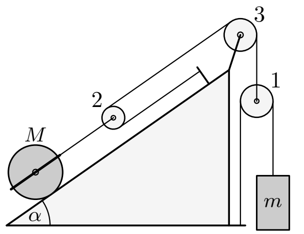
Úloha III.5 ... kladkovaná

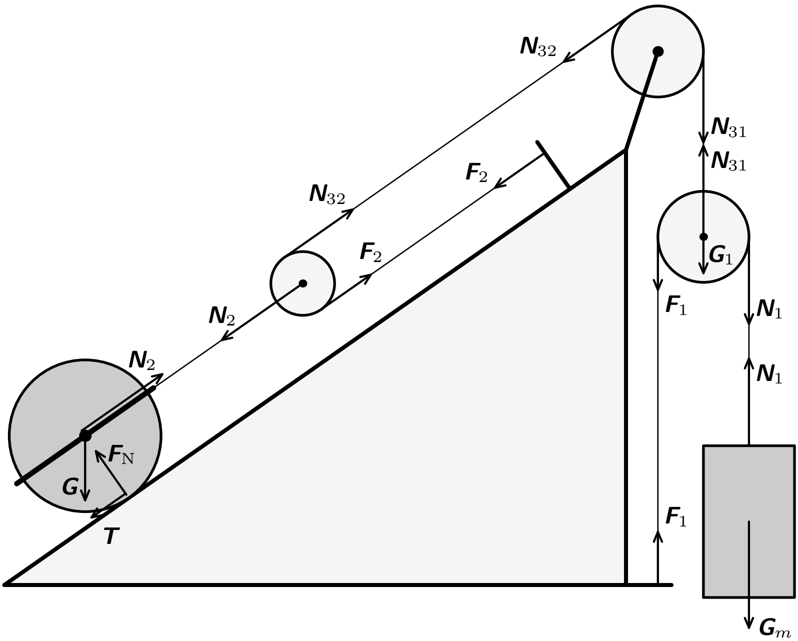
7 bodů; průměr 2,79; řešilo 29 studentů



Mějme rozestavení kladek jako na obrázku. Známe hmotnosti m_i, poloměry R_i a momenty setrvačnosti J_i všech kladek, hmotnost m závaží a hmotnost M, poloměr R i moment setrvačnosti J válce. Zanedbejte tíhu kladky 2, abyste mohli uvažovat, že lana vedoucí ke kladce 2 jsou rovnoběžná s nakloněnou rovinou. Součinitel smykového i klidového tření mezi válcem a podložkou je f. Lano na kladkách neprokluzuje. Vypočtěte s jakým zrychlením (popř. i úhlovým zrychlením) se bude pohybovat závaží m a válec M.

Kubovi přišlo cvičení zbytečně jednoduché.

Jelikož nemáme žádnou teorii hmotných kladek, budeme se k nim chovat, jako k libovolném jinému tělesu v mechanice. To znamená, že si napíšeme pohybové rovnice nejen pro válec M a závaží m, ale také pro všechny kladky. Zároveň neznáme žádný obecný vztah mezi velikostmi sil působících na kladku (které jsou pro nehmotné kladky stejně veliké, a tedy se vyruší). Na obr. 1 jsou zakresleny všechny síly působící na vyšetřovaná tělesa. Současně tím zavádíme značení sil. Jelikož je kladka 3 pevně uchycena, nemusíme se zavývat silami s nulovým momentem.



Obr. 1: Znázornění všech relevantních působících sil.

Co se týče aproximace ze zadání. Uvažujme nyní pouze to, že všechna lana vedoucí ke kladce 2 jsou rovnoběžná s povrchem nakloněné roviny. Toho lze například dosáhnout umístěním kladky 2 do drážky bez tření. Zanedbání typu $m_2 \approx 0$ provedeme až ve výsledku, kde teprve uvidíme, co můžeme zanedbat.

Dále si musíme uvědomit, že na volných kladkách se zrychlení půlí (vzhledem k tomu, že se lano musí prodloužit dvakrát více, než se skutečně kladka posune). Označme a zrychlení válce. Za kladný směr zrychlení považujme případ, kdy válec bude klesat. Potom se kladka 2 pohybuje se zrychlením a, kladka 1 se zrychlením $2a$ a závaží m se zrychlením $4a$. Pohybové rovnice závaží a válce vypadají následovně,

$$4ma = mg - N_1\,, \tag{1}$$
$$Ma = N_2 - Mg\sin\alpha - T\,, \tag{2}$$
$$J\varepsilon = TR\,, \tag{3}$$

kde ε je úhlové zrychlení válce.

Obvodové zrychlení kladek musíme brát v soustavě spojené s kladkou, tedy od zrychlení lana musíme odečíst zrychlení kladky. Pohybové rovnice rovnice pro kladky nabývají tvaru

$$2m_1 a = m_1 g + N_1 + F_1 - N_{31}\,, \tag{4}$$
$$J_1 \frac{2a}{R_1} = (N_1 - F_1)R_1\,, \tag{5}$$
$$J_3 \frac{2a}{R_3} = (N_{31} - N_{32})R_3\,, \tag{6}$$
$$m_2 a = -m_2 g\sin\alpha + N_{32} + F_2 - N_2\,, \tag{7}$$
$$J_2 \frac{a}{R_2} = (N_{32} - F_2)R_2\,. \tag{8}$$

Jelikož lana neprokluzují na kladkách, spočítá se úhlové zrychlení kladek jako podíl zrychlení lana na kladce vůči její středu a poloměru kladky.

Nyní však máme pouze 8 rovnic pro 9 neznámých a, ε, T, F_1, F_2, N_1, N_2, N_{31}, N_{32}. Pro jednoznačné řešené potřebujeme přidat ještě devátou rovnici. Pokud je třecí koeficient dostatečně vysoký, tj. třecí síla je nižší než normálová síla F_N působící mezi válcem a podložkou,

$$|T| \leq fF_N = Mgf\cos\alpha\,,$$

nebude docházet k prokluzování válce, a můžeme psát

$$a = \varepsilon R\,. \tag{9}$$

Jelikož směr působení síly T je závislý na směru pohybu, píseme velikost $|T|$.

Pokud je naopak třecí koeficient příliš malý, nemůže třecí síla T růst výše než fF_N, a na této hodnotě už zůstane, tedy

$$T = Mgf\cos\alpha\,. \tag{10}$$

Toto platí v případě $a > 0$. Pokud však vyjde $a < 0$, musíme v naší znaménkové konvenci počítat

$$T = -Mgf\cos\alpha\,. \tag{11}$$

Jelikož e v žádné jiné rovnici nevyskytuje f, odpovídá tato změna přechodu od f k $-f$, stačí tedy spočítat první případ a pro druhý případ pouze v řešení udělat tuto změnu. Pokud válec neprokluzuje, vyjde řešení stejné pro oba směru pohybu.

Vyřešením této soustavy 9 lineárních rovnic dostáváme řešení pro případ, kdy válec neprokluzuje

$$a = g\frac{4m + 2m_1 - M\sin\alpha - m_2\sin\alpha}{M + 16m + 4m_1 + m_2 + \frac{J}{R^2} + 4\frac{J_1}{R_1^2} + \frac{J_2}{R_2^2} + 4\frac{J_3}{R_3^2}}\,, \tag{12}$$

Odtud získáme zrychlení závaží jako $4a$ a úhlové zrychlení válce jako $\varepsilon = a/R$.

V případě, kdy válec prokluzuje, dostáváme

$$a = g\frac{4m + 2m_1 - M(\sin\alpha + f\cos\alpha) - m_2\sin\alpha}{M + 16m + 4m_1 + m_2 + 4\frac{J_1}{R_1^2} + \frac{J_2}{R_2^2} + 4\frac{J_3}{R_3^2}}\,, \tag{13}$$

$$\varepsilon = \frac{g}{R}\frac{MR^2 f\cos\alpha}{J}\,. \tag{14}$$

Jestliže vychází opačný směr pohybu, musíme řešení upravit na tvar

$$a = g\frac{4m + 2m_1 - M(\sin\alpha - f\cos\alpha) - m_2\sin\alpha}{M + 16m + 4m_1 + m_2 + 4\frac{J_1}{R_1^2} + \frac{J_2}{R_2^2} + 4\frac{J_3}{R_3^2}}\,, \tag{15}$$

$$\varepsilon = -\frac{g}{R}\frac{MR^2 f\cos\alpha}{J}\,. \tag{16}$$

K důkladnějšímu rozboru této změny se ještě vrátíme. Zrychlení závaží získáme v obou případech opět jako $4a$.

Vidíme, že když válec prokluzuje, nemá jeho moment setrvačnosti žádný vliv na jeho translační zrychlení, ale pouze na rotační pohyb.

V tuto chvíli můžeme oprávněně provést aproximaci $m_2 \approx 0$ a vyškrtnout z výrazů (12)-(16) všechny členy obsahující m_2. Pro jednoduchost se v následujících úvahách nebudeme zabývat patologickými případy, kdy naši aproximaci nelze použít takto jednoduše.

Nyní je třeba vyšetřit, kdy bude a kdy nebude válec prokluzovat. To lze udělat z řešení libovolného z těchto dvou případů. Uděláme to tedy pro názornost oběma metodami. Když válec neprokluzuje, je splněná podmínka $a = \varepsilon R$ a třecí síla se podle toho patřičně upravuje (s rostoucím ε roste). Proto stačí najít mezní případ f, pro který je splněna rovnost $|T| = fF_N$. Jednoduchým dosazením do soustavy dostáváme

$$T = \frac{J\varepsilon}{R} = \frac{J}{R^2}a\,,$$

$$\frac{J}{R^2}|a| \leq fF_N = Mgf\cos\alpha\,.$$

Dosazením za a z (12) a řešením této lineární nerovnice dostáváme, že válec neprokluzuje pro

$$f \geq \frac{J}{MR^2\cos\alpha}\cdot\frac{|4m + 2m_1 - M\sin\alpha|}{\frac{J}{R^2} + 4\frac{J_1}{R_1^2} + \frac{J_2}{R_2^2} + 4\frac{J_3}{R_3^2} + M + 16m + 4m_1}\,. \tag{17}$$

V případě, kdy válec prokluzuje je naopak splněna rovnost $|T| = fF_N$ a pro zrychlení platí $|a| > |\varepsilon|R$ – musíme tedy vyřešit mezní podmínku $a = \varepsilon R$. Tentokrát máme už vyjádřené všechny potřebné veličiny ve vztazích (13) a (14), resp. (15) a (16), proto rovnou píšeme podmínku pro prokluzování válce, (18) pro $a > 0$ a (19) pro $a < 0$,

$$g\frac{4m + 2m_1 - M(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{M + 16m + 4m_1 + 4\frac{J_1}{R_1^2} + \frac{J_2}{R_2^2} + 4\frac{J_3}{R_3^2}} > g\frac{MR^2 f\cos\alpha}{J}\,, \tag{18}$$

$$g\frac{4m + 2m_1 - M(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{M + 16m + 4m_1 + 4\frac{J_1}{R_1^2} + \frac{J_2}{R_2^2} + 4\frac{J_3}{R_3^2}} < -g\frac{MR^2 f\cos\alpha}{J}\,. \tag{19}$$

Řešení těchto nerovnic se liší znaménkem – můžeme je tedy spojit do jedné, společné podmínky (20),

$$f < \frac{J}{MR^2\cos\alpha}\cdot\frac{|4m + 2m_1 - M\sin\alpha|}{\frac{J}{R^2} + 4\frac{J_1}{R_1^2} + \frac{J_2}{R_2^2} + 4\frac{J_3}{R_3^2} + M + 16m + 4m_1}\,. \tag{20}$$

Obě podmínky (17) a (20) skutečně vyšly stejně, přestože druhý případ na první pohled nevypadá, že by měl mítřešení právě ve stejném tvaru.

Pokud bychom měli různý dynamický a statický koeficient tření, byla by správně metoda z případu, kdy válec neprokluzuje. V případě metody druhé bychom museli jako poslední krok nahradit dynamický koeficient statickým, čímž bychom opět dospěli ke stejnému závěru. Poznamenejme však, že pokud by se koeficienty lišily, mohli bychom dostat komplikovaný trhavý pohyb.

Nyní se vraťme k rozboru $a \gtrless 0$ v případě prokluzujícího válce. Nejprve poznamenejme, že v případě $a = 0$, tedy

$$4m + 2m_1 - M(\sin\alpha \pm f\cos\alpha) = 0\,,$$

musí nutně platit také $\varepsilon = 0$, protože nepůsobí žádný moment roztáčející válec. V tomto případě tedy válec neprokluzuje, a konkrétně setrvává na místě, stejně jako celá soustava. Dále tedy uvažujme pouze $a \neq 0$, díky čemuž můžeme všechny následující nerovnosti uvažovat ostré.

Soustava se bude pohybovat v kladném směru, pokud bude splněna nerovnost $a > 0$ pro a ze vzorce (13), tedy

$$4m + 2m_1 - M(\sin\alpha + f\cos\alpha) > 0\,. \tag{21}$$

Naopak v záporném směru se bude pohybovat pokud bude splněna nerovnost $a < 0$ pro a ze vzorce (15), tedy

$$4m + 2m_1 - M(\sin\alpha - f\cos\alpha) < 0\,. \tag{22}$$

Nerovnosti nemohou být splněny současně, tedy dostáváme jednoznačnou předpověď vývoje systému. Neplatnost žádné z nich však neimplikuje platnost druhé, tedy může nastat situace, kdy nebude splněna ani jedna z nich. Úvahou můžeme dospět k tomu, že pak musí válec neprokluzovat – tento fakt nyní odvoďme.

Přepokládejme, že nerovnosti (21) a (22) nejsou splněné – jsou tedy splněné nerovnosti

$$4m + 2m_1 - M(\sin\alpha + f\cos\alpha) < 0\,,$$
$$4m + 2m_1 - M(\sin\alpha - f\cos\alpha) > 0\,.$$

Z obou z nich vyjádříme f a spojením výsledků (liší se opět pouze znaménkem) dostáváme nerovnost

$$f > \frac{1}{\cos\alpha}\frac{|4m + 2m_1 - M\sin\alpha|}{M} > f_{\mathrm{mez}}\frac{MR^2}{J} > f_{\mathrm{mez}}\,,$$

kde jsme využili toho, že pro každé těleso platí $J < MR^2$, kde R značí největší vzdálenost bodu tělesa od osy, vůči které počítáme moment setrvačnosti, v našem případě poloměr (okraj od středu). Tím jsme ověřili platnost nerovnosti (17), a tedy válec skutečně neprokluzuje. Vzhledem k tomuto výsledku nesplnění jedné z nerovností (21) nebo (22) automaticky implikuje splnění druhé z nich (pokud víme, že válec prokluzuje).

Při zadaných počátečních podmínkách se tedy musíme podívat na nerovnost (17), zda válec prokluzuje, nebo ne. Pokud prokluzuje, musíme ověřit nerovnost (21), abychom zjistili, jakým směrem se bude pohybovat, a podle toho použili příslušné vyjádření zrychlení.

Jakub Dolejší
`krasnykuba@fykos.cz`