

Úloha III.E ... reflexní náramek

12 bodů; průměr 7,06; řešilo 34 studentů

Změřte co nejvíce charakteristik samonavíjecího reflexního náramku. Zajímá nás především:

- Náramek je vyztužen kusem plechu, který může být ohnut podélně (svinutý náramek) nebo příčně (narovnaný náramek). Jaký poloměr křivosti mají tyto ohyby, pokud na plech nepůsobí vnější síla?
- Pokud náramek narovnáme a budeme ohýbat v jednom místě, při jakém úhlu přejde do ohnutého stavu? Při jakém úhlu se opět narovná? (Pozorujeme hysterezi?)
- Jaký moment síly je potřebný k ohnutí náramku?
- Je některý ze stavů náramku (svinutý nebo narovnaný) energeticky výhodnější? Odhadněte o kolik.

Erikovi se ne a ne ohnout.

Měření poloměrů křivosti

Teorie

U svinutého náramku můžeme změřit přímo průměr r_1 a vydělit ho dvěma. U narovnaného náramku změříme jeho šířku d , která je vlastně tětivou kružnice, a výšku svinutí h . Z toho pomocí Pythagorovy věty vyjádříme poloměr r_2 .

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{2}\right)^2 + (r_2 - h)^2 &= r_2^2 \\ \frac{d^2}{4} + r_2 - 2r_2h + h^2 &= r_2^2 \\ r_2 &= \frac{\frac{d^2}{4} + h^2}{2h} \end{aligned}$$

Poté podle vzorce

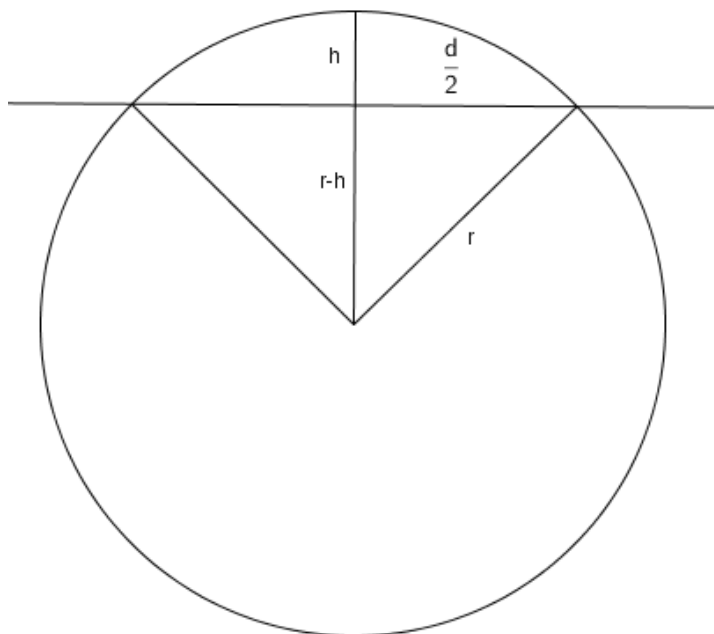
$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

spočítáme výběrovou směrodatnou odchylku průměru. Nakonec dopočítáme nejistotu narovnaného poloměru zakřivení pomocí parciálních derivací:

$$\begin{aligned} \sigma_{r_2} &= \sqrt{\left(\frac{\partial r_2}{\partial h} \sigma h\right)^2 + \left(\frac{\partial r_2}{\partial d} \sigma d\right)^2} \\ \sigma_{r_2} &= \sqrt{\left(\frac{d}{4h} \sigma h\right)^2 + \left(\frac{4h^2 - d^2}{2h^2} \sigma d\right)^2} \end{aligned}$$

Postup

Měření jsme prováděli posuvným měřítkem. Nejprve jsme měřili průměr svinutého náramku, poté výšku h a šířku nataženého. Každé měření jsme provedli desetkrát.



Obr. 1: Měření poloměru svinutého náramku.

Výsledky

Veličina	$\frac{r_1}{\text{cm}}$	$\frac{h}{\text{cm}}$	$\frac{d}{\text{cm}}$
1. měření	3,67	0,28	2,56
2. měření	3,46	0,23	2,51
3. měření	3,54	0,22	2,52
4. měření	3,30	0,24	2,49
5. měření	3,38	0,26	2,50
6. měření	3,92	0,25	2,52
7. měření	3,50	0,21	2,45
8. měření	3,61	0,22	2,55
9. měření	3,57	0,24	2,53
10. měření	3,54	0,24	2,54
Průměr	3,549	0,239	2,517
Výběrová směrodatná odchylka průměru	0,05	0,006	0,01

$$r_1 = (3,55 \pm 0,05) \text{ cm}$$

$$r_2 = (3,44 \pm 0,09) \text{ cm}$$

Diskuse

Obě měření jsou poměrně přesná, měření poloměru prohnutí nataženého náramku je méně přesné, protože jsme nemohli měřit přímo, ale museli jsme tento poloměr vypočítat. Nepřesnosti by mohly být způsobeny kromě lidské chyby a nepřesnosti měřidla také nerovností kusu plechu a obalem reflexního pásku.

*Měření úhlu potřebného k ohnutí a narovnání náramku**Teorie*

Úhel, při kterém se náramek přemění z nataženého stavu do svinutého, označíme φ_0 , úhel, při kterém se svinutý náramek opět natáhne, označíme φ_n .

Postup

Reflexní pásek jsme izolepou připevnili na úhloměr, nejprve tak, aby konec pásku ukazoval na nulu, později jsme zkusili jiný postup a připevnili ji na 90° . Poté jsme pásek ohýbali a opět narovnávali v počátku úhloměru a měřili úhel přechodu mezi stavy natažený a ohnutý. Měření jsme provedli patnáctkrát a poté jsme vypočítali výběrový průměr a výběrovou směrodatnou odchylku průměru.

Výsledky

Číslo měření	φ_0	φ_n
1	5	1
2	3	5
3	4	-1
4	3	1,5
5	2	-2
6	3	-1
7	5	4
8	6	-1
9	6	-2
10	4	-4
11	4	-4
12	5	0
13	4	0
14	3	-1
15	4	0
Výběrový průměr	4,1	-0,3
Výběrová směrodatná odchylka průměru	0,3	0,6

$$\varphi_0 = (4,1 \pm 0,3)^\circ$$

$$\varphi_n = (-0,3 \pm 0,6)^\circ$$

Diskuse

Obě měření vyšla velmi nepřesná, obzvlášť u druhého měření nemůžeme přesně říct, zda je úhel kladný nebo záporný. Téměř jistě však víme, že je úhel potřebný k natažení menší než úhel

potřebný k ohnutí, čili že náramek má tendenci zůstat svinutý, čili pozorujeme hysterezi. Velké nepřesnosti jsou způsobeny malým měřeným úhlem a nepřesnou metodou měření.

Měření momentu síly potřebného k ohnutí

Toerie

Moment hybnosti je definován pomocí vztahu

$$M = Fr,$$

Kde F je síla ohýbající náramek a r je vzdálenost působíště síly od bodu podepření. Moment hybnosti by měl být jeden pro celý náramek.

Postup

Náramek jsme položili na okraj stolu a jeho konec zatížili. Jako závaží jsme používali igelitový pytlík, do kterého jsme postupně přidávali bonbóny. Bonbóny jsem používala, protože jsme potřebovali závaží o malých rozdílech hmotnosti. Proto jsme zvažili vždy několik bonbónů a celkovou hmotnost vydělili počtem bonbónů. Poté jsme pro každý počet bonbónů měřili vzdálenost, při které se náramek ohne.

Výsledky

Měření hmotnosti

Číslo měření	Počet bonbónů	$m_{\text{celk}}g$	$m_b g$
1	20	109	5,54
2	17	93	5,47
3	20	109	5,45
4	15	82	5,47
5	13	72	5,53
Průměr	-	-	5,48
Směrodatná odchylka	-	-	0,02

Měření momentu síly

Číslo měření	n	$\frac{m}{kg}$	$\frac{r}{m}$	$\frac{M}{N \cdot m}$	$\frac{\sigma M}{N \cdot m}$
1	5	0,027	0,20	0,052	0,001
2	6	0,033	0,19	0,061	0,002
3	7	0,038	0,19	0,071	0,002
4	8	0,044	0,18	0,077	0,002
5	9	0,049	0,18	0,087	0,002
6	10	0,055	0,18	0,097	0,003
7	11	0,060	0,18	0,103	0,003
8	12	0,066	0,17	0,110	0,003
9	13	0,071	0,17	0,119	0,004
10	14	0,077	0,17	0,128	0,004
11	15	0,082	0,16	0,129	0,004
12	16	0,088	0,16	0,138	0,004
13	17	0,093	0,14	0,123	0,005
14	18	0,099	0,13	0,126	0,005
15	19	0,104	0,12	0,122	0,005
16	20	0,110	0,11	0,118	0,005
17	21	0,115	0,10	0,113	0,006
18	22	0,120	0,10	0,118	0,006
19	23	0,126	0,10	0,117	0,006
20	24	0,131	0,10	0,122	0,006
21	25	0,137	0,10	0,128	0,007
22	26	0,142	0,09	0,126	0,007
23	27	0,148	0,10	0,145	0,007
24	28	0,153	0,08	0,120	0,008
25	29	0,159	0,08	0,125	0,008

Protože momenty síly se velmi liší, zakreslili jsem do grafu závislost momentu síly na rameni síly. Protože u ramen se objevila velká mezera mezi 16 cm a 13,5 cm, zakreslili jsme moment síly jako dvě funkce.

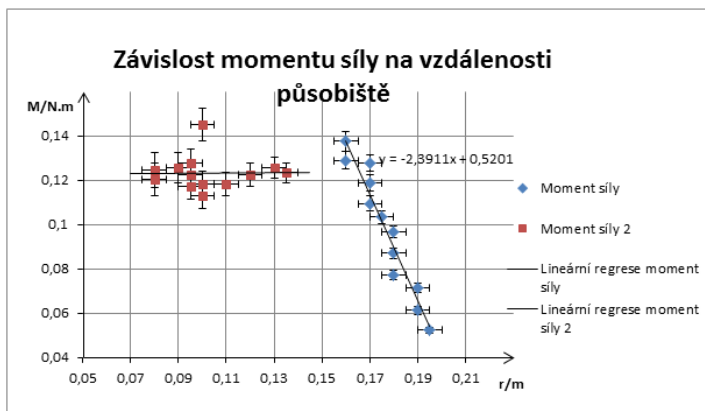
Obě funkce jsme proložili přímkou, část s menším ramenem síly vypadá jako konstanta, takže můžeme vypočítat moment síly v tomto úseku spolu se standární odchylkou. Aritmetický průměr těchto hodnot je 0,123 N·m a standární odchylka je 0,002 N·m. Protože je ale průměr nejistot měření momentu síly 0,006 N·m, musíme započítat i tuto chybu jako nejistotu typu B:

$$s = \sqrt{s_A^2 + s_B^2} = \sqrt{(0,002 \text{ N} \cdot \text{m})^2 + (0,006 \text{ N} \cdot \text{m})^2} \doteq 0,007 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M = (0,123 \pm 0,007) \text{ N} \cdot \text{m}$$

Diskuse

Graf se překvapivě rozdělil do dvou rozdílných částí, kde jedna část je dle předpokládání konstantní, ale dle druhé to vypadá, že moment síly klesá lineárně podle ramene síly. To by mohlo být způsobeno tím, že náramek se během zkoušení úhlu ohnutí zlomil přibližně uprostřed a proto se liší hodnoty, kde se uprostřed ramene nachází deformace a kdy ne. Pokud se uprostřed nachází, chová se funkce jinak, ale neumíme vysvětlit, proč zrovna lineárně klesá, ale tento trend je poměrně silný.



Obr. 2: Graf závislosti momentu síly na rameni síly.

Odhad energetické bilance

Pro náramek je určitě energeticky výhodnější být ve stavu svinutý, protože do něj velmi ochotně přechází. Rozdíl energetických stavů je daný prací, kterou je potřeba k přechodu vykonat. Práce, která potřeba vykonat k svinutí náramku je menší, než práce potřebná k natažení náramku, protože je mezi nimi energetická bariéra. (Pokud by tam nebyla, náramek by se svinoval sám od sebe.) Rozdíl energetických stavů je tedy dán rovnicí

$$\Delta E = W_{\text{natažení}} - W_{\text{svinutí}}.$$

Pokud chci tento rozdíl odhadnout, musím odhadnout obě práce. Práce se vypočítá jako součin síly a dráhy, po kterou tato síla působí. Pokud ohýbáme náramek, musíme náramek ohnout o úhel přibližně $4,1^\circ$. Pokud náramek ohýbáme v nějakém bodě, je vykonaná práce (úhel dosazujeme v radiánech, protože je úhel malý, aproximujeme spirálu kružnicí)

$$W_{\text{svinutí}} = Fs = Fr\varphi = M\varphi \doteq 0,0088 \text{ J}.$$

Ještě dopočítáme chybu měření:

$$sW_{\text{svinutí}} = \sqrt{(\varphi s_M)^2 + (Ms_\varphi)^2} \doteq 0,002 \text{ J}$$

Práce potřebná k natažení je tedy

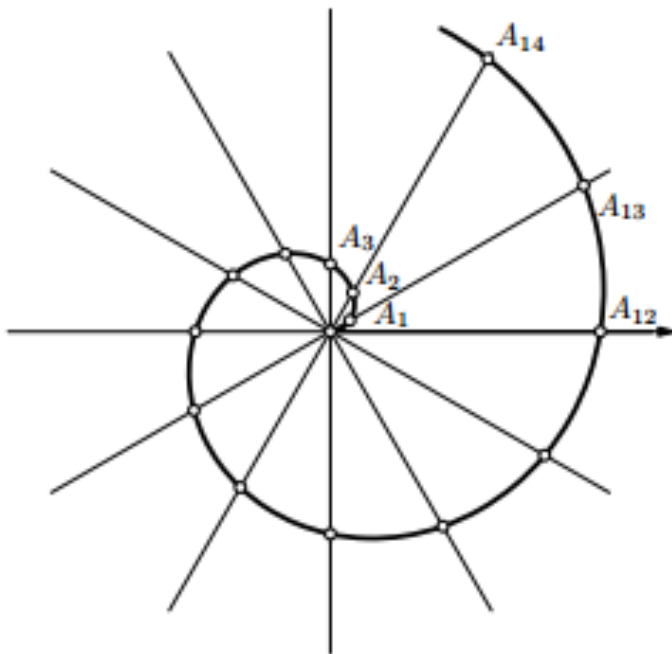
$$W_{\text{svinutí}} = (0,009 \pm 0,002) \text{ J}.$$

Práci potřebnou k narovnání náramku spočítám podobně. Sice jsem neměřila moment síly potřebný k natažení, ale protože se jedná pouze o řádový odhad, budu předpokládat, že je stejný jako ten pro svinutí. Dráha, po kterou působím touto silou, je část Archimédovy spirály.

Pokud jsou souřadnice koncového bodu spirály r a ϑ , její délku vypočítáme podle vzorce ¹

$$s = r \left(1 + \frac{\vartheta}{2} \right).$$

¹ zdroj: <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/matematika/mkrivek.pdf>



Obr. 3: Dráha působení síly.

V případě rozvinování náramku je úhel přibližně $\vartheta = 180,3^\circ$. Pokud bychom počítali, že náramek narovnááme v jednom bodě a působíme stejným momentem síly jako při natahování, je vykonaná práce:

$$W_{\text{natažení}} = F s = F r \left(1 + \frac{\vartheta}{2}\right) = M \left(1 + \frac{\vartheta}{2}\right) \doteq 0,3162 \text{ J},$$

$$s W_{\text{natažení}} = \sqrt{\left(\left(1 + \frac{\vartheta}{2}\right) s_M\right)^2 + \left(\frac{M}{2} s_\varphi\right)^2} \doteq 0,02 \text{ J}.$$

Práce potřebná k natažení je tedy přibližně

$$W_{\text{natažení}} = (0,32 \pm 0,02) \text{ J}.$$

Dopočítáme energetický rozdíl obou stavů náramku:

$$\Delta E = 0,32 \text{ J} - 0,009 \text{ J} = 0,0311 \text{ Js}(\Delta E) = 0,02 \text{ J} + 0,002 \text{ J} = 0,022 \text{ J}$$

Nakonec správně zaokrouhlím výsledek:

$$\Delta E = (0,32 \pm 0,02) \text{ J}$$

Toto je však spíše řádový odhad, jelikož pro natahování jsem nedokázala změřit moment síly.

Závěr

Svinutý a natažený náramek mají přibližně stejné poloměry křivosti, konkrétně svinutý náramek $r_1 = (3,55 \pm 0,05)$ cm a natažený $r_2 = (3,44 \pm 0,09)$ cm. Při ohýbání náramku pozorujeme hysterezi, když pro svinutí je třeba úhel $\varphi_0 = (4,1 \pm 0,3)^\circ$ a pro natažení úhel $\varphi_n = (-0,3 \pm 0,6)^\circ$. Moment síly má v jenom úseku velikost $M = (0,123 \pm 0,007)$ N·m, celkově však možná kvůli deformaci náramku není konstantní. Pro náramek je energeticky výhodnější být ve stavu svinutý, energetický rozdíl mezi těmito stavy je přibližně $\Delta E = (0,32 \pm 0,02)$ J.

Erik Hendrych
erik@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.