Úloha II.P ... efektivní (ná)stroj

9 bodů; (chybí statistiky)

Palné zbraně jsou vlastně takovými tepelnými stroji. Spočítejte jaká je účinnost nějaké pušky nebo pistole. (Jde o využití energie střeliva pro pohyb kulky.)

Michal původy svých nápadů raději nesděluje.

Nejprve si rozeberme, jak vlastně palné zbraně fungují. Ústředními prvky jsou jednak projektil, tj. těleso, které je „vystřeleno“ a získá tak kinetickou energii, a jednak střelivina, typicky střelný prach. Spouštěcím mechanismem dojde k chemickým, případně fázovým změnám střeliviny, následkem čehož vznikne tlakový gradient, který projektil urychlí.[1] Toto se zpravidla děje v hlavni (typicky válcové polouzavřené trubici), aby bylo co nejvíce energie předáno projektilu a nikoli bez užitku do okolí. Střelivina se nachází za projektilem, a to jak volně (např. raně novověká děla), tak v pouzdře (náboj). Nyní se podívejme na podobnosti a rozdíly palné zbraně a standardního tepelného stroje. Takový stroj pracuje tak, že mu je ohřívačem dodáno teplo, stroj se (za pomoci chladiče) vrátí do stavu před započetím procesu a mezitím vykoná práci (typicky urychluje nějaké těleso). Účinnost tepelného stroje se pak počítá jako podíl vykonané práce vůči teplu dodanému ohřívačem.

Naše situace je v lecčem jiná. V první řadě je dobré smířit se s faktem, že výstřel z palné zbraně nemá charakter cyklického děje. Snaha o převedení systému do stejného stavu jako před střelbou vede k nutnosti dodávat do zbraně náboje a potom by součástí našeho cyklu byla i výroba střeliviny a získávání materiálů, což radikálně odklání naši úlohu od problematiky střelby. Nekruhový charakter našeho děje nám však nebrání pro tento proces definovat účinnost. Nejprve uvažme, jestli účinnost ze zadání dává smysl. Kdybychom za stroj považovali zbraň i se střelivem, potom vstupní energie zvenčí je energie úderníku či zápalníku či obdobného spouštěcího mechanismu. Nicméně množství této energie není typicky zajímavý parametr.[2] Další možností je považovat za vstupní parametr pouze teplo reakce propelentu. Toto zavedení je ale poměrně nepřirozené, protože kdybychom uvažovali dva druhy střeliviny o stejných hustotách, objemech spalin a spalných entalpiích, ale různých výhřevnostech, tak se tyto dvě látky pro naše potřeby budou chovat úplně stejně, ale podle naší definice bychom dostávali různé účinnosti. Proto zavedení ze zadání vypadá jako poměrně dobrá volba. Úsťová kinetická energie projektilu je poměrně jasný kandidát na požadované měřítko výstupní škály. Úlohu tedy máme dobře zadanou, můžeme se pustit do řešení.

Nejprve analyzujme velice zjednodušený případ. Uvažujme hlaveň o délce l a průřezu S, dále projektil o hmotnosti m. Střelivina vyprodukuje plyn o vnitřní energii E_0 okamžitě po zažehnutí v objemu za projektilem, který má velikost $V_0 = Sl_0$. Parametru l_0 říkejme třeba efektivní délka střeliviny (jednalo by se o výšku válce), přičemž $l \gg l_0$. Také bude dobré vzít v potaz atmosferický tlak p_a. Systém považujme za dokonale izolovaný (tj. skrz projektil ani stěnu hlavně neprochází ani částice, ani teplo), projektil hlaveň dokonale ucpává, ale zároveň je tření zanedbatelné. Spaliny střeliva budeme považovat za chemicky stejnorodý ideální plyn a následnou expanzi plynu budeme považovat za rovnovážný adiabatický děj. Pro ten platí

$$pV^{\varkappa} = \mathrm{konst.}\,, \tag{1}$$

[1] Definice palné zbraně v českém právu: Palná zbraň = střelná zbraň, u které je funkce odvozena od okamžitého uvolnění chemické energie.

[2] Dokud ke spuštění nedojde omylem, ale když se postřelíte do zadnice, energetická efektivnost střelby není Váš největší problém…

kde p a V jsou tlak a objem spalin v daný okamžik a $\varkappa$ je Poissonova konstanta, jejíž hodnota závisí na symetrii molekul spalin. Ideální plyn také pochopitelně musí splňovat stavovou rovnici ideálního plynu, tedy

$$pV = nRT\,, \tag{2}$$

kde n je látkové množství spalin, R je molární plynová konstanta a T je termodynamická teplota spalin. Pro vnitřní energii U ideálního plynu platí

$$U = \frac{1}{\varkappa - 1} nRT = \frac{1}{\varkappa - 1} pV. \tag{3}$$

Vzhledem ke konzervativní povaze naší soustavy bude naším cílem vypočítat energii projektilu v ústí hlavně z energetické bilance. Ta má tvar

$$U_0 = U_1 + E_\mathrm{k} + W_\mathrm{a}\,,$$

kde U_0 je vnitřní energie spalin okamžitě po vznícení; pravá strana rovnice udává energetickou bilanci ve chvíli, kdy projektil opouští hlaveň. Konkrétně U_1 je vnitřní energie spalin v tuto chvíli, E_k je kinetická energie projektilu a člen W_a je práce vykonaná na okolním vzduchu. Při pohybu projektil stlačuje atmosféru a stlačí ji o objem $S(l - l_0)$ a atmosféra si po celou dobu zachovává svůj tlak p_a, platí tedy

$$W_\mathrm{a} = S(l - l_0) p_\mathrm{a}\,.$$

Nechť p_0 je tlak spalin bezprostředně po vznícení. Potom podle (1), (2) a (3) platí

$$U_1 = \frac{1}{\varkappa - 1} p_1 V_1 = \frac{1}{\varkappa - 1} p_0 V_0^{\varkappa} V_1^{1-\varkappa} = \frac{1}{\varkappa - 1} p_0 V_0 \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\varkappa - 1} = U_0 \left(\frac{l_0}{l}\right)^{\varkappa - 1}\,,$$

kde V_1 je objem spalin v momentě opouštění hlavně projektilem a p_1 je tlak spalin v tentýž okamžik. Potom pro kinetickou energii projektilu dostáváme

$$E_k = U_0 \left(1 - \left(\frac{l_0}{l}\right)^{\varkappa - 1}\right) + S l_0 p_\mathrm{a} - S l p_\mathrm{a}$$

a konečně pro účinnost η získáváme[3]

$$\eta = \frac{E_k}{U_0} = 1 - \left(\frac{l_0}{l}\right)^{\varkappa - 1} + \frac{S}{U_0} p_\mathrm{a} l_0 - \frac{S}{U_0} p_\mathrm{a} l\,. \tag{4}$$

Rozeberme si podstatné vlastnosti našeho výsledku. Budeme přitom mít na paměti, že hodnoty $\varkappa$ jsou vždy větší než 1. Vidíme, že pro $l \to l_0$ platí $\eta \to 0$, což je v souladu s naším očekáváním – pokud je délka hlavně, podél které projektil zrychluje, nulová, projektil nezrychlí. Dále nechť máme dané všechny parametry kromě l. Potom existuje taková hodnota l, pro kterou je η maximální, neboli pro které vyletí projektil z hlavně s největší rychlostí. Podíváme-li se na problém z hlediska kinematiky projektilu, měla by to být právě taková hodnota l (dále jí říkejme l_2), aby tlak spalin p_2 ve chvíli, kdy projektil dorazí k ústí, byl roven atmosferickému tlaku, tedy $p_2 = p_\mathrm{a}$ (nyní je vhodná chvíle připomenout, že neuvažujeme tření). Ověříme si to následujícím výpočtem.

[3] Obecnější přístup by vyžadoval psát místo U_0 jisté E_0, které by vyjadřovalo součet všech vstupních energií.

Hodnota η je pro $l = l_0$ nulová, naopak pro velká l klesá pode všechny meze. Také očekáváme, že na netriviálním intervalu l bude η nabývat kladných hodnot mezi 0 a 1, funkce $\eta(l)$ tedy musí mít maximum, jelikož je spojitá pro $l \in \mathbb{R}^+$. Položme tedy derivaci rovnou 0:

$$\left.\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}l}\right|_{l=l_2} = (\varkappa - 1) l_0^{\varkappa-1} l_2^{-\varkappa} - \frac{S}{U_0} p_\mathrm{a} = 0\,,$$

odkud získáme

$$l_2 = l_0 \left(\frac{V_0}{(\varkappa-1)U_0} p_\mathrm{a}\right)^{-\frac{1}{\varkappa}}$$

a dosazením do (1) a rozložení $U_0 = \frac{1}{\varkappa-1} p_0 V_0$ po úpravách získáváme

$$p_2 = p_0 \left(\frac{V_0}{V_2}\right)^{\varkappa} = p_0 \left(\frac{l_0}{l_2}\right)^{\varkappa} = p_\mathrm{a}\,,$$

takže naše výsledky odpovídají očekávání. Dosadíme-li odpovídající hodnotu l_2 za l do (4) získáme maximální možnou účinnost palné zbraně při daném atmosferickém tlaku p_a a poměru $\frac{V_0}{E_0}$[4]:

$$\eta_\mathrm{max} = 1 - \left(\left(\frac{V_0}{(\varkappa-1)E_0} p_\mathrm{a}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}\right)^{\varkappa-1} + \frac{S}{E_0} p_\mathrm{a} l_0 \left(1 - \left(\frac{V_0}{(\varkappa-1)E_0} p_\mathrm{a}\right)^{-\frac{1}{\varkappa}}\right)$$

toto se dá přepsat jako

$$\eta_\mathrm{max} = 1 + A - C(\varkappa) A^{(1-\frac{1}{\varkappa})}$$

kde

$$C(\varkappa) = \frac{2-\varkappa}{\varkappa-1} \left(\frac{1}{\varkappa-1}\right)^{-\frac{1}{\varkappa}}$$

a

$$A = \frac{V_0}{E_0} p_\mathrm{a}.$$

Je tedy vidět, že η_max závisí (krom p_a) pouze na „hustotě energie“ propelentu $\frac{E_0}{V_0}$.

Nyní se zabývejme odchylkami našeho modelu od reálné situace. Asi největší odchylka souvisí s tepelnou izolovaností systému. Mezi spalinami a stěnou dochází k výměně tepla, zpravidla je teplo spalin odváděno stěnou, což vede ke snižování účinnosti. Velikost této ztráty závisí na velkém množství parametrů, od materiálových vlastností hlavně, přes okolní teplotu, délku hlavně, etc. Další nepřesností je předpoklad o okamžitém a úplném spálení prachu. Reálná reakce propelentu probíhá postupně, rychlost hoření závisí mimo jiné na tlaku a na teplotě (což zpětně ovlivňuje velikost tepelných ztrát) a v praxi se často stává, že část střeliviny zůstane nepřeměněná, což dále snižuje efektivitu střelby. Dále na projektil ve hlavni působí tření, jehož velikost závisí zejména na technickém provedení projektilu a vnitřní stěny hlavně. Dále má na veškeré parametry vliv fakt, že projektil se v hlavni typicky roztáčí (kvůli stabilitě projektilu). V neposlední řadě jsme považovali spaliny za ideální plyn a veškeré termodynamické procesy za rovnovážné. Nepřesnost způsobená aproximací ideálního plynu záleží zejména na chemickém složení spalin a látkové hustotě spalin v průběhu střelby. Nerovnovážná termodynamika je náročná disciplína, nicméně nerovnovážnost procesů vede vždy ke snížení účinnosti

[4] až na extrémní možnost zpětného přenosu tepla, která v reálných situacích nenastane

děje. I v aproximaci rovnovážného ideálního plynu se situace stává složitou, pokud jsou spaliny směsí látek s různou symetrií molekul, tedy o složkách s různým $\varkappa$.

Testovat naše modely v praxi by bylo technicky velice náročné. Proto budeme srovnávat naše modelové výsledky s výsledky programu IntBal 1.0. Ten lze stáhnout například z `http://ballistics.eu/interior.html`, k dispozici je česká verze stránek s popisem. Program má fungovat na systémech Windows 2000, XP, Vista a 7, nicméně na Windows 10 nám program fungoval.[5] Po spuštění programu nejprve klikněte na kartu „Extras" a zaklikněte checkbox „Show energy losses", což nám v konzolovém výpisu zobrazí i účinnosti. Program vyžaduje a umožňuje nastavení několika desítek parametrů, včetně velikosti a tvaru zrníček střeliviny. Naštěstí program obsahuje předvyplněné hodnoty pro tři zbraně. Kliknutím na „load" se zobrazí obsah složky IntBal1.0 včetně tří txt souborů s přednastavenými parametry. 7.62mm x 39 je označení munice pro samopal AK-47, 30mm PLdvK je československá protiletadlová zbraň a 152mm je artilerie. Podívejme se nejprve na kalašnikov. V konzolovém výstupu se Vám zobrazí různé energetické ztráty „Energy loss" i s procentuálními vyjádřeními. Řádek „Energy Loss due to Projectile Translation" má význam zbývající kinetické energii projektilu při opouštění hlavně, takže typické ákáčko pálí s účinností zhruba 16,6 % . Řádek „Remaining Energy of Propellant+Igniter Gas" odpovídá nevyužité energii z našeho modelu. Podíváme-li se na další ztráty, nejvýraznější je „Remaining Energy of unburned Propellant", tedy energie nespáleného prachu. Téměř třetina střeliviny se tedy při střelbě nevznítila. Nezanedbatelný vliv má také „Energy Loss due to Heat Transfer", což jsou ztráty kvůli tepelné výměně. Z didaktického důvodu je dobré si rozmyslet ještě příspěvky „Energy Loss due to Air Resistance", tj. odpor vzduchu, který by byl v rovnovážné aproximaci nulový a „Energy Loss due to Recoil" čili energetická ztráta zpětným rázem. Ten lze odhadnout modelem inverzní nepružné srážky. Nechť má projektil hmotnost m a rychlost v a hmotnost částí ovlivněných zpětným rázem je M. Ze zákonu zachování hybnosti musí platit

$$mv = Mw\,,$$

kde w je střední rychlost částí ovlivněných zpětným rázem okamžitě po výstřelu. Ztráta energie zpětným rázem je tedy

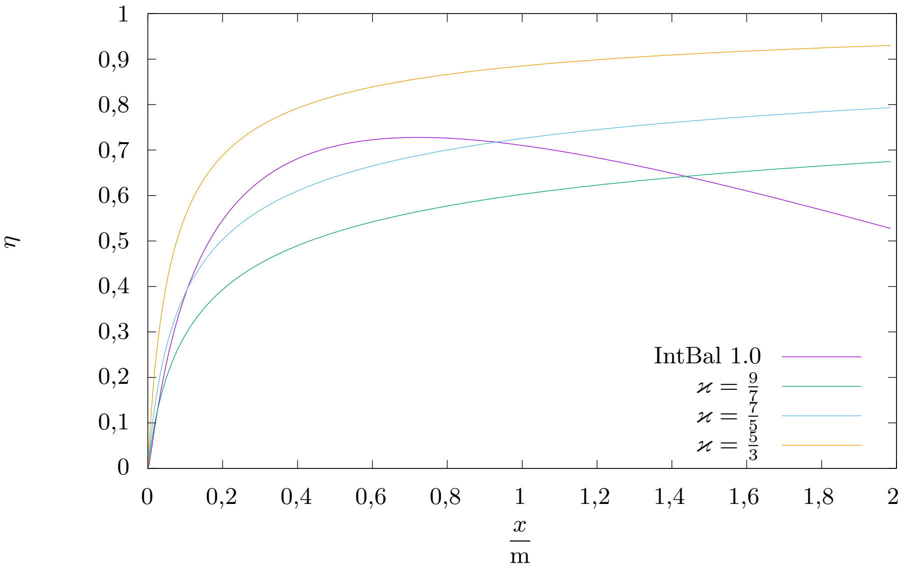
$$E_\mathrm{z} = \frac{1}{2}Mw^2 = \frac{1}{2}\frac{m^2}{M}v^2 = \frac{m}{M}E_\mathrm{kp}$$

kde E_z je energetická ztráta zpětným rázem a E_kp je kinetická energie projektilu. Množství ztrát je tedy úměrné poměru hmotností a vzhledem k tomu, že hmotnost projektilu je v řádu jednotek gramů a hmotnost částí ovlivněných zpětným rázem je v praxi jednotky až desítky kilogramů. Proto lze očekávat, že množství energie ztracené tímto způsobem nepřesáhne 0,1 %. Podívejme se, jak by se měnily velikosti energií v jednotlivých kategorií, když budeme měnit délku hlavně, která se skrývá pod popiskem „Travel of Projectile at Muzzle" v kartě „Weapon and Cartridge". Navíc budeme-li předpokládat, že rychlost projektilu v dané vzdálenosti v hlavni nezávisí na zbývající délce hlavně; potom se nám bude hodit graf závislosti rychlosti projektilu na vzdálenosti uražené v hlavni.[6] Po kliknutí na „Axis Y" zaškrtněte „Proj. Velocity vp" a po kliknutí na „Axis X" zaškrtněte „Projectile Travel". Nastavíme tedy délku hlavně na nějakou velkou hodnotu, třeba 2 m, a klikneme na „Start". Krom závislosti rychlosti projektilu

[5] Uživatelé Linuxu jsou snad zvyklí si problémy řešit sami a uživatelé Macu mají dost peněz na placený program.

[6] Což podle předchozího předpokladu odpovídá úsťové rychlosti při příslušné délce hlavně.

na dráze získáváme i další zajímavou informaci, totiž fakt, že část střeliviny nebude přeměněna ani při dlouhé hlavni. Také stojí za zmínku, že na nezanedbatelnou hodnotu vzrostla část „Energy Loss due to Friction“, totiž energetická ztráta třením. Tření tedy na velkých vzdálenostech bude hlavní brzdnou silou, oproti v našem modelu předpokládanému podtlaku uvnitř hlavně. Nicméně stejně jako tlak atmosféry i tento příspěvek lineárně roste s uraženou vzdáleností. Ze závislosti můžeme také odhadnout optimální délku hlavně z hlediska účinnosti. Po bližším zkoumání zjistíme, že tato délka hlavně je zhruba 78 cm. Pomocí „Save“ můžeme výstup programu uložit a srovnat výsledky našeho modelu podle (4). Na obrázku 1 vidíme srovnání účinnosti samopalu AK podle programu IntBal 1.0 a našeho modelu pro různé hodnoty $\varkappa$.



Obr. 1: Srovnání účinnosti samopalu AK podle programu IntBal 1.0 a našeho modelu pro různé hodnoty $\varkappa$.

Výsledky našeho modelu vypadají kvalitativně jinak než výsledky programu proto, že zatímco podle programu má pro delší hlavně tření nezanedbatelný vliv, v našem modelu ho neuvažujeme – roli třecí síly u nás zastupuje atmosferická tlaková síla Sp_{a}, která je výrazně menší než síla třecí podle programu. Důsledkem toho je v našem modelu rovnovážná poloha posunuta mimo námi zkoumanou oblast délek hlavní a příslušné křivky v grafu proto neklesají.

Shrnutím by se dalo říct, že účinnost palných zbraní závisí na velkém množství parametrů, od provedení propelentu, přes atmosferické vlastnosti, po technického provedení hlavně a projektilu. Jednoduché termodynamické modely mohou mít jen určitou omezenou platnost (rychle hořící prach, krátká hlaveň, malé tření, …) a obecně se od něj výsledky mohou značně odchylovat.

Lubomír Grund
grund@fykos.cz