

Úloha VI.1 ... dost těžké kulometry

3 body; průměr 2,10; řešilo 41 studentů

Na auto připevníme dopředu dva kulometry, které vystřelují kulky o hmotnosti $m = 25$ g rychlostí $v_1 = 500 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, každý s frekvencí 10 výstřelů za sekundu. Auto se rozjede po rovině rychlostí $v_2 = 80 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ a poté začne střílet. Kolik nábojů vystřelíme, než auto zastaví? Během palby nepřidáváme plyn, odpor vzduchu a kol zanedbáváme. Tepelné ztráty uvnitř zbraní jsou taktéž zanedbatelné.

Mirek vzpomínal na GTA 2.

Soustavu auta, kulometů a vystřelených projektilů považujeme za izolovanou. Bude v ní tedy platit zákon zachování hybnosti. Budeme tedy uvažovat tak, že auto předává postupně svou hybnost vystřeleným projektilům. Poté, co vystřelíme dostatečný počet projektilů, jejichž celková hybnost bude rovna počáteční hybnosti auta, auto bude mít nulovou hybnost a tedy bude stát.

Pokud bychom chtěli úlohu počítat přesně, bylo by to poněkud komplikovanější. Projektily se pohybují rychlostí v_p vůči autu, tedy velikost jejich hybnosti vůči vnějšímu pozorovateli bude rovna $p_p = m(v_p + v_a)$, přičemž rychlost auta se bude právě v důsledku střelby snižovat. Také se bude měnit hmotnost auta, jak budou projektily vystřelovány. To by vedlo k úvahám a výpočtům podobným těm, které se používají při odvození Ciolkovského rovnice (kde se však počítá se spojeným tahem motoru). My se pokusíme situaci zjednodušit.

Rychlost projektilů vůči autu $v_p = 500 \text{ ms}^{-1}$ je poměrně velká oproti rychlosti auta $v_a = 22,22 \text{ ms}^{-1}$. Na konci bude rychlost auta nulová. Jelikož střílíme kulky vždy po stejném krátkém časovém úseku a auto bude zpomalovat přibližně lineárně v čase, můžeme odhadnout průměrnou rychlost projektilů vůči zemi jako

$$v_{pp} = \frac{v_p + (v_p + v_a)}{2} = 511,1 \text{ ms}^{-1}.$$

Nyní je ještě třeba zhodnotit změnu hmotnosti auta. Terénní pick-upy, které jsou v některých oblastech běžně používány jako nosiče kulometů, váží kolem 2 t. Pokud by auto vystřelilo celkem 2000 projektilů, jejich celková hmotnost by byla 50 kg. To tedy můžeme vzhledem k celkové hmotnosti auta přibližně zanedbat. Podle zákona zachování hybnosti tedy bude platit

$$p_{celk} = p_a = Np_{pp}, \\ Mv_a = Nm v_{pp}.$$

Z toho jednoduchými úpravami získáme počet vystřelených projektilů.

$$N = \frac{Mv_a}{mv_{pp}}$$

Po dosazení $M = 2$ t a zbylých hodnot dojdeme k výsledku, že je potřeba $N \doteq 3479$ projektilů k zastavení auta. Auto však pravděpodobně úplně přesně nezastaví – jeden výstřel jej zpomalí na minimum rychlosti a následující výstřel jej už bude odtlačovat zpět. Pokud by kulometry střílely naráz, bude situace podobná, jen projektily budou pak 2, tedy nabraná rychlost bude ještě větší. Rychlost však bude poměrně malá, v řádu $\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$. Dá se odhadnout, že jeden výstřel by asi na znovurozpohybování auta nestačil.

Vidíme, že rozdíl v hmotnosti auta bude přibližně 87 kg. Celkově tedy bude k zastavení auta třeba méně projektilů v důsledku ztráty hybnosti snižováním hmotnosti auta.

Ještě může být zajímavé pokusit se úlohu vyřešit pomocí Ciolkovského rovnice a porovnat ji s předchozím výsledkem. Hmotnost projektilů je poměrně malá a kadence je vysoká, takže by spjitá aproximace mohla být poměrně přesná. Podle Ciolkovského rovnice platí

$$\Delta v = v_e \log \frac{m_0}{m_1}$$

V našem případě je $\Delta v = v_a$, $v_e = v_p$, $m_0 = M_0$ je počáteční hmotnost auta a $m_1 = M_0 - m_p$ je hmotnost auta bez vystřelených projektilů, kde m_p je hmotnost vystřelených projektilů. To nám po úpravách dává

$$m_p = M_0(1 - e^{-\frac{v_a}{v_p}})$$

Tedy hmotnost je přibližně 87 kg, celkem tedy 3478 projektilů. To se liší od výše spočítané hodnoty jen o 1 projektil. To je vcelku pozoruhodné. V předchozím výpočtu jsme pokles hmotnosti, který je nakonec asi 4 %, neuvažovali, zde jsme však došli k téměř stejnému výsledku.

Tyto výsledky můžeme nakonec porovnat s numerickým výpočtem, který uvažuje změny hmotnosti a rychlosti po každém výstřelu. Došli jsme k výsledku 3478 projektilů. To velmi přesně odpovídá našim předchozím výpočtům, při kterých jsme však použili různé aproximace, aby byl výpočet jednodušší.

Pavel Blažek
pavelblazek@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.