená data definujeme jako takové  $p$ , že realizovaná hodnota testové statistiky leží právě na hranici kritického oboru pro hladinu  $p$ .  $p$ -hodnotu lze také interpretovat jako pravděpodobnost, že

<sup>23</sup>Ve skutečnosti ve většině případů je možné pravděpodobnost chyby 2. druhu vyčíslit, ale je to příliš náročné na to, abychom se tím podrobněji zaobírali.

bychom za platnosti hypotézy naměřili data, která protiřečí hypotéze ještě více než ta data, která máme naměřená. Rozmyslete si sami, že definice  $p$ -hodnoty a její interpretace dávají smysl.

Rozhodování o zamítnutí hypotézy na základě  $p$ -hodnoty je jednoduché, stačí porovnat  $p$ -hodnotu se zvolenou hladinou testu  $\alpha$ . Pokud je  $p$ -hodnota menší než hladina testu  $\alpha$ , zamítáme hypotézu, neboť to znamená, že jsme naměřili (za platnosti hypotézy) opravdu extrémní data.

Většina moderních matematických programů (včetně  $R$ , které používáme) preferuje rozhodování na základě  $p$ -hodnoty, kterou poskytuje jako výstup. Naopak kritický obor většinou nebývá ve standardním výstupu matematických programů uváděn.

### *Další statistické testy*

V tomto díle seriálu jsme uvedli jen několik základních typů statistických testů, ve skutečnosti jich existuje mnohem více. Pokud během fyzikálních experimentů narazíte na nějakou hypotézu, kterou potřebujete pomocí naměřených dat otestovat, je velice pravděpodobné, že na to bude existovat speciální statistický test. Stačí si ho vyhledat na internetu. Pro použití statistického testu v praxi ani není nutné znát přesnou podobu testové statistiky, kritického oboru ani přesně vědět, jak tento test funguje, neboť tyto věci za nás většinou spočte matematický software. Jediné, čemu je opravdu potřeba rozumět, je hlavní idea testování hypotéz, správně pochopit předpoklady tohoto testu a umět interpretovat výsledky (zejména na základě  $p$ -hodnoty). Pro informaci zde ještě uvedeme několik statistických testů včetně jejich předpokladů. Pokud byste některý chtěli v praxi použít, stačí si ohlídat splnění všech jeho předpokladů a umět interpretovat jeho výsledky na základě  $p$ -hodnoty.

#### $\chi^2$ test dobré shody rozdělení

Tento test se použije v případě, že chceme otestovat, zda měřená data pocházejí z určitého diskrétního rozdělení se známými parametry (je důležité, aby toto rozdělení bylo diskrétní, v případě spojitého rozdělení by se použil Kolmogorovův-Smirnovův test, který popíšeme později). Předpokládáme, že máme nějaké známé diskrétní rozdělení  $R$ . Pomocí  $\chi^2$  testu dobré shody rozdělení můžeme otestovat následující hypotézu a alternativu

$H$  : měřená data mají rozdělení  $R$ ,

$A$  : měřená data nemají rozdělení  $R$ .

Pokud bychom neznali všechny parametry rozdělení  $R$  (například bychom věděli, že se jedná o Poissonovo rozdělení, ale neznali bychom parametr  $\lambda$ ), můžeme si tyto neznámé parametry odhadnout z naměřených dat a použít je v našem testu, který bude fungovat i po této drobné modifikaci.

#### *Kolmogorovův-Smirnovův test*

Tento test se použije v případě, že chceme otestovat, zda měřená data pocházejí z určitého spojitého rozdělení se známými parametry (je důležité, aby toto rozdělení bylo spojité, v opačném případě musíme použít  $\chi^2$  test dobré shody rozdělení). Předpokládáme, že máme nějaké zná-

mé spojité rozdělení  $S$ . Pomocí Kolmogorovova-Smirnovova testu můžeme otestovat následující hypotézu a alternativu

$$\begin{aligned}H &: \text{měřená data mají rozdělení } S, \\A &: \text{měřená data nemají rozdělení } S.\end{aligned}$$

Opět platí, že pokud neznáme všechny parametry rozdělení  $S$ , můžeme je odhadnout z naměřených dat a tento test bude stále fungovat.

#### *Dvouvýběrový Kolmogorovův-Smirnovův test*

Tento test předpokládá, že máme 2 nezávislé sady měření, které obě pocházejí z nějakých spojitých rozdělení, a chceme otestovat hypotézu, že obě tyto sady měření mají stejné rozdělení. Pokud označíme teoretické rozdělení první sady měřených dat jako  $X$  a teoretické rozdělení druhé sady dat jako  $Y$ , potom dvouvýběrový Kolmogorovův-Smirnovův test testuje následující hypotézu a alternativu

$$\begin{aligned}H &: X \text{ a } Y \text{ mají stejná rozdělení,} \\A &: X \text{ a } Y \text{ nemají stejná rozdělení.}\end{aligned}$$

#### *Test korelačního koeficientu*

Tento test použijeme ve chvíli, kdy máme 2 nezávislé sady měření, které mají obě normální rozdělení, a chceme otestovat, zda korelace mezi nimi je nulová nebo nikoliv. Pokud označíme jako  $X$  teoretické rozdělení první sady měření, jako  $Y$  teoretické rozdělení druhé sady měření a jako  $\rho$  označíme jejich korelační koeficient, tedy

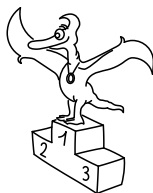
$$\rho = \text{corr}(X, Y),$$

potom test korelačního koeficientu testuje následující hypotézu oproti alternativě

$$\begin{aligned}H &: \rho = 0, \\A &: \rho \neq 0.\end{aligned}$$

Jen poznamenejme, že pro tento test je opravdu podstatný předpoklad o normálním rozdělení a nezávislosti měřených dat.





## Pořadí řešitelů po III. sérii



Kompletní výsledky najdete na <http://fykos.cz>.

## Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	III	%	Σ
		6	6	7	7	7	8	12	10	63	100	185
1. <i>Martin Vavřík</i>	G, Šumperk	6	6	7	7	1	8	12	11	<b>58</b>	87	<b>161</b>
2. <i>Václav Zvoníček</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	6	6	7	7	4	5	7	8	<b>50</b>	85	<b>157</b>
3. <i>Matěj Prokop</i>	G Dašická, Pardubice	6	6	7	2	4	7	11	12	<b>55</b>	81	<b>149</b>
4. <i>Jakub Jobus</i>	G PdC, Piešťany	6	6	7	3	3	7	5	8	<b>45</b>	78	<b>136</b>
5. <i>Radka Křížová</i>	G J. Heyrovského, Praha	6	4	5	7	4	8	8	2	<b>44</b>	72	<b>134</b>
6. <i>Martin Schmied</i>	G Jihlava	6	4	5	7	1	7	6	9	<b>45</b>	70	<b>125</b>
7. <i>Viktor Materna</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	6	6	–	–	–	7	8	–	<b>31</b>	71	<b>100</b>
8. <i>Jakub Pravda</i>	ŠpMNDaG, Bratislava	6	4	4	3	–	6	5	–	<b>28</b>	61	<b>87</b>
9. <i>Miroslav Macko</i>	ŠpMNDaG, Bratislava	6	6	4	2	–	7	4	–	<b>29</b>	71	<b>86</b>
10. <i>Eva Vochozková</i>	Biskupské G, Brno	6	6	–	4	1	4	–	–	<b>21</b>	67	<b>78</b>
11. <i>Šimon Brázda</i>	G, Hlinsko	6	6	4	3	–	1	4	–	<b>24</b>	52	<b>70</b>
12. <i>Matěj Krátký</i>	PORG, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	82	<b>67</b>
13. <i>Jiří Zelenka</i>	G Z. Wintra, Rakovník	6	4	6	3	1	7	4	1	<b>32</b>	55	<b>60</b>
14. <i>Petr Doubravský</i>	Akademické G, Praha	2	6	–	–	–	5	–	–	<b>15</b>	67	<b>58</b>
15. <i>Richard Hamerlik</i>	ŠpMNDaG, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	51	<b>56</b>
16. <i>Kateřina Barotová</i>	G, Olomouc-Hejčín	4	6	5	–	1	–	–	–	<b>16</b>	73	<b>49</b>
17. <i>Filip Novotný</i>	G Jihlava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	63	<b>48</b>
18. <i>Pavla Rudolfová</i>	G, Vídeňská, Brno	6	6	–	4	–	7	–	–	<b>23</b>	68	<b>45</b>
19. <i>Adam Vavrečka</i>	G P. Bezruč, Frýdek-Místek	6	–	–	3	–	–	–	–	<b>9</b>	71	<b>37</b>
20. <i>Filip Wagner</i>	G Tišnov	–	–	–	1	–	–	–	–	<b>1</b>	61	<b>34</b>
21. <i>Jan Vondra</i>	G Týn nad Vltavou	6	–	–	–	–	5	2	–	<b>13</b>	39	<b>28</b>
22. <i>Tímea Szöllősová</i>	G Grösslingova, Bratislava	6	6	–	2	–	1	4	0	<b>19</b>	44	<b>27</b>
23. <i>Viktor Vařeka</i>	G P. Bezruč, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	–	–	76	<b>25</b>
24.–25. <i>Marek Čermoch</i>	G F. Palackého, Val. Mez.	6	4	5	–	–	–	–	–	<b>15</b>	84	<b>21</b>
24.–25. <i>Lucia Gintnerová</i>	G Sv. Františka, Žilina	–	–	–	3	–	–	–	–	<b>3</b>	84	<b>21</b>
26. <i>Lukáš Hronek</i>	ZŠ a MŠ Jana Husa Písek	6	–	–	7	–	–	–	–	<b>13</b>	76	<b>19</b>
27. <i>Lucia Krajčoviechová</i>	G Jura Hronca, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	77	<b>17</b>
28. <i>Ján Šrejbr</i>	G J. Jungmanna, Litoměřice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	42	<b>16</b>
29. <i>Vojtěch Ježek</i>	G Legionářů, Příbram	–	–	–	–	–	–	–	–	–	117	<b>14</b>
30.–31. <i>Soňa Curylová</i>	G F. Palackého, Val. Mez.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	<b>12</b>
30.–31. <i>Milan Tichavský</i>	Slezské G, Opava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	<b>12</b>
32.–33. <i>Anna Hollmannová</i>	SG Dr. Randy, Jablonec n. N.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	<b>10</b>
32.–33. <i>Bohumír Žůrek</i>	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	17	<b>10</b>
34. <i>Tomáš Salavec</i>	BG B. Balbína, Hradec Králové	–	–	–	–	–	–	–	–	–	73	<b>8</b>

## Kategorie druhých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	III	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	6	6	7	7	7	8	12	10	63	100	185
1. <i>Kateřina Rosická</i>	G J. Ortena, Kutná Hora	6	6	7	6	4	0	14	10	<b>53</b>	91	<b>168</b>
2. <i>Ladislav Trnka</i>	G, Havlíčkův Brod	6	6	7	4	4	4	11	11	<b>53</b>	84	<b>151</b>
3. <i>Josef Minařík</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	6	4	6	7	4	6	8	8	<b>49</b>	79	<b>147</b>
4. <i>Jindřich Dušek</i>	G Jana Keplera, Praha	6	4	7	7	–	7	10	9	<b>50</b>	84	<b>140</b>
5. <i>Lucie Kundratová</i>	G, nám. TGM, Zlín	6	6	6	3	2	8	9	5	<b>45</b>	77	<b>136</b>
6. <i>Jakub Růžička</i>	G, Nymburk	4	6	–	–	–	–	7	8	<b>25</b>	79	<b>114</b>
7. <i>Ivan Hudák</i>	ESS, Lip. Mikuláš	6	4	4	7	3	7	–	–	<b>31</b>	81	<b>112</b>
8. <i>Jiří Blaha</i>	G, Uherské Hradiště	6	6	4	7	–	–	–	–	<b>23</b>	82	<b>95</b>
9. <i>Kristian Matušík</i>	G, Benešov	6	6	6	2	1	1	4	–	<b>26</b>	61	<b>87</b>
10. <i>Tereza Pavlišová</i>	G, Olomouc-Hejčín	6	–	–	–	–	8	–	–	<b>14</b>	63	<b>59</b>
11. <i>Karel Smolka</i>	Slezské G, Opava	4	–	6	–	–	–	2	–	<b>12</b>	53	<b>54</b>
12. <i>Karel Balej</i>	G a SOŠ, Rokycany	6	6	7	7	–	–	–	–	<b>26</b>	94	<b>47</b>
13. <i>Marie Grunová</i>	G Moravský Krumlov	–	–	–	–	–	6	–	–	<b>6</b>	53	<b>44</b>
14. <i>Domínik Beňo</i>	G L. Svobodu, Humenné	6	6	–	7	–	7	–	–	<b>26</b>	91	<b>42</b>
15. <i>Kateřina Charvátová</i>	G B. Němcové, HK	6	6	4	–	–	–	–	–	<b>16</b>	79	<b>34</b>
16. <i>Veronika Vohníková</i>	Nový PORG, Praha	4	6	–	–	–	–	–	–	<b>10</b>	79	<b>33</b>
17. <i>Jakub Rajnštajn</i>	G F. M. Pelcla, Rychnov n. Kn.	4	–	–	–	–	–	–	–	<b>4</b>	69	<b>25</b>
18. <i>Jakub Zemek</i>	G, Uherské Hradiště	6	4	–	–	–	–	–	–	<b>10</b>	72	<b>23</b>
19.–21. <i>Martin Dinh</i>	G, Třinec	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	<b>17</b>
19.–21. <i>Daniel Martyněk</i>	G, Třinec	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	<b>17</b>
19.–21. <i>Štěpán Stryja</i>	G, Třinec	–	–	–	–	–	–	–	–	–	68	<b>17</b>
22. <i>Šimon Kondrk</i>	SPŠ Dubnica nad Váhom	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	<b>16</b>
23.–25. <i>Andrea Bínová</i>	G, Česká Lípa	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	<b>12</b>
23.–25. <i>Josef Sabol</i>	G Chotěboř	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	<b>12</b>
23.–25. <i>Marie Vaňáková</i>	G Botičská, Praha	–	–	4	–	–	–	2	–	<b>6</b>	39	<b>12</b>
26.–27. <i>Máté Eke</i>	Gymnázium, sSOŠ a jazyková škola	–	–	–	–	–	–	–	–	–	58	<b>11</b>
26.–27. <i>Michal Jireš</i>	G F. M. Pelcla, Rychnov n. Kn.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	85	<b>11</b>
28. <i>Klára Nechanická</i>	G Neumannova, Žďár n. S.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	83	<b>10</b>
29. <i>Václav Bulín</i>	G, Plasy	–	–	–	–	–	–	–	–	–	82	<b>9</b>

## Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	III	%	Σ
<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	MFF	UK									
		3	3	7	7	7	8	12	10	57	100	167
1. Viktor Rosman	G, Pelhřimov	3	3	7	7	5	7	11	6	49	86	144
2. Martin Okánik	G Tajovského, B. Bystrica	3	3	7	4	4	8	7	5	41	86	136
3. Tomáš Dulava	Matiční G, Ostrava	3	2	7	4	1	2	6	10	35	76	127
4. David Košťák	G, Josefská, Praha	1	3	–	4	4	8	5	8	33	71	114
5. Dominik Starý	G, Benešov	3	3	7	3	2	–	–	11	29	78	96
6. Vít Beran	Masarykovo G, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	94	92
7. Ondřej Knopp	G Christiana Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	95	82
8. Zuzana Richterová	G, Pelhřimov	1	2	4	2	1	2	7	4	23	49	81
9. Katarína Častulíková	1. súkromné G v Bratislave	3	2	–	4	–	6	8	–	23	61	75
10. David Dvořák	ZŠ a G, Konice	1	2	–	–	–	–	4	–	7	60	47
11. John Richard Ritter	G Masarykovo nám., Třebíč	–	–	–	–	–	–	–	–	–	92	33
12. Jiří Löffelman	G, Litoměřická, Praha	3	3	–	2	2	–	–	–	10	70	31
13.–14. Ondřej Buček	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	3	–	–	–	–	–	–	–	3	55	22
13.–14. Martina Kopecká	G J. Barranda, Beroun	3	–	7	–	–	–	–	–	10	96	22
15.–16. Daniela Hrbáčová	Wichterlovo G, Ostrava	3	2	–	1	–	3	–	–	9	38	21
15.–16. Pavla Trembulaková	G Jírovcova, České Budějovice	–	3	–	–	0	5	–	–	8	43	21
17. Markéta Jirmanová	BG B. Balbína, Hradec Králové	3	–	–	1	–	–	–	–	4	59	20
18. Filip Keller	G P. de Coubertina, Tábor	–	–	–	–	–	–	–	–	–	72	18
19.–21. Jaroslav Paidar	SPŠ Masarykova, Liberec	–	–	–	–	–	–	–	–	–	52	17
19.–21. Matej Parada	G Jura Hronca, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	74	17
19.–21. Ján Pavlech	G sv. Jozefa Nové Mesto n. V.	3	2	–	–	–	–	–	–	5	71	17
22. Katarína Žatková	Evanjelické G JAK, Košice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	62	16
23.–24. Veronika Funková	G L. Jaroše, Holešov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	63	15
23.–24. Andrej Holmes	G Ružomberok	1	–	–	–	–	–	–	–	1	39	15
25.–26. Dominik Ivan	ŠG PinkHarmony, Zvolen	–	–	–	–	–	–	–	–	–	24	12
25.–26. Ondřej Komora	G Mikulášské n. 23, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	71	12
27.–28. Kristýna Davidková	Biskupské G, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	–	85	11
27.–28. Jakub Kovářik	G, Hodonín	–	–	–	–	6	–	–	–	6	79	11
29. Ondřej Bílek	SPŠ, Vlašim	–	3	–	–	–	–	–	–	3	100	9
30.–32. Tomáš Hudcovic	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	117	7
30.–32. Štěpán Kastowský	G, Hlučín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	64	7
30.–32. Petr Semerák	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	117	7
33.–37. Miroslav Hrabal	G, Olomouc-Hejčín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	6
33.–37. Štěpán Kohl	Klasické a španělské G, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	6
33.–37. David Němec	G, Tanvald	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	6
33.–37. Tereza Poláková	G, Budějovická, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	27	6
33.–37. Martin Repčík	G, Olomouc-Hejčín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	6
38.–40. Ondřej Hajnýš	G, Dvůr Králové n. L.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	3
38.–40. Jan Lindauer	První české G, Karlovy Vary	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	3
38.–40. Aneta Němcová	G, Boskovice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	3
41. Filip Geib	G M. M. Hodžu, Liptovský Mikuláš	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	2

## Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	III	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	3	3	7	7	7	8	12	10	57	100	167
1. Jáchym Bárták	G, Havlíčkův Brod	3	2	7	7	7	8	11	12	57	98	164
2. Štěpán Stenclák	G, Třinec	3	3	7	4	–	8	10	12	47	100	160
3. Daniela Pittnerová	G L. Svobodu, Humenné	3	3	7	7	7	6	11	12	56	91	152
4. Klára Ševčíková	G, Uherské Hradiště	3	3	7	7	4	8	–	10	42	83	119
5. Jan Střeleček	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	3	3	6	7	1	8	7	7	42	65	108
6. Matěj Mezera	G, Havlíčkův Brod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	85	91
7. Filip Novotný	G Masarykovo nám., Kroměříž	3	2	–	7	–	5	7	–	24	75	77
8. Lucie Hronová	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	3	2	5	1	2	1	3	–	17	46	68
9. Karel Jókai	G, Špitálská, Praha	–	–	–	4	–	8	–	–	12	66	51
10. Přemysl Štastný	G, Žamberk	–	–	–	–	–	–	–	–	–	85	46
11. Alžběta Andrášková	G, Olomouc-Hejčín	3	2	–	3	–	8	–	–	16	76	45
12. Jonáš Fuksa	PORG, Praha	3	3	7	5	3	–	–	–	21	82	42
13. Samuel Šipikal	G Milana Ráfusa	–	–	–	–	–	–	–	–	–	53	40
14. Matěj Rzehulka	Wichterlovo G, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	63	33
15. Branislav Belko	G Milana Ráfusa	–	–	–	–	–	–	–	–	–	68	28
16. Petr Šimůnek	G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice	–	3	–	–	–	–	–	–	3	82	27
17. Martin Vejvoda	G Dobruška	3	3	–	4	–	3	–	–	13	63	25
18. Veronika Gintnerová	G Sv. Františka, Žilina	–	–	–	3	–	–	–	–	3	68	19
19. František Zach	G, Litomyšl	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	18
20. Kateřina Stodolová	G Dašická, Pardubice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	87	13
21. Petra Štefaníková	G O. Havlové, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	91	10
22. Václav Mikeska	G F. Palackého, Val. Mez.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	6
23. Tomáš Tesař	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	27	4


**FYKOS**

UK, Matematicko-fyzikální fakulta

Ústav teoretické fyziky

V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

www: <http://fykos.cz>e-mail: [fykos@fykos.cz](mailto:fykos@fykos.cz)FYKOS je také na Facebooku <http://www.facebook.com/Fykos>

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.  
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.