

Úvodem

Milí FYKOSáci,

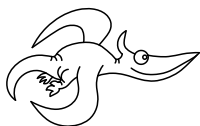
hned ze začátku bychom vám chtěli popřát mnoho dobrého do Nového roku. Pololetí vrcholí a my přicházíme s další várkou úloh. Snad vám poskytnou vítaný odpočinek od školních povinností nebo příjemné rozptýlení o jarních prázdninách.

Kdybyste měli chuť nás v Praze navštívit, srdečně vás zveme na Jeden den s fyzikou, kde si můžete poslechnout spoustu zajímavých přednášek a taky se dozvědět, jak to na matfyzu chodí. Celý program najdete na mf.cuni.cz/verejnost/jdf/. A pokud ještě nemáte registrovaný tým na fyziklani.cz, tak to rychle napravte!

Za chybějící vzoráky a statistiky se hluboce omlouváme, co nejrychleji budou zveřejněny na webu.

Těšíme se na vás.

Organizátoři



Zadání IV. série

Termín uploadu: 27. 2. 2018 23.59

Termín odeslání: 26. 2. 2018

Úloha IV.1 ... zmrzlina

3 body

Odhadněte, kolik gramů zmrzliny dokážeme vyrobit, pokud máme k dispozici 5 l kapalného dusíku o teplotě $-196\text{ }^{\circ}\text{C}$ a neomezené množství mléka a smetany o pokojové teplotě $22\text{ }^{\circ}\text{C}$? Předpokládejme, že požadovaná zmrzlina se skládá jen z mléka a smetany (hmotnostně půl na půl) a měla by mít teplotu $-5\text{ }^{\circ}\text{C}$. Protože se tepelné kapacity mléka a smetany v tomto intervalu teplot značně mění, počítejte s jejich průměrnými hodnotami $c_m = 3,45\text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ pro mléko a $c_s = 4,45\text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ pro smetanu. Zbylé potřebné údaje si dohledejte na internetu.

Úloha IV.2 ... autisti

3 body

Kolik nejméně dětí by muselo roztočit svůj fidget spinner, aby se tak den na Zemi prodloužil o 1 ms? Všechny neznámé veličiny odhadněte.

Úloha IV.3 ... divně tvarovaná nádobka

6 bodů

Máme válcovou skleničku, která má z boku u dna malou díru o ploše S . Tato nádoba je naplněná vodou, která samovolně přetéká do druhé nádoby, která je tentokrát již bez díry. Jaký tvar by musela mít druhá nádoba, aby v ní hladina rostla rovnoměrně? Předpokládejte, že má být válcově symetrická.

Bonus Dna obou nádob jsou ve stejné výšce a nádoby jsou dírou spojené.

Úloha IV.4 ... vymyslete si sami

7 bodů

Máme černou skříňku se třemi výstupy (A, B a C). Víme, že obsahuje n rezistorů se stejným odporem, ale nevíme jak jsou zapojeny. Změříme tedy odpory mezi dvojicemi bodů AB, BC a CA a zjistíme, že $R_{AB} = 3\Omega$, $R_{BC} = 5\Omega$ a $R_{CA} = 6\Omega$. Zjistěte, kolik nejméně rezistorů může skříňka obsahovat a určete příslušný odpor jednoho rezistoru.

Úloha IV.5 ... nemožnost nakažení

7 bodů

Představme si, že roztlačíme nějakou bakterii obvyklé velikosti na rychlost $v = 50 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ ve vodorovném směru a necháme ji volně letět ve vzduchu. Jakou vzdálenost zhruba urazí, než se zastaví?

Výsledek vás možná překvapí. Jak je tedy možné se infikovat tímto způsobem bakteriální infekcí? Diskutujte, proč je to možné i přes takový výsledek.

Úloha IV.P ... Voyager II a Voyager I žijí!

9 bodů

Máme nějaký satelit, který chceme vypustit ven ze Sluneční soustavy. Vypouštíme ho z oběžné dráhy Země tak, že po nějakých korekcích dráhy získá rychlost, která je vyšší než úniková rychlost ze Sluneční soustavy. Jaká je pravděpodobnost, že dojde ke kolizi sondy s nějakým kosmickým materiálem s průměrem větším než $d = 1 \text{ m}$ před opuštěním Sluneční soustavy?

Úloha IV.E ... tíha struny

12 bodů

Změřte délkovou hustotu struny, která vám měla přijít poštou společně se zadáním. Strunu ale nesmíte vážit.

Nápověda Zkuste strunu rozkmitat.

Úloha IV.S ... kořeni a automati

10 bodů

a) Naleznete všechny (tři) reálné kořeny funkce $\exp(x) - 5x^2$. Výběr metody je na vás. Nezapomeňte okomentovat, jak a proč jste zvolili daný postup.

b) Newtonova metoda tak, jak jsme si ji představili funguje i pro funkce komplexní proměnné. Vaším úkolem je vykreslit tzv. Newtonovy fraktály, tedy oblasti v komplexní rovině takové, že když v nich zvolíme počáteční odhad kořenu pro Newtonovu metodu, tak dokonvergujeme k určitému kořenu. Fraktál vykreslete pro funkce $z^3 - 1$ a $z^6 + z^3 - 1$, kde z je komplexní číslo. Derivace těchto funkcí jsou $3z^2$, resp. $6z^5 + 3z^2$. Pro výpočet a vykreslení můžete použít Pythonní kód přiložený k zadání.

Poznámka Komplexní derivaci, pokud existuje, lze technicky spočítat stejně, jako reálnou derivaci, tedy pro ni platí stejné vzorce pro derivaci součtu, součinu a složené funkce.

Bonus Naleznete co nejzajímavější nebo nejhezčí Newtonův fraktál.

c) Simulujte na počítači (nebo napočítejte ručně) elementární buněčný automat s pravidlem 54 na mřížce délky 20 s periodickými podmínkami alespoň na 10 časových kroků (více určitě neuškodí). Na počátku má jedna libovolná buňka hodnotu 1 a zbylé 0. Výsledek zobrazte v časoprostorovém diagramu (jako na obr. 1 z textu seriálu).

d) Simulujte hrubnutí 1D povrchu pomocí modelu náhodné depozice popsaném v seriálu. Povrch má rozměr $L = 100$, na počátku je zcela hladký. Nakreslete graf závislosti hrubosti W na čase pro alespoň 10^8 kroků (jeden krok = jedna nová částice), výsledek diskutujte.



Řešení III. série

Úloha III.1 ... zpomalená

3 body; průměr 2,61; řešilo 57 studentů

Představme si, že na kameru se snímkovou frekvencí 24 snímků za sekundu (uvažujme časově rovnoměrně rozložené a dokonale ostré snímky) natočíme let vrtulníku s otáčkami hlavního rotoru 2900 ot./min. Následně si záznam přehrajeme. Jaká bude zdánlivá frekvence otáček rotoru na záznamu?

Michal se díval z okna koleje na vrtulník.

Frekvencia otáčania rotora je

$$f_r = 2900 \text{ min}^{-1} = \frac{145}{3} \text{ s}^{-1}.$$

Za čas, ktorý uplynie medzi dvoma po sebe vytvorenými snímkami, sa rotor otočí N krát

$$N = \frac{f_r}{f_k} = \frac{145}{72},$$

kde f_k je snímková frekvencia kamery 24 s^{-1} . Na snímkach nie je vidieť celé otáčky, iba posun voči predošlej polohe, preto sa zdá, že rotor medzi jednotlivými snímkami vykoná otočenie len o ΔN . To získame ako

$$\Delta N = N - k,$$

kde k je také celé číslo, aby $|\Delta N|$ bola čo najmenšia (teda k je celá časť N). Potom zdánlivá frekvencia otáčania rotora je

$$f' = \Delta N f_k = \frac{1}{72} f_k = \frac{1}{3} \text{ s}^{-1}.$$

Zdanlivá frekvencia otáčania rotora na snímkoch je $1/3 \text{ s}^{-1} = 20 \text{ ot./min}$.

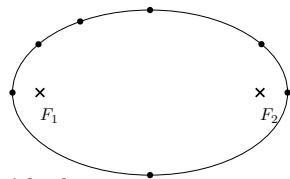
Daniela Pittnerová
daniela@fykos.cz

Úloha III.2 ... zrychleníčko, zrychlení

3 body; průměr 2,20; řešilo 46 studentů

Na obrázku vidíte náčrt elipsy s ohnisky F_1 a F_2 a několika vyznačenými body na ní. Uvažujte, že elipsa znázorňuje trajektorii nějakého hmotného bodu. Znázorněte do obrázku zrychlení, která působí na hmotný bod v jednotlivých vyznačených bodech dráhy pro dvě situace (jde o směry a vzájemné poměry zrychlení (které je větší/menší) v různých bodech v rámci jednoho náčrtu).

- V ohnisku F_1 je umístěno hmotné těleso, kolem kterého hmotný bod obíhá. Uvažujeme, že platí 2. Keplerův zákon.
- Těleso má konstantní velikost rychlosti, pouze se pohybuje po elipse.



Karel na konferenci slyšel, že s takovými úlohami mají problémy i vysokoškolační.

a)

Ako prvé si musíme uvedomiť, čo za druh zrýchlenia pôsobí v prípade klasickej Keplerovej úlohy Slnko-jedna planéta. Vezmeme si na počiatku teleso v nejakej vzdialenosti od Slnka a udelíme mu rýchlosť, menšiu ako je kruhová rýchlosť v tejto vzdialenosti smerom kolmo od spojnice teleso-Slnko. Zo základov nebeskej mechaniky vieme, že teleso sa bude pohybovať po elipse, ktorej afélium (najvzdialenejší bod dráhy od Slnka) bude práve v bode, odkiaľ sme teleso vypustili. Jediná sila, ktorá bude v takomto prípade pôsobiť na nami vypustené teleso, bude príťažlivá gravitačná sila medzi telesom a Slnkom. Pre ľubovoľnú silu pôsobiacu na teleso s konštantnou hmotnosťou platí, že táto sila uvádza teleso do pohybu so zrýchlením, ktoré je rovné

$$a = \frac{F}{m},$$

kde F je sila pôsobiaci na teleso a m je hmotnosť daného telesa. Môžeme si všimnúť, že z tohto vzťahu si vieme prirodzene definovať hmotnosť ako schopnosť telesa klásť odpor voči pôsobeniu vonkajších síl. Sila pôsobiaci na toto teleso je v našom prípade rovná Newtonovskej gravitačnej sile

$$F_g = -\frac{GMm}{r^3} \mathbf{r},$$

kde G je gravitačná konštanta, M je hmotnosť centrálného telesa (v našom prípade Slnka) a \mathbf{r} je polohový vektor voči Slnku. Ďalej je vhodné spraviť si transformáciu kartézskych súradníc s počiatkom v strede elipsy, na kartézske súradnice so stredom v Slnku. Potom y ová súradnica Slnka je totožná s y súradnicou stredu elipsy, avšak x ová súradnicu musíme posunúť o

$$f = \sqrt{a^2 - b^2},$$

kde a , b sú hlavné a vedľajšie polosi elipsy. Potom nové súradnice budú:

$$\begin{aligned} x' &= x + f, \\ y' &= y. \end{aligned}$$

Ak do vzorca pre zrýchlenie dosadíme náš vzorec pre silu a doň dosadíme za \mathbf{r} polohu bodu v nových súradniciach, tak výsledný vzťah pre veľkosť zrýchlenia pre ľubovoľný bod ležiaci na elipse bude

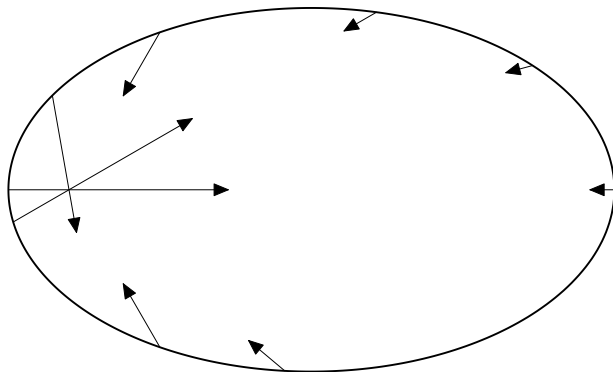
$$a_d = \frac{GM}{x'^2 + y'^2} = \frac{GM}{(x + \sqrt{a^2 - b^2})^2 + y^2}.$$

Po dosadení do tohto vzorca vieme určiť presnú veľkosť. Avšak naším cieľom je toto zrýchlenie zakresliť. Keďže smer zrýchlenia je od daného bodu na elipse smerom k Slnku, v našom prípade smeruje vektor zrýchlenia z daného bodu na elipse, do ohniska F_1 .

Ak si vhodne zvolíme mierku obrázku tak s týmito informáciami je jednoduché vkresliť vektory zrýchlenia do obrázku. Vyzeráť by to mohlo asi ako na Obrázku 1.

b)

Predpokladajme teraz že teleso sa znova hýbe po tej istej elipse, a to napriek prítomnosti akejkoľvek gravitačnej alebo inej sily. Môžeme si predstaviť napríklad vesmírnu loď ktorá niekde v priestore jazdí dookola po elipse, spaľujúc pritom palivo na to, aby si udržala požadovanú dráhu. Vieme že zrýchlenie pôsobiaci na teleso si vieme vždy rozdeliť na normálovú zložku,



Obr. 1: Výsledok prípadu a).

ktorá spôsobuje zakrivenie dráhy, a na tangenciálnu zložku, ktorá spôsobuje zmenu rýchlosti telesa. Keďže teleso si po celý čas udržiava rovnakú rýchlosť, je tangenciálna zložka zrýchlenia nulová, a smer zrýchlenia je teda totožný s normálou k dotyku v danom bode.

Úlohu si rozdelíme na dve časti. Najprv budeme hľadať, ako vyzerá smerový vektor zrýchlenia, t.j. normála k danej krivke. Potom si zrátame, akú veľkosť má zrýchlenie v závislosti na polohe. Keďže sa jedná o geometrickú úlohu, nemusíme nájsť explicitný predpis pre priamku, na ktorej leží normálový vektor v danom bode. Stačí nám vedieť, že daná priamka bude prechádzať cez nami zvolený bod, a bude rovnobežná s vektorom gradientu elipsy (ako implicitnej funkcie), ktorý zo svojej prirodzenej definície je vnímaný ako vektorový operátor určujúci normálu k nejakej krivke či ploche. Bez znalostí vyššej matematiky, skrátka vezmeme pravítko s ryskou a nájdeme kolmicu na dotyku v nejakom bode. Poznámka pre prípadných záujemcov, matematicky-analyticky by sme to spočítali takto:

Elipsa je popísaná implicitne krivkou

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Gradientom tejto krivky, a teda nami hľadaným vektorom je

$$\left[\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2} \right].$$

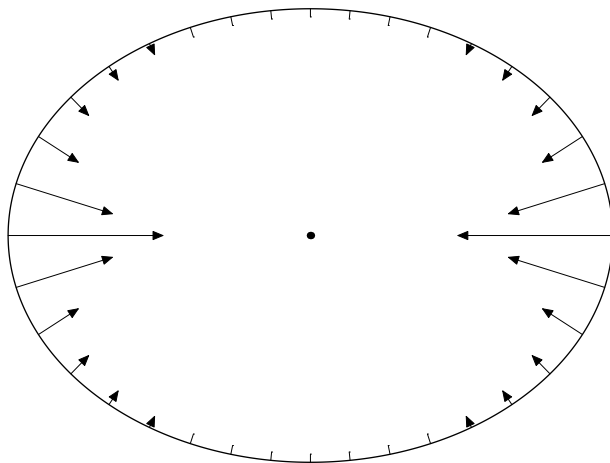
Na základe týchto informácií vieme ľubovoľnému bodu priradiť smer zrýchlenia.

Veľkosť dostredivého zrýchlenia ("šípka" vektora bude teda smerovať vždy smerom dovnútra elipsy) je potom daná vzťahom

$$a_d = \frac{v^2}{R},$$

kde rýchlosť v je po celý čas konštantná a polomer krivosti elipsy R v nejakom bode, je daný vzťahom

$$R = a^2 b^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} \right)^{\frac{3}{2}},$$



Obr. 2: Výsledek případu b).

kde x a y sú súradnice daného bodu. Dosadením vzťahu pre polomer krivosti v nejakom bode do vzťahu pre veľkosť dostredivého zrýchlenia máme vzorec, z ktorého vieme dopočítat veľkosť zrýchlenia v ľubovoľnom bode na elipse, pri daných počiatočných podmienkach. Po zakreslení do obrázku s použitím takto odvodených informácií by mal vyzerat ako Obrázek 2.

Jakub Jambrich
jakubj@fykos.cz

Úloha III.3 ... IDKFA

6 bodů; průměr 2,16; řešilo 31 studentů

Vypálili jste na impa z plazmové pušky, která střílí stabilní shluk částic s rovnoměrným rozdělením podélné rychlosti v intervalu $\langle v_0, v_0 + \delta v \rangle$ (příčná rychlost je nulová) a s celkovou energií E_0 . Hlaveň pušky má průřez S a pulz trvá nekonečně krátký čas. Jak daleko musí imp stát, aby se mu nic nestalo? Předpokládejte, že jeho kůže bez problémů uchladí na malém prostoru tepelný tok q .

Na DOOMa si vzpomněl Aleš.

Kinetická energie částic je přímo úměrná druhé mocnině jejich rychlosti. Rozdělme tedy celé spektrum rychlostí na úseky o délce Δv . Protože délku jednotlivých úseků můžeme zvolit libovolně malou, můžeme předpokládat, že všechny částice z daného úseku mají stejnou rychlost v . Kinetická energie daného úseku potom bude $\Delta E_k = kv^2 \Delta v$ (Δv tady vyjadřuje počet částic s rychlostí v daném úseku), kde k je nějaká konstanta, kterou dále spočítáme.

Pokud sečteme ΔE_k ze všech úseků, dostaneme energii celého svazku částic, neboli E_0 . Pokud umíme integrovat, nahradíme konečné rozdíly Δ diferenciály d a čeká nás jednoduchý

výpočet

$$E_0 = \int_{v_0}^{v_0+\delta v} dE_k = \int_{v_0}^{v_0+\delta v} kv^2 dv = \frac{k}{3} \left((v_0 + \delta v)^3 - v_0^3 \right),$$

$$k = \frac{3E_0}{(v_0 + \delta v)^3 - v_0^3}. \quad (1)$$

Pokud zatím integrovat neumíme, můžeme se pokusit integrál nahradit sumou. Označíme-li počet všech úseků

$$n = \frac{\delta v}{\Delta v},$$

přičemž rychlost v j -tém úseku (číslijeme od 1) bude $v_j = v_0 + j\Delta v$, dostáváme rovnici

$$E_0 = \sum_{j=1}^n \Delta E_{k,j} = \sum_{j=1}^n k (v_0 + j\Delta v)^2 \Delta v = k\Delta v \sum_{j=1}^n (v_0^2 + 2jv_0\Delta v + j^2\Delta v^2) =$$

$$= k\Delta v \left(nv_0^2 + 2v_0\Delta v \frac{n(n+1)}{2} + \Delta v^2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right),$$

kde po dosazení za n a za předpokladu libovolně malého Δv (kdy můžeme využít odhad $n+1 \approx n$) dostáváme

$$E_0 = k \left(v_0^2 \Delta v + v_0 \Delta v^2 + \frac{1}{3} \Delta v^3 \right) = \frac{k}{3} \left((v_0 + \Delta v)^3 - v_0^3 \right),$$

což je to samé, co jsme odvodili výše.

Nyní uvažujme, že imp stojí ve vzdálenosti x od pušky. V čase t na něj za nějaký malý časový úsek Δt dopadnou částice z rychlostního intervalu $\langle v, v + \Delta v \rangle$, pro které platí

$$v = \frac{x}{t},$$

$$v + \Delta v = \frac{x}{t - \Delta t},$$

$$\Delta v = \frac{x}{t - \Delta t} - \frac{x}{t} = x \frac{\Delta t}{t(t - \Delta t)}.$$

Za předpokladu, že Δt zvolíme dostatečně malé, můžeme Δ nahradit diferenciálem a psát

$$dv = x \frac{dt}{t^2} = \frac{v^2}{x} dt.$$

Kinetickou energii těchto částic můžeme spočítat jako $dE_k = kv^2 dv$. Pro výkon svazku potom platí

$$P = \frac{dE_k}{dt} = kv^2 \frac{dv}{dt} = \frac{kv^4}{x}.$$

Z tohoto vzorce vyplývá, že největší výkonu bude dosaženo pro největší rychlost, což je $v_0 + \delta v$.

Můžeme předpokládat, že částice dopadají rovnoměrně na část povrchu impa o obsahu S . Maximální výkon, který imp zvládne absorbovat, tak bude $P = qS$. Dostáváme rovnici

$$qS = \frac{k(v_0 + \delta v)^4}{x},$$

ze které po vyjádření x a dosazení za k z (1) vyplývá

$$x = \frac{3E_0}{qS} \frac{(v_0 + \delta v)^4}{(v_0 + \delta v)^3 - v_0^3}.$$

Spočítali jsme, v jaké nejmenší vzdálenosti od zbraně může imp stát, aby mu plazmový výstřel nic neudělal. Kdo by čekal, že fyzika DOOMa bude *takhle* zajímavá?

Poznámky k došlým řešením

Většina řešitelů chybovala už v samotné úvaze, když chtěla maximální tepelný tok, který imp vydrží, porovnávat s dlouhodobým průměrem výkonu celého svazku. Taková úloha je samozřejmě výrazně jednodušší a proto byla hodnocena maximálně třemi body.

Správná úvaha vychází z toho, že aby imp přežil, musí být výkon v každém okamžiku menší než maximální výkon, který imp vydrží, tedy qS .

Jáchym Bártík
tuaki@fykos.cz

Úloha III.4 . . . upuštěná propiska

7 bodů; průměr 4,21; řešilo 33 studentů

Propisku (tuhou tyč) upustíme na stůl tak, že během svého letu svírá úhel α s vodorovnou rovinou. Jakou rychlostí dopadne její druhý konec (ten, co se stolu dotkne jako druhý), jestliže jsme těžiště upustili z výšky h ? Všechny srážky jsou nepružné a tření mezi stolem a koncem propisky dostatečně velké.

Bonus Spočítejte, jaký musíme zvolit úhel α , aby druhý konec dopadl s co nejvyšší rychlostí. Pro jaké výšky se vyplatí propisku naklonit? *Matěj se nudil.*

Propiska nejdříve padá volným pádem (bez jakékoliv rotace). Potom její dolní konec dopadne na zem, přičemž zůstane zachován její moment hybnosti kolem bodu dopadu. Jelikož uvažujeme nepružnou srážku, tak se propiska neodrazí. Pohyb propisky se tak změní z posuvného na otáčivý. Protože uvažujeme velké tření, spodní konec neproklouzne, bude se dotýkat pořád stejné části stolu a propiska se tak bude otáčet kolem tohoto bodu. Při tomto otáčení jí bude pořad urychlovat tíhové zrychlení. Řešení si rozdělíme na tyto tři části.

Pro výpočet potřebujeme znát i délku propisky. Tu si označíme l .

Volný pád

Původní výška spodního konce je

$$h - \frac{l}{2} \sin \alpha.$$

Ta bude rovna $gt^2/2$, kde t je čas pádu. Nás ale zajímá rychlost, kterou tužka během pádu nabere, $v = gt$. Dosazením dostáváme výsledek známý i ze zákona zachování energie

$$h - \frac{l}{2} \sin \alpha = \frac{v^2}{2g},$$

$$v = \sqrt{2g \left(h - \frac{l}{2} \sin \alpha \right)}.$$

Srážka

Nyní hledáme úhlovou rychlost, kterou se tužka začne otáčet kolem bodu dotyku po dopadu na stůl. Srážka je nepružná, takže nemůžeme použít zákon zachování energie (nevíme, kolik se přeměnilo na teplo, vibrace). Zároveň také nemůžeme předpokládat, že si druhý konec zachová svou rychlost. Musíme použít zákon zachování momentu hybnosti.

Na tužku působí dvě různé vnější síly. Jedna je v bodě nárazu. Tímto bodem, ale prochází osa otáčení tužky. Rameno této síly je tedy nulové, takže na tužku působí nulovým momentem síly.¹ Druhá síla je tíhová. Srážka nastane ale v jednom okamžiku, takže tato síla nestihne nějak změnit hybnost nebo moment hybnosti tužky. To započítáme až později, během otáčivého pádu. Z toho vyplývá, že její moment hybnosti L je během srážky konstantní.

Vycházíme tedy z toho, že moment hybnosti těsně před nárazem je stejný jako po nárazu.

Moment hybnosti hmotného bodu spočítáme jako

$$L = pr = mvr,$$

kde m je hmotnost bodu, v je jeho rychlost a r je vzdálenost od osy otáčení (tedy od bodu dotyku se stolem) měřena kolmo na směr rychlosti. Pokud je těleso tuhé a nerotuje (tzn. všechny jeho body mají stejnou velikost i směr rychlosti), tak si ho pro výpočet momentu hybnosti můžeme nahradit hmotným bodem v jeho těžišti. Rychlost tužky má pouze svislou složku, kolmá vzdálenost od osy otáčení je tedy vodorovná vzdálenost těžiště od osy $r = \frac{l}{2} \cos \alpha$. Počáteční moment hybnosti je

$$L = mv \frac{l}{2} \cos \alpha.$$

Pro otáčivý pohyb tužky těsně po srážce platí $L = J\omega$, kde ω je úhlová rychlost otáčení kolem dané osy a J je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k této ose. Pro tyč, otáčející se kolem osy na ni kolmé a procházející jejím koncem, platí vzoreček $J = ml^2/3$, proto

$$\frac{1}{2} mvl \cos \alpha = \frac{1}{3} ml^2 \omega_0,$$

$$\omega_0 = \frac{3v}{2l} \cos \alpha,$$

kde ω_0 je okamžitá úhlová rychlost hned po srážce.

¹Tato úvaha není dokonalá, protože nefunguje pro „nekonečné“ síly. Ty se v dostatečně zjednodušeném modelu s nulovým časem srážky a nárazem v jednom bodě skutečně vyskytují. To, že kontakt s podložkou neovlivňuje moment hybnosti, je ale rozumný předpoklad.

Otáčivý dopad

Tužka ale dopadne s vyšší úhlovou rychlostí než jakou měla hned po srážce. Tuto rychlost už můžeme vypočítat ze zákona zachování energie. Během tohoto otáčivého pádu se poloha jejího těžiště sníží o $\Delta h = \frac{l}{2} \sin \alpha$. Kinetická energie se tedy zvýší o

$$\Delta E = \frac{1}{2} l m g \sin \alpha .$$

Podle vzorce pro kinetickou energii otáčivého pohybu dostáváme

$$\Delta E = \frac{1}{2} J \omega_1^2 - \frac{1}{2} J \omega_0^2 = \frac{1}{6} m l^2 (\omega_1^2 - \omega_0^2) ,$$

kde ω_1 je úhlová rychlost při dopadu druhého konce na stůl. Ze zákona zachování energie

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} m l^2 (\omega_1^2 - \omega_0^2) &= \Delta E = \frac{1}{2} l \sin \alpha m g , \\ \omega_1 &= \sqrt{\frac{3g \sin \alpha}{l} + \omega_0^2} . \end{aligned}$$

Dosadíme předchozí výsledky

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{3g \sin \alpha}{l} + \frac{9v^2}{4l^2} \cos^2 \alpha} , \\ &= \sqrt{\frac{3g \sin \alpha}{l} + \frac{9g}{2l^2} \cos^2 \alpha \left(h - \frac{l}{2} \sin \alpha \right)} \end{aligned}$$

a vyjádříme rychlost v_1 , se kterou dopadá druhý vrchol na stůl

$$v_1 = l \omega_1 = \sqrt{3gl \sin \alpha + \frac{9g}{2} \cos^2 \alpha \left(h - \frac{l}{2} \sin \alpha \right)} .$$

Bonus

Hledáme úhel α tak, abychom maximalizovali rychlost dopadu v_1 . Rychlost v_1 je maximální, když je výraz pod odmocninou maximální. To musí nastat buď pro některý hraniční úhel ($\alpha = 0$ je nejmenší možný, pro $h \geq l/2$ je největší možný 90° a pro $h < l/2$ je to $\arcsin(2h/l)$) nebo nulovou derivaci

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{d\alpha} &= 0 , \\ 3l \cos \alpha - 9h \cos \alpha \sin \alpha + \frac{9l}{2} \cos \alpha \sin^2 \alpha - \frac{9l}{4} \cos^3 \alpha &= 0 , \end{aligned}$$

Jedním řešením je $\cos \alpha = 0$, tedy $\alpha_1 = 90^\circ$.

$$1 - \frac{3h}{l} \sin \alpha + \frac{3}{2} \sin^2 \alpha - \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \sin^2 \alpha = 0 ,$$

$$1 - \frac{12h}{l} \sin \alpha + 9 \sin^2 \alpha = 0 ,$$

$$\sin \alpha = \frac{2h}{3l} \pm \frac{1}{3} \sqrt{4 \frac{h^2}{l^2} - 1} .$$

Vidíme, že řešení kvadratické rovnice existuje, jen pokud $h \geq \frac{l}{2}$. To dává smysl, ale otázkou zůstává, co je pro nás výhodnější pro $h < l/2$, nechat propisku padat horizontálně ($\alpha = 0$) nebo ji položit jedním koncem na zem ($\alpha = \arcsin(2h/l)$)?² Pro volný horizontální pád máme $v_a = \sqrt{9gh/2}$ a pro otáčivý pád $v_b = \sqrt{3gl \sin \alpha}$, kde $2h = l \sin \alpha$, tedy $v_b = \sqrt{6gh}$. Pro $h < l/2$ dopadne druhý konec nejvyšší rychlostí, když zvolíme maximální úhel α , tedy tužku opřeme jedním koncem o stůl.

Pro $h \geq l/2$ může existovat třetí nebo čtvrtý extrém, pokud

$$1 \geq \frac{2h}{3l} \pm \frac{1}{3} \sqrt{4 \frac{h^2}{l^2} - 1} \geq 0.$$

Nyní, pokud bude před odmocninou mínus, tedy

$$1 \geq \frac{2h}{3l} - \frac{1}{3} \sqrt{4 \frac{h^2}{l^2} - 1} \geq 0,$$

lze snadno ověřit, že výraz bude kladný, protože

$$\frac{2h}{3l} \geq \frac{1}{3} \sqrt{\left(\frac{2h}{l}\right)^2 - 1}$$

a zároveň hodnota výrazu nepřekročí 1, protože funkce je klesající a její počáteční hodnota v bodě $h = \frac{l}{2}$ je $\frac{1}{3}$.

V případě, že před odmocninou je plus, je druhá nerovnost splněna vždy, ale první nemusí být. Úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} 1 - \frac{2h}{3l} &\geq \frac{1}{3} \sqrt{4 \frac{h^2}{l^2} - 1}, \\ 1 - \frac{4h}{3l} + \frac{4h^2}{9l^2} &\geq \frac{4h^2}{9l^2} - \frac{1}{9}, \\ h &\leq \frac{5l}{6}. \end{aligned}$$

Čtvrtý extrém je možný pouze pokud $h \leq \frac{5l}{6}$. Pokud ale rozepíšeme výraz

$$\begin{aligned} &3gl \left(\frac{2h}{3l} \pm \frac{1}{3} \sqrt{4 \frac{h^2}{l^2} - 1} \right) + \\ &+ \frac{9g}{2} \left(1 - \left(\frac{2h}{3l} \pm \frac{1}{3} \sqrt{4 \frac{h^2}{l^2} - 1} \right)^2 \right) \left(h - \frac{l}{2} \left(\frac{2h}{3l} \pm \frac{1}{3} \sqrt{4 \frac{h^2}{l^2} - 1} \right) \right) \end{aligned}$$

a hledáme, kdy je větší pro znaménko plus, téměř vše se vykrátí a dopravujeme se k nerovnosti

$$4 \frac{h^2}{l^2} - 1 < 0.$$

²Řešení $\cos \alpha = 0$ sice matematicky smysl dává, ale pro $h < l/2$ to fyzikální smysl nedává, protože by na začátku byl spodní konec tužky pod úrovní stolu.

To neplatí nikdy (předpokládáme $2h \geq l$), proto znaménko plus nikdy nevede na globální maximum.

Lze ověřit, že derivace $\frac{dv_1}{d\alpha}$ v bodě $\alpha = 0$ bude kladná, tedy funkce bude rostoucí a v tomto bodě taky nebude extrém.

Zbývá vyšetřit, jestli se vyplatí tužku naklonit pod úhlem α , pro který platí $\sin \alpha = \frac{2h}{3l} - \frac{1}{3}\sqrt{4\frac{h^2}{l^2} - 1}$, nebo $\alpha = 90^\circ$. Jelikož bychom se při porovnávání příslušných rychlostí dopadu dostali k rovnicím vysokých stupňů, můžeme využít Wolfram Alpha. Zjistíme, že pro $h < (4/\sqrt{3} - 1)l/2$ je maximální rychlost $v_1 = \sqrt{3gl}$ s $\alpha = 90^\circ$ a pro větší výšky je to

$$v_1 = \sqrt{3gl \sin \alpha + \frac{9g}{2} \cos^2 \alpha \left(h - \frac{l}{2} \sin \alpha \right)}$$

s nakloněnou tužkou.

To dává celkem dobrý smysl – pro $\alpha = 90^\circ$ nezávisí rychlost dopadu na výšce h , takže pro velké výšky nebude maximální, zatímco pro malé výšky ($h \approx l/2$) se neoplatí nechat tužku nejdřív volně padat.

Matěj Mezera

m.mezera@fykos.cz

Úloha III.5 ... rozpad sem, rozpad tam 8 bodů; průměr 4,43; řešilo 30 studentů

Máme A_0 částic typu A , které se s rozpadovou konstantou λ_A rozpadají na částice typu B . Ty se zase s rozpadovou konstantou λ_B rozpadají na částice typu A a na začátku jich je B_0 . Najděte funkci udávající poměr počtů částic typů A a B v čase. *Jáchym vymyslel úlohu do Fyzikálního Náboje, ale nedovolili mu to, prý že by ji nikdo nespočítal. No tak ji dal sem.*

Označme dA_r počet částic typu A , které se rozpadnou za čas dt . Derivací rovnice radioaktivního (nebo chemického) rozpadu dostaneme

$$\frac{dN}{dt} = \frac{d(N_0 e^{-\lambda t})}{dt} = -\lambda N_0 e^{-\lambda t} = -\lambda N,$$

což můžeme dále upravit na

$$dN = -\lambda N dt.$$

Z toho vyplývá $dA_r = \lambda_A A dt$. Analogicky bude platit $dB_r = \lambda_B B dt$. Nyní je potřeba si uvědomit, že celkovou změnu počtu částic typu A za čas dt (kterou si označíme dA) spočítáme jako rozdíl počtu částic, které se z B rozpadnou na A , a částic, které se z A rozpadnou na B . Jinými slovy

$$dA = dB_r - dA_r = (\lambda_B B - \lambda_A A) dt = -dB. \quad (2)$$

Pro další řešení úlohy musíme zredukovat počet proměnných. Můžeme to udělat dvěma způsoby – buď si jednu proměnnou vyjádříme pomocí druhé, nebo budeme počítat s jejich podílem. První je mírně pracnější, druhý naopak vyžaduje řešení náročnějšího integrálu. Pro názornost si ukážeme oba postupy.

Označme $M = A_0 + B_0$. Protože se celkový počet částic zachovává (to vidíme z $dA + dB = 0$), platí $M = A + B$. Díky tomu si můžeme A vyjádřit jako $A = M - B$. Po dosazení do rovnice (2) dostáváme

$$\frac{dB}{dt} = \lambda_A A - \lambda_B B = \lambda_A (M - B) - \lambda_B B = \lambda_A M - (\lambda_A + \lambda_B) B.$$

Tuto diferenciální rovnici můžeme řešit separací proměnných

$$\int dt = \int \frac{dB}{\lambda_A M - (\lambda_A + \lambda_B) B}.$$

Integrál levé strany je zřejmý. Pravá strana je ve tvaru derivace nějaké funkce od B , dělené tou samou funkcí od B . Integrálem výrazů tohoto typu je vždy logaritmus dané funkce

$$t = -\frac{1}{\lambda_A + \lambda_B} \int \frac{-(\lambda_A + \lambda_B) dB}{\lambda_A M - (\lambda_A + \lambda_B) B} = -\frac{1}{\lambda_A + \lambda_B} \ln(\lambda_A M - (\lambda_A + \lambda_B) B) + C.$$

Z počátečních podmínek víme, že v čase $t = 0$ máme $B = B_0$. To vede na vztah pro výpočet integrační konstanty

$$C = \frac{1}{\lambda_A + \lambda_B} \ln(\lambda_A M - (\lambda_A + \lambda_B) B_0) = \frac{1}{\lambda_A + \lambda_B} \ln(\lambda_A A_0 - \lambda_B B_0),$$

což můžeme rovnou dosadit do předchozí rovnice, kde využijeme pravidla pro rozdíl logaritmů a dostáváme

$$t = \frac{1}{\lambda_A + \lambda_B} \ln \frac{\lambda_A A_0 - \lambda_B B_0}{\lambda_A M - (\lambda_A + \lambda_B) B}.$$

Vyjádríme si B

$$B = \frac{\lambda_A M - (\lambda_A A_0 - \lambda_B B_0) e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t}}{\lambda_A + \lambda_B}.$$

Nyní už nám jen zbývá spočítat hledaný poměr. Jednoduchou algebru můžeme přeskočit a dostáváme se rovnou k výsledku

$$\frac{A}{B} = \frac{M - B}{B} = \frac{\lambda_B (A_0 + B_0) e^{(\lambda_A + \lambda_B)t} + (\lambda_A A_0 - \lambda_B B_0)}{\lambda_A (A_0 + B_0) e^{(\lambda_A + \lambda_B)t} - (\lambda_A A_0 - \lambda_B B_0)},$$

který je řešením této úlohy.

Při využití druhého postupu nejprve označme $K = A/B$. Pro derivaci K podle času po dosazení z (2) dostáváme

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{A}{B} = \frac{\frac{dA}{dt} B - A \frac{dB}{dt}}{B^2} = (\lambda_B - \lambda_A K) (1 + K).$$

Zavedeme substituci $k = \lambda_A/\lambda_B$. Rovnici separujeme a vzniklý integrál řešíme pomocí parciálních zlomků

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{\lambda_B} \int \frac{dK}{(1 - kK)(1 + K)} = \\ &= \frac{1}{\lambda_B(1+k)} \int \frac{k}{1 - kK} + \frac{1}{1 + K} dK = \frac{-\ln(1 - kK) + \ln(1 + K)}{\lambda_B(1+k)} + C. \end{aligned}$$

V čase $t = 0$ jsme měli $K = K_0 = A_0/B_0$. Dosazením do rovnice si můžeme vyjádřit integrační konstantu

$$C = -\frac{1}{\lambda_B + \lambda_A} \ln \frac{1 + K_0}{1 - kK_0}.$$

Po úpravě můžeme vyjádřit funkci

$$\begin{aligned} K &= \frac{e^{(t-C)(\lambda_A + \lambda_B)} - 1}{ke^{(t-C)(\lambda_A + \lambda_B)} + 1} = \frac{(1 + K_0)e^{(\lambda_A + \lambda_B)t} - (1 - kK_0)}{(1 + K_0)ke^{(\lambda_A + \lambda_B)t} + (1 - kK_0)} = \\ &= \frac{\lambda_B(A_0 + B_0)e^{(\lambda_A + \lambda_B)t} + (\lambda_A A_0 - \lambda_B B_0)}{\lambda_A(A_0 + B_0)e^{(\lambda_A + \lambda_B)t} - (\lambda_A A_0 - \lambda_B B_0)}, \end{aligned}$$

kteřá je opět řešením této úlohy. Vidíme, že oba postupy vedly na stejný výsledek.

Všimněte si, že oba postupy fungují jenom za předpokladu $\lambda_A A - \lambda_B B \neq 0$. Můžeme ale ověřit, že pokud tato podmínka platí pro počáteční hodnoty, bude platit vždy (a jinak je úloha triviální).

Jáchym Bárták
tuaki@fykos.cz

Úloha III.P ... složený papír

8 bodů; průměr 5,40; řešilo 40 studentů

Každý to jistě někdy slyšel a určitě i zkusil: „List papíru nelze na půlku přeložit více než sedmkrát.“ Je to ale skutečně pravda? Najděte hraniční podmínky.

Kuba se nudil a skládal papír.

Je dobré si uvědomit, že hlavní problém je se stále se zvyšující tloušťkou, která narůstá exponenciálně³. Uvažujme několik vrstev papíru položených na sobě a přeložme celou hromadu napůl, výsledek by měl vypadat přibližně jako na obrázku 3.

Pokud si domyslíme třetí rozměr, bude mít každá vrstva tvar povrchu válce. Ten má nulovou Gaussovu křivost, díky čemuž máme možnost tento tvar složit z listu papíru. Nyní můžeme provést další přehyb okolo osy ležící v zatím rovinné části papíru. Tuto osu můžeme volit více způsoby. Buď osu přehybu zvolíme rovnoběžně s první osou, nebo k ní kolmo, nebo s ní svírající obecný úhel. Pokud zvolíme osu rovnoběžně, vytvoříme další válec s nulovou křivostí, kdežto pokud zvolíme kolmo k původní, vytváříme povrch toru, který má křivost nenulovou, a proto klade papír mnohem větší odpor, protože se musí deformovat i v ploše papíru⁴. Proto budeme uvažovat papír efektivně jednodimenzionální, jako bychom napůl přehýbali dlouhý a úzký pás papíru.

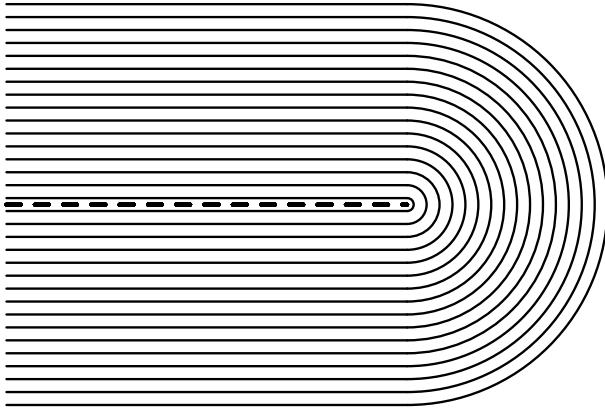
Dále si všimněme, že při přehybu napůl polovina každé vrstvy skončí nad střední rovinou⁵ a druhá pod ní, což znamená, že touto rovinou musí procházet tolik vrstev, kolik vrstev přehýbáme. Z toho rovnou můžeme vyvodit že papír nelze přehýbat donekonečna, protože kvůli zachování celkového objemu bychom potřebovali šířku paklíku ztenčovat donekonečna, což ale evidentně nelze⁶.

³Můžete si sami spočítat, že běžný papír přeložený dvačtyřicetkrát napůl by byl vysoký až na oběžnou dráhu měsíce.

⁴Při vnějším okraji se natahuje a při vnitřním se krabatí, jak si můžete sami doma vyzkoušet.

⁵V obrázku vyznačena čárkovaně.

⁶Pokud bychom skládali papír do harmoniky, toto omezení není a můžeme ho přeložit vícekrát než u překládání napůl.



Obr. 3: Obrázek ilustrující jak vypadá přeložení, když překládáme více vrstev papíru najednou.

Lze tedy udělat horní odhad pro maximální počet přehybů. Představme si stav jako na obrázku 4. Pak můžeme spočítat celkovou délku papíru potřebnou pro vytvoření takového obrazce pro daný počet vrstev. Označme d tloušťku papíru a l celkovou délku potřebného papíru. Uvažujme situaci rovnou s 2^{n-1} vrstvami, což je stav po $n-1$ přehybech napůl. Uvědomme si, že protože délka oblouku roste s jeho poloměrem lineárně, součet obvodů vnějšího a vnitřního oblouku je stejný jako dvojnásobek délky uprostřed vrstvy. Totéž platí pro další vrstvy. Tedy celková délka 2^{n-1} vrstev o poloměrech od 0 do $2^{n-1}d$ je stejná jako délka 2^{n-1} vrstev o poloměru $2^{n-1}d/2$. Dosazením dostáváme vzorec pro délku pro n vrstev papíru

$$l = \frac{\pi}{2} 2^{2n-2} d \frac{\pi}{8} 4^n d, \quad (3)$$

z čehož dokážeme vyjádřit maximální počet přehybů n pro fixní l

$$n_{\max} = \log_4 \left(\frac{8l}{\pi d} \right) = \log_4 \left(\frac{8}{\pi} \eta \right), \quad (4)$$

kde jsme zavedli $\eta = \frac{l}{d}$ jako bezrozměrný parametr překládaného papíru.

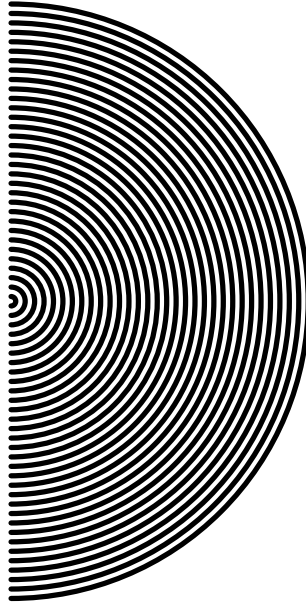
Pokud bychom tento odhad chtěli zpřesnit, musíme uvažovat i papír spotřebovaný na všechny předchozí přehyby. Získáme tak model přehybů odpovídající obrázku 5.

Celkovou délku papíru získáme sumou přes všechny přehyby, kde délka každého přehybu je dána vzorcem (3), takže pro n přehybů dostáváme

$$l = \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{8} 2^{2k} d.$$

Tuto sumu ale dokážeme převést na součet geometrické řady

$$l = \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{8} 2^{2k} d = \frac{\pi d}{8} \sum_{k=1}^n 4^k = \frac{\pi d}{2} \frac{4^n - 1}{4 - 1} \approx \frac{\pi d 4^n}{6}.$$



Obr. 4: Výsledný tvar, který už vícekrát nejde přeložit

Poslední aproximaci lze použít s rozumnou přesností pro $n \geq 2$. Ze vzorce vidíme, že na přidání dalšího přehybu potřebujeme nikoliv dvojnásobný pás papíru, ale dokonce čtyřnásobný⁷. Maximální počet přehybů je pak dán vzorcem

$$n_{\max} \approx \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{6}{\pi} \eta \right). \quad (5)$$

Dosažením hodnot pro papír formátu A4, pokud děláme přehyby jen po tom samém směru (tak, abychom přehýbali tu delší hranu), které jsme odhadli na $d = 0,1$ mm, $l = 300$ mm, $\eta = 3000$, získáváme $n \approx 6.24$. To se nám skutečně potvrdilo (konzistentně s tím, že se jedná o horní odhad), když jsme překládali papír a tímto způsobem ho skutečně přehli pětkrát, tak přehyb pošesté vypadal sice obtížně, ale nezdál se nemožný. Ale pak by rozhodně nešel papír přehýbat v druhém směru, protože by nám nedržely vrstvy na sobě.

Nyní ale máme teoreticky ještě druhý směr, ve kterém je 20 cm nevyužitého papíru. Bohužel ale už tloušťka není tloušťka papíru, ale součet všech vrstev z předchozího přehýbání. V našem příkladu je to $d = 0,1 \cdot 2^5$ mm = 3,2 mm, tudíž $\eta = 62,5$. Potom $n \doteq 3,45$, což se také potvrdilo, protože jsme papír přehli ještě třikrát ve druhém směru.⁸ Vidíme, že kancelářský papír formátu A4 lze přeložit napůl minimálně osmkrát, tedy často opakované tvrzení o sedmi přeloženích neplatí.

Pokud překládáme vrstvy střídavě nebo nějak jinak, musíme začít uvažovat ne o délce papíru, ale o celkové ploše papíru ztracené v přehybech. Ta je ale, protože papír má tvar

⁷To ale vyplývá už ze (4), pokud se nad ním trochu zamyslíme.

⁸Nutno podotknout, že po pěti přehybech jsme naměřili šuplerou tloušťku jen 3 mm, což je nižší hodnota než ta použitá v odhadech.



Obr. 5: Výsledný tvar, který již nejde vícekrát přeložit se zakreslením předchozích přehybů

válce, dána vzorcem (3) přenásobeném zbývajícím délkou v druhém směru. Proto, pokud chceme snížit množství plochy ztracené v posledních přehybech (kdy se ztrácí nejvíce papíru), musíme mít co nejmenší délku ve směru kolmém na přehýbání. Toho dosáhneme právě tehdy, když nejprve přehneme podél jedné strany maximální počet přehybů, které nám papír dovolí, a pak překládáme ve druhém směru. Z toho je vidět, že daný papír nemůžeme obecně přeložit vícekrát, pokud střídáme přehyby, než pokud přehýbáme papír nejdříve v jednom směru a pak v druhém směru. Jen pokud bychom měli papír s takovými rozměry, že maximální počet přehybů v obou směrech⁹ podle vzorce (5) vychází těsně menší, než nejbližší vyšší celé číslo, můžeme nějakým konkrétním proházením pořadí přehybů dosáhnout toho, že maximální počet zvýšíme o trochu v jednom směru na úkor směru druhého. Tím sice celkový součet nezaokrouhlených čísel klesne, ale po zaokrouhlení (samozřejmě dolů) získáme jeden přehyb navíc tím, že jeden ze směrů dostaneme přes celé číslo, zatímco to druhé si „nezkazíme“. Ale správné pořadí je nutné najít pro každé rozměry papíru zvlášť.

Ještě musíme říct, že všechny uvedené vzorce jsou jen horním odhadem, protože jsme neuvážovali papír ztrácející se jinak než ve válcových přehybech. Jeden ze zdrojů dalších ztrát byl popsán na začátku tohoto textu, tedy deformace papíru a z toho vyplývající menší doléhání papíru při přehybech. Z tohoto důvodu je též výhodné nestřídat směry a začít kratší stranou. Druhý problém souvisí s rozjžděním papíru, který překládáme. Jednak, když překládáme více vrstev, ve vrstvách na vnitřní straně se ztrácí mnohem méně, než na těch vnějších, čímž se vůči sobě konce jednotlivých vrstev posunou. Tomu se lze vyhnout nejlépe tak, že odhadneme posunutí v jednotlivých vrstvách a budeme dělat příslušné přehyby mírně asymetricky.¹⁰ Zároveň, pokud po překládání v jednom směru bude zbylý proužek příliš úzký, vrstvy při překládání ve směru druhém nebudou držet na sobě, což se stane například tehdy, pokud A4 překládáme nejdříve podél kratší strany. Co se týče síly potřebné k přeložení vrstvy, ta sice narůstá, ale je samozřejmě možné překládanou vrstvu rozložit na dílčí části, které lze přeložit zvlášť.¹¹ Proto

⁹V druhém směru ale musíme použít celkovou tloušťku po provedení přehybů ve směru prvním.

¹⁰Bohužel musíme pro každý přehyb počítat s posunutím ve všech dalších, což vyžaduje opravdu dokonalé plánování.

¹¹U prvního přehybu to sice nejde, ale na druhou stranu nepřekládáme železný plech.

jsme tento problém nepovažovali za omezující faktor.

Na závěr se sluší podotknout, že se tímto přístupem proslavila americká studentka Britney Gallivanová, která má díky tomu vlastní článek na anglické Wikipedii. S řešením, včetně experimentálního potvrzení hypotézy a nového rekordu v počtu přehnutí přišla na střední škole ve svých sedmnácti letech. My jsme získali trochu jiný vzorec, protože jsme řešení hledali nezávisle, takže jsme použili jiný předpoklad, kde bereme poloměr vrstvy. U nás to byl střed, u Gallivanové pak vnější okraj.

Poznámky k došlým řešením

Sešlo se mnoho způsobů řešení, některé čistě teoretické, jiné naopak byly velice experimentální. Někteří z vás jen vyjmenovali efekty, které se budou projevovat, zatímco jiným se i povedlo kvantifikovat, jak moc budou tím omezujícím faktorem. Většina se zabývala buď silou potřebnou k přehybu, nebo nutnými rozměry papíru pro daný počet přehybů, mnozí i vycházeli z práce Gallivanové. Nejvíce organizátory pobavilo řešení, kde některý z vás jako experimentální vzorek použil výpis z vysvědčení a přiložil fotodokumentaci.

Mikuláš Matoušek
mikulas@fykos.cz

Úloha III.E ... magneticky přitažlivá 12 bodů; průměr 9,92; řešilo 36 studentů

Společně se zadáním této série jsme vám rozeslali poštou plošný magnet (magnetickou fólii). Tento magnet je trochu jiný než tyčové magnety – v ploše se střídavě střídají severní a jižní pól. Díky tomu se při přiblížení k feromagnetickému povrchu uzavře skrz kov „magnetický obvod“ a magnet drží (např. na ledničce) a unese na sobě třeba i obrázek. Vašimi úkoly jsou:

- *Změřit plochu a tloušťku fólie, kterou využijete k experimentům.*
- *Změřit střední vzdálenost mezi dvěma nejbližšími stejnými magnetickými póly (dvojnásobek opačných).*
- *Změřit maximální užitečnou hmotnost (tedy hmotnost bez hmotnosti magnetu), kterou unese 1 cm² magnetu, je-li zatížení magnetu rovnoměrné, pokud magnet přichytíte zespo- da k vodorovně umístěnému cca. 1 mm tlustému plechu z magneticky měkké oceli.*

Nezapomeňte určit i chyby měření. Fólie, kterou jsme vám dodali, může být samolepicí (je přes ní bílá fólie a pod ní lepidlo). V tom případě bílou fólii nahraďte něčím, na co budete upevňovat užitečnou hmotnost.

Karel získal magnetickou fólii.

Teória

Na magnetickej fólii dochádza k striedaniu severného a južného pólu v pásach. Po priložení fólie k feromagnetickému povrchu dôjde k dočasnej magnetizácii materiálu. K odtrhnutiu fólie dôjde vtedy, keď tiažová sila pôsobiaca na jednotku plochy fólie (pri rovnomernom zaťažení) prekoná magnetickú silu, pôsobiacu medzi fóliou a feromagnetickým materiálom.

Postup pri experimente

Na to, aby sme zistili plochu a hrúbku fólie, ktorú budeme používať pri meraní, orežeme nepravidelnosti na okrajoch fólie a predelíme ju na polovicu. Následne pomocou posuvného meradla

zmeriame rozmery jednej polovice fólie. Plochu určíme ako $S = a \cdot b$ a celkovú chybu bude tvoriť len systematická chyba merania

$$\sigma_1 = \sqrt{(a\Delta b)^2 + (b\Delta a)^2}.$$

Druhú polovicu fólie využijeme na zistenie strednej vzdialenosti medzi najbližšími súhlasnými magnetickými pólmi, kedy fólie priložíme k sebe a budeme ich po sebe posúvať. V jednom zo smerov pohybu bude dochádzať ku skokom pri posúvaní fólii po sebe. Z týchto skokov dokážeme určiť vzdialenosť medzi pólmi, pretože jeden skok znamená presun daného pólu z nesúhlasného pólu druhej fólie na ďalší súhlasný pól. Označme počet týchto skokov k . Počet súhlasných pólov n na povrchu fólie teda bude $n = k + 1$. Priemernú strednú vzdialenosť medzi pólmi vyjadríme ako $d = l/k$, kde l je veľkosť posunutia pri preskakovaní fólii po sebe. Celkovú odchýlku vyjadríme ako

$$\sigma_2 = \frac{1}{k} \Delta l.$$

Na to, aby sme určili maximálnu užitočnú hmotnosť, ktorú magnet unesie, prípevníme naň mikroténové vrečko, do ktorého budeme postupne pridávať závažie, napríklad kryštálový cukor. Vrečko upevníme tak, aby ťažová sila pôsobila rovnomerne po celej ploche fólie. Pred začiatkom merania zvážíme samotnú fóliu. Po odtrnutí fólie zvážíme hmotnosť vrečka spolu s fóliou. Meranie opakujeme N krát ($N = 30$). Zo všetkých hodnôt vypočítame priemernú hmotnosť cukru m a jej štandardnú štatistickú odchýlku podľa vzťahu

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (m_i - m)^2}{(N - 1)N}}.$$

Systematickú chybu merania σ_B určíme ako nepresnosť použitej váhy. A teda celkovú chybu merania určíme pomocou vzťahu

$$\sigma_3 = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}.$$

Maximálnu užitočnú hmotnosť na jednotku plochy už ľahko dostaneme zo vzťahu $\rho = m/S$, pričom odchýlku merania dostaneme pomocou vzťahu

$$\sigma_4 = \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial S} \sigma_1\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial m} \sigma_3\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\rho}{S} \sigma_1\right)^2 + \left(\frac{\rho}{m} \sigma_3\right)^2}.$$

Výsledky merania

Namerané rozmery fólie sú $a = (69 \pm 1)$ mm, $b = (31 \pm 1)$ mm, $h = (1,58 \pm 0,03)$ mm. Teda plocha fólie je $S = (21,4 \pm 0,8)$ cm². Počet skokov k pri posúvaní fólii po sebe na vzdialenosti $l = (29,9 \pm 0,3)$ mm bol $k = 6$, teda priemerná stredná vzdialenosť medzi pólmi je $d = (4,98 \pm 0,05)$ mm. Hmotnosť samotnej fólie je $m_0 = (10,79 \pm 0,01)$ g. Fólia bola pri realizácii experimentu prichytená k doske z magneticky mäkkej ocele o hrúbke $(1,50 \pm 0,03)$ mm. V tabuľke 1 je uvedená hmotnosť cukru, pri ktorej sa fólia odtrhla. Nepresnosť merania je $\pm 0,01$ g.

Výsledná priemerná hmotnosť cukru je $m = (110,8 \pm 0,6)$ g. Z čoho dostávame pre maximálnu užitočnú hmotnosť na jednotku plochy hodnotu $\rho = (5,2 \pm 0,2)$ g·cm⁻².

Tab. 1: Nameraná maximálna hmotnosť

N	$\frac{m}{g}$	N	$\frac{m}{g}$	N	$\frac{m}{g}$
1	105,42	11	106,87	21	108,51
2	112,73	12	114,28	22	111,67
3	106,94	13	107,53	23	109,34
4	113,53	14	113,12	24	107,73
5	111,31	15	107,85	25	108,90
6	116,05	16	105,25	26	115,25
7	110,59	17	111,41	27	114,58
8	117,17	18	109,56	28	113,09
9	105,73	19	115,10	29	107,00
10	108,42	20	113,97	30	113,74

Tab. 2: Výsledky

h	$(1,58 \pm 0,03)$ mm
d	$(4,98 \pm 0,05)$ mm
S	$(21,4 \pm 0,8)$ cm ²
m	$(110,8 \pm 0,6)$ g
ρ	$(5,2 \pm 0,2)$ g·cm ⁻²

Diskusia

Hmotnosť, pri ktorej sa magnetická fólia odtrhla, pomerne výrazne menila svoju hodnotu pri konkrétnom meraní, čo je spôsobené tým, že je obtiažne rovnomerne rozložiť hmotnosť pridávaného závažia. Kvôli tomu môže nastať stav, v ktorom je určitý úsek fólie zatažený oveľa viac ako ostatné, čo spôsobí predčasné odtrhnutie fólie.

Taktiež nepresnosti merania rozmerov fólie sú spôsobené hlavne tým, že fólia nie je ideálne zastrihnutá na okrajoch. A ešte tým, že pri meraní rozmeru a a rozmeru b trochu pružila, čím sa jej rozmery deformovali.

Meranie nám taktiež ovplyvňuje aj to, ako veľmi sa zmagnetizuje feromagnetický materiál, keď naň priložíme magnetickú fóliu. To môže spôsobovať prípadné rozdiely v hodnotách ρ v závislosti od hrúbky materiálu a od jeho magnetickej tvrdosti. Na magneticky tvrdších materiáloch bude užitočná hmotnosť udržaná magnetom vyššia.

Záver

Zmerali sme rozmery magnetickej fólie a hmotnosť, ktorú unesie. Z týchto veličín sme potom spočítali plochu a užitočnú hmotnosť na jednotku plochy. Ďalej sme určili strednú vzdialenosť medzi súhlasnými magnetickými pólmí. Výsledné hodnoty sú zhrnuté v tabuľke 2.

Pavol Šimko
pavol.simko@fykos.cz

Úloha III.S ... na procházce s integrály 10 bodů; průměr 4,95; řešilo 19 studentů

- a) Vymyslete tři odlišné příklady markovovského procesu, z toho alespoň jeden fyzikální. Je procházka bez návratu markovovská? A co procházka bez křížení?
- b) Mějme 2D náhodnou procházku bez návratu na čtvercové síti s počátkem v bodě $(x, y) = (0, 0)$, která je omezena absorpčními bariérami $b_1: y = -5$, $b_2: y = 10$. Nalezněte pravděpodobnost, že v bariéře b_1 skončíme dříve než v b_2 .
- c) Proveďte simulaci pohybu brownovské částice ve 2D a vykreslete graf závislosti střední vzdálenosti od počátku na čase. Uvažujeme diskrétní čas a konstantní délku kroku (jeden krok simulace trvá $\Delta t = \text{konst}$, délka kroku je $\Delta l = \text{konst}$) a umožňujeme pohyb do libovolného směru, tj. každý krok je specifikován délkou a úhlem $\vartheta \in (0, 2\pi)$, přičemž všechny směry jsou stejně pravděpodobné. Zajímá nás především asymptotické chování, tedy vývoj střední vzdálenosti pro $t \gg \Delta t$.
- d) Chybová funkce je definována vztahem

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Tabelujte tuto funkci, tedy vypočítejte integrál pro mnoho různých x . Do řešení nevkládejte tabulku hodnot, ale graf funkce. Zkuste tuto funkci opět numericky zderivovat. Co dostanete?

- e) Najděte si definici hustoty pravděpodobnosti Maxwellova-Boltzmannova rozdělení $f(v)$, tedy rozdělení rychlostí molekul ideálního plynu. Spočítejte pak pomocí MC integrace střední hodnotu rychlosti definovanou

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} v f(v) dv,$$

přičemž pro vzorkování použijte náhodná čísla dle Maxwellova-Boltzmannova rozdělení získaná Metropolisovým-Hastingsovým algoritmem. Hodnotu pro konkrétní zvolené parametry srovnajte s hodnotou z literatury.

Mirek a Lukáš se náhodně procházejí do školy.

- a) Připomeňme, že Markovův proces jsme definovali jako náhodný proces, který nám umožňuje určit pravděpodobnost realizace určitého stavu systému (stav je dán hodnotou náhodné veličiny) v čase t_{i+1} zcela na základě znalosti stavu v čase t_i . Uvedme tři příklady Markovova procesu: matematický, fyzikální a „z běžného života“.
- (a) Mějme klobouk A obsahující 10 černých koulí a klobouk B , v němž je 10 bílých koulí. V každém kroku náhodně vybereme jednu kouli z klobouku A a jednu z klobouku B a vyměníme je. Sekvence náhodných proměnných představujících poměr černých ku bílým koulím v klobouku A je náhodný proces. Zároveň se jedná i o Markovův proces/řetězec, neboť znalost aktuálního (v čase t_i) poměru koulí v klobouku A jednoznačně udává i poměr koulí v klobouku B a na základě těchto znalostí dokážeme určit pravděpodobnost, s jako v klobouku A vzroste v dalším časovém kroku počet koulí jedné barvy o jedna, klesne o jedna, nebo se nezmění.
- (b) Fyzika je aplikací matematických modelů na dění kolem nás. Proto potřebujeme najít přírodní děj, pro jehož popis se používají náhodné procesy. Příkladem může být například vývoj počtu částic radionuklidu. Pokud známe počet částic v čase t , dokážeme

určit pravděpodobnostní rozdělení v čase $t + dt$ (zde bychom správně měli rozšířit naši definici na spojité plynutí času, můžeme ale uvažovat i model s konečnými časovými kroky Δt a konečnou pravděpodobností rozpadu každé částice v jednom kroku).

- (c) Označíme-li každý den jako slunečný, nebo deštivý, a víme, s jakou pravděpodobností přejde slunečný den v deštivý a naopak (a nebo nedojde ke změně), pak na základě dnešního stavu počasí dokážeme říct, s jakou pravděpodobností bude zítra slunečno či deštivo.

Třetí příklad je dobrou ukázkou toho, že každý jev lze modelovat jako markovovský. Totiž, abychom získali pravděpodobnost přechodu slunečného dne v deštivý, museli jsme provést statistiku na velkém počtu předchozích dní. Lze tedy namítnout, že na určení pravděpodobností realizace určitého stavu v příštím časovém kroku jsme potřebovali znát všechny předchozí. Podobně lze argumentovat, že téměř žádný fyzikální proces není markovovský, protože pro výpočet zrychlení z pohybové rovnice potřebujeme znát nejen polohy, ale i rychlosti, a ty získáme měřením polohy ve více časových bodech. Proto, když se mluví o (ne)markovosti určitého fyzikálního jevu, je vždy potřeba zmínit model, kterým jev popisujeme.

Co se týče zbylých dvou otázek na markovovskost náhodných procházek, ani jedna z uvedených nemá Markovovu vlastnost. Náhodná procházka bez návratu si kromě aktuální pozice vždy musí pamatovat i tu předešlou a náhodná procházka bez křížení musí mít v paměti celou trajektorie, tj. všechny pozice za celou dobu vývoje. Za markovovské bychom mohli tyto procházky považovat použitím „podvodu“ popsaného výše, kdy bychom za aktuální stav procházky prohlásili např. celou její trajektorii.

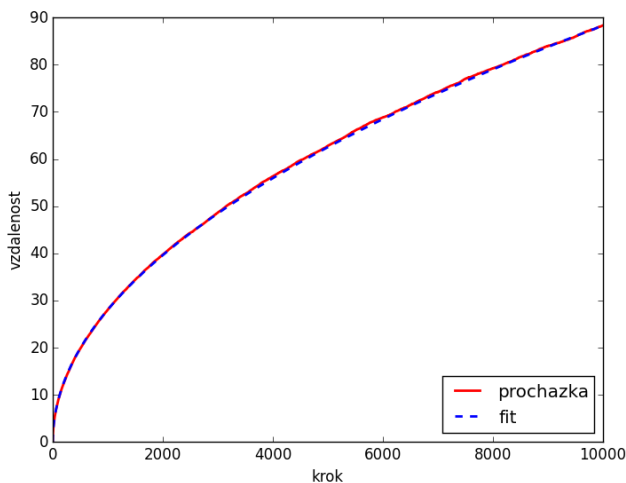
- b) K nalezení pravděpodobnosti, že procházka skončí dříve v dolní než horní bariéře, použijeme kód z textu seriálu. Do něj přidáme podmínky zastavení výpočtu a proměnnou, která obsahuje počet procházek L , které skončily v dolní bariéře. Také musíme přidat identifikátor, který si zapamatuje, jakým směrem byl proveden poslední krok, a nepovolí krok opačným směrem jako následující – tak zajistíme, že půjde skutečně o procházku bez okamžitého návratu. Hledaným řešením je poměr L/N , kde N je celkový počet procházek. Délku procházky přitom neomezujeme, protože bariéry jsou poměrně blízko počátku, a tedy procházky skončí po rozumném počtu kroků.

Na souboru $N = 10^7$ procházek jsme dostali pravděpodobnost 0.6562 skončení procházky v bariéře b_1 , tedy o něco méně než $2/3$, přičemž první tři platné číslice jsou s vysokou pravděpodobností přesné. Pro obyčejnou 2D procházku bychom dostali pravděpodobnost přesně $2/3$ (ne simulací, výpočtem), protože pohyb ve směru osy x můžeme zcela vypustit a jedná se pak o 1D problém, který jsme již prozkoumali v prvním dílu seriálu. V případě procházky bez návratu neexistuje dobrá 1D analogie, taková procházka vždy probíhá jedním směrem a pravděpodobnost nárazu do jedné bariéry je stejná jako do druhé. Pokud bychom krom zadané úlohy chtěli také nalézt průměrnou délku procházky, která se zastaví na nějaké bariéře, dostali bychom výsledek 57.27. U jednoduché procházky bychom dostali výrazně větší hodnotu než u procházky bez návratu, ta totiž zamezuje stavům, kdy se trajektorie „točí“ kolem jednoho místa a délka narůstá, aniž bychom se přiblížili k bariéře.

- c) K simulaci opět využijeme kód ze seriálu, nyní však budeme generovat náhodné reálné číslo ϑ v rozsahu od 0 do 2π a polohu v čase $t + \Delta t$ určíme podle vztahů

$$\begin{aligned}x(t + \Delta t) &= x(t) + \Delta l \cos \vartheta, \\y(t + \Delta t) &= y(t) + \Delta l \sin \vartheta.\end{aligned}$$

Pro jednoduchost volíme¹² $\Delta t = 1$, $\Delta l = 1$. Pro srovnání s pravoúhlo procházkou uvedenou v seriálu budeme generovat 10 000 procházek o délce 10 000. Graf střední vzdálenosti v závislosti na čase (na počtu kroků) je na obrázku 6. Zlogaritmujeme data a fitováním posledních 1 000 bodů lineární funkcí $f(x) = ax + b$ dostaneme hodnotu směrnice $a = 0,498 \pm 0,001$. Vzdálenost procházky od počátku je tedy opět úměrná druhé odmocnině počtu kroků. Stejný výsledek dostaneme pro každou 2D procházku, která má umožněn pohyb symetricky ve všech osách.



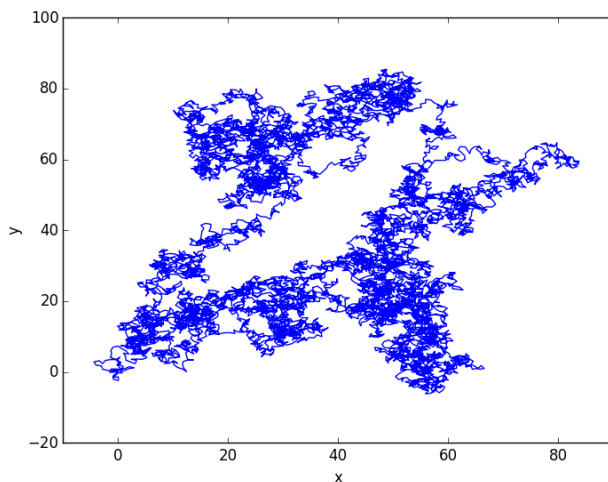
Obr. 6: Vzdálenost 2D procházky od počátku v závislosti na počtu kroků (čase). Graf vznikl průměrováním 10 000 procházek o délce 10 000 kroků. Mocnný fit byl proveden na posledních 1 000 bodech. Fit obecně nemusí dobře sedět i na prvních 9 000 bodech, ale může, jak je vidět a tomto příkladu.

Pro srovnání uvádíme i trajektorie procházek o délce 10 000 kroků a 200 000 kroků, obrázky 7 a 8. Zatímco v prvním případě odpovídá „všesměrová“ procházka lépe naší představě o pohybu Brownovy částice než pravoúhla procházka, při velkém počtu kroků už se rozdíly mezi diskretní a spojitou volbou směru stírají.

- d) Pro výpočet hodnot chybové funkce použijeme složené Simpsonovo pravidlo, neboť jde o neefektivnější nám známou¹³ metodu výpočtu jednorozměrných integrálů. Funkci přitom budeme tabelovat pro hodnoty $x \in \langle -5, 5 \rangle$, protože chybová funkce se chová zajímavě v okolí nuly, jinde je skoro konstantní. Integrál byl samplován $N = 1000$ body. Při této volbě je chyba řádu 10^{-15} , což je skoro strojová přesnost. Tato hodnota N je tedy rozumným kompromisem mezi dobou výpočtu a přesností. Samotnou funkci jsme tabelovali v $k = 10000$

¹²I kdybychom měli zadání např. střední rychlost částice, stále bychom volili tyto kroky, protože simulace je vhodné provádět v normalizovaných jednotkách. Obzvláště v kvantové fyzice by volba $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$ J·s namísto $\hbar = 1$ způsobila spoustu zbytečných numerických problémů.

¹³Samozřejmě existují daleko efektivnější metody, jejich implementace v Pythonu najdete např. v balíku `scipy.integrate`.



Obr. 7: Trajektorie 2D procházky o délce 10 000 kroků. V tomto měřítku je stále vidět, že se nejedná o spojitý proces, jednotlivé diskrétní kroky jsou ještě patrné.

bodech, důvodem je vhodný krok při opětovné derivaci. Tabeľovaná chybová funkce je vynesena v grafu 9.

Pokud chybovou funkci zderivujeme, analyticky dostaneme

$$(\operatorname{erf}(x))' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{d\left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)}{dx} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}.$$

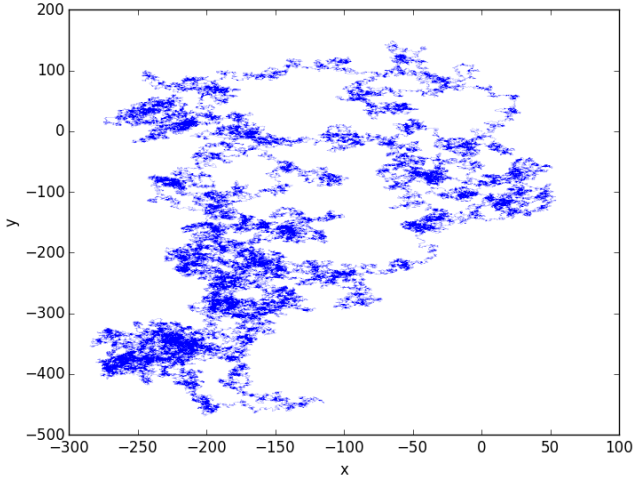
Pro numerickou derivaci použijeme metodu 4. řádu, která byla odvozena v minulém díle seriálu. Optimální krok této metody je řádu 10^{-4} , což skoro odpovídá rozestupu dvou hodnot naší tabeľované funkce. Provedením derivace skutečně dostaneme kýžený výsledek, jak je vidět v grafu 10.

- e) Maxwellovo-Boltzmannovo rozdělení, popisující rozdělení rychlostí částic ideálního plynu, má tvar¹⁴

$$f(v) = \begin{cases} \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} 4\pi v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}, & v \geq 0 \\ 0, & v < 0 \end{cases},$$

kde v je velikost rychlosti částice, m její hmotnost, k Boltzmannova konstanta a T termo-

¹⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell-Boltzmann_distribution



Obr. 8: Trajektorie 2D procházky o délce 200 000 kroků. V tomto měřítku již není poznat, zda byl proces v čase a prostoru diskrétní či spojitý.

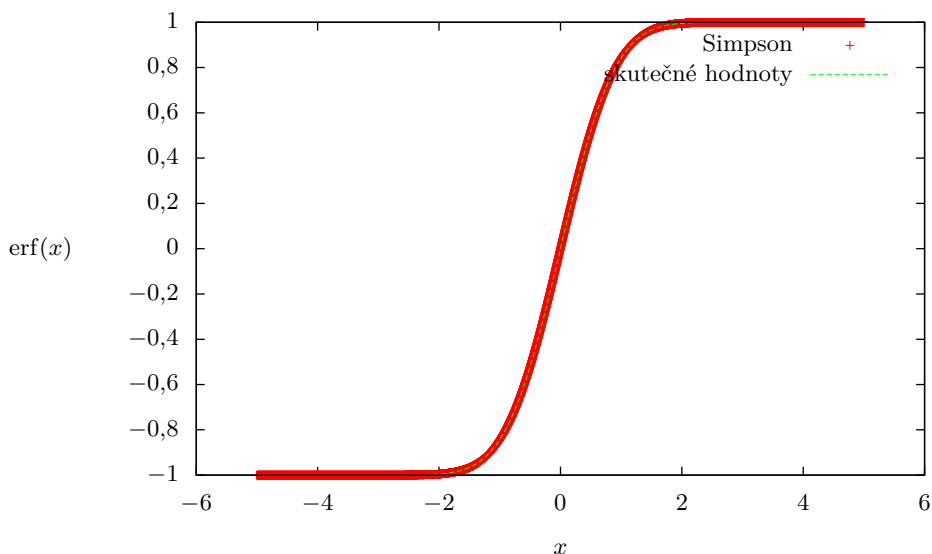
dynamická teplota. Střední hodnota rychlosti je pak z definice rovna

$$\begin{aligned}
 \langle v \rangle &= \int_0^\infty v f(v) dv = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} 4\pi \int_0^\infty v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv & / t = \frac{mv^2}{2kT}, dt = \frac{mv}{kT} dv \\
 &= \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \int_0^\infty t e^{-t} dt & / \text{per partes} \\
 &= \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \left([-te^{-t}]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t} dt \right) = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}.
 \end{aligned}$$

Ti z vás, kteří neumějí integrovat, mohou použít program Wolfram Alpha¹⁵, najít výsledný vzorec v literatuře, či v tabulkách rovnou najít číselnou střední hodnotu rychlosti pro zvolené parametry.

Nyní, když máme připraveny podklady pro ověření výsledku, se zabýváme samotným numerickým výpočtem. Střední hodnotu rychlosti budeme určovat pro dvouatomový plynný vodík ($m = 2m_p$, kde $m_p \doteq 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg je hmotnost protonu) při teplotě $T = 280$ K, což je rozumná fyzikální volba. Samozřejmě ideálním plynem lze modelovat mnoho jiných plynů za různých teplot, nejde tedy o jedinou možnou volbu. Pokud si vykreslíme Maxwellovo-Boltzmannovo rozdělení pro tyto hodnoty parametrů, zjistíme, že jej tvoří převážně jeden „kopeček“ s maximem kolem hodnoty $v \approx 1500 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ a šířkou řádově $2000 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ (bráno v polovině výšky „kopečku“, tedy jako tzv. FWHM). Tyto informace nám poslouží pro správné nastavení Metropolisova-Hastingsova algoritmu. Počáteční hodnotu procházky zvolíme do

¹⁵<http://www.wolframalpha.com>



Obr. 9: Porovnání námi vypočtené a skutečné chybové funkce.

okolí maxima,¹⁶ jako generátor návrhu přeskočení (v textu seriálu označen jako funkce g ; můžete si ověřit, že skutečně má všechny požadované vlastnosti) si zvolíme rovnoměrné rozdělení se středem v aktuální hodnotě a šířkou $1000 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, tedy polovinou šířky „kopečku“.

Získali jsme posloupnost N náhodných čísel v_i , s kterou nyní již můžeme přímočaře použít Monte Carlo integraci. Nesmíme ale zapomenout na to, že generujeme náhodná čísla ne dle rovnoměrného, ale dle Maxwellova-Boltzmannova rozdělení, musíme tedy použít variantu MC integrace s vahami $w_i = 1/f(v_i)$, jak bylo uvedeno v textu seriálu. Protože integrujeme funkci $vf(v)$, můžeme ukázat, že pro hodnotu integrálu bude platit vztah

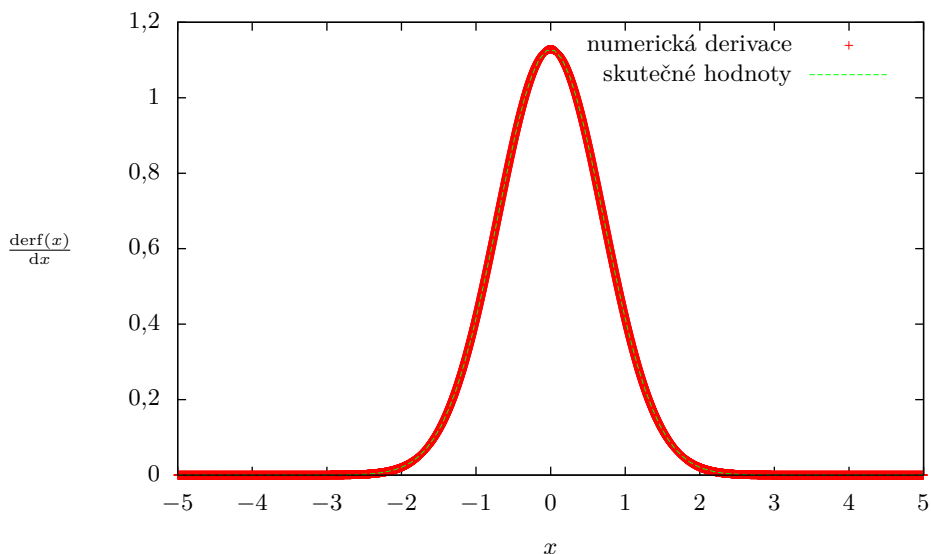
$$I = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i v_i f(v_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{v_i f(v_i)}{f(v_i)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i,$$

kde v_i jsou náhodná čísla generovaná Maxwellovým-Boltzmannovým rozdělením $f(v)$. Na tento finální vztah vlastně můžeme nahlédnout i tak, že sčítáme N náhodných proměnných se střední hodnotou $\langle v \rangle$.

Pozastavme se ještě nad jednou věcí. Počítáme určitý integrál v mezích 0 a $+\infty$, tyto meze ale v MC integraci nikde nespécifikujeme. Kde tedy dáme programu najevo, že chceme použít právě tyto meze? Vzpomeňme si na MC integraci s rovnoměrným rozdělením náhodných čísel. Tam jsme meze specifikovali šířkou rovnoměrného rozdělení. Zde je to stejné, meze, resp. oblast integrace je určena nosičem¹⁷ hustoty pravděpodobnosti, kterou používáme pro

¹⁶Není nutno zcela přesně, hodnota by ale měla ležet v blízkém okolí „kopečku“.

¹⁷Nosičem funkce f tady myslíme množinu x takových, že $f(x) \neq 0$. Přesněji je definován jako tzv. uzávěr této množiny.



Obr. 10: Porovnání námi vypočtené a skutečné derivace chybové funkce.

generování náhodných čísel. V našem případě je Maxwellovo-Boltzmannovo rozdělení nenulové v intervalu $(0, +\infty)$, vše je tedy v pořádku.

Integraci pro námi zvolené parametry získáme, že pro hodnotu střední rychlosti platí $\langle v \rangle \doteq (1714 \pm \dots)$ což odpovídá teoretické hodnotě $\langle v \rangle \doteq 1715 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Integraci jsme opakovali stokrát, z těchto hodnot jsme pak vypočetli průměr a směrodatnou odchylku, což bylo použito jako zmíněná výsledná hodnota a její chyba. V každém běhu byla integrovaná funkce samplována ve 100 000 bodech. Zdrojový kód použitého programu naleznete jako přílohu řešení na našich webových stránkách.

Komentáře k došlým řešením

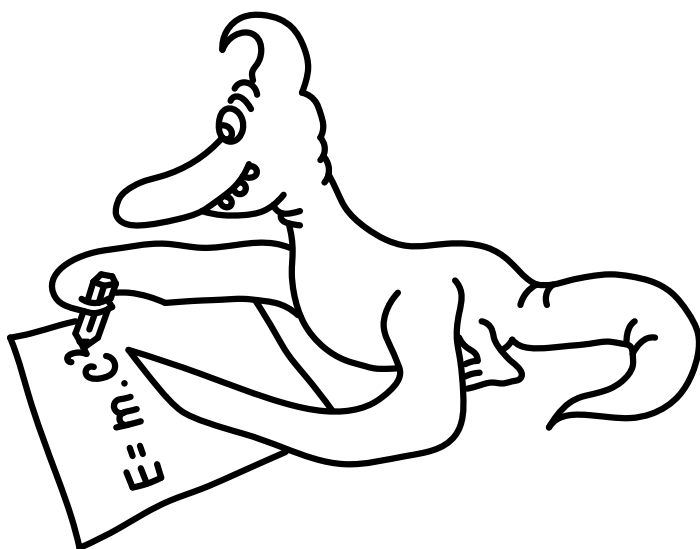
Ve vašich řešeních problémů zaměřených na markovovské procesy a náhodné procházky (NP) se objevilo několik chyb, které stojí za to si zde rozebrat. Často docházelo k nepochopení pojmu bezpaměťovost. Jestliže každý prvek náhodného řetězce/procesu závisí nejvýše na předchozím prvku, pak je řetězec bezpaměťový neboli Markovův. Pokud při konstrukci trajektorie NP rozhodneme v čase t_i o následující poloze (čas t_{i+1}) na základě předchozí polohy (čas t_{i-1}), nejedná se bezpaměťový proces, protože stav v t_{i+1} je dán stavem v t_{i-1} , o dva kroky zpět. To se přesně děje u NP bez návratu, proto není markovovská. Někteří z vás ve svém řešení definovali jako stav NP bez návratu směr kroku, pak ji lze považovat za markovovskou, ale z matematického hlediska už jde o jiný proces, při kterém neumíme bezpaměťově určit aktuální polohu. Dále mnoho z vás předpokládalo, že když v případě obyčejné NP pro výpočet nárazu do bariéry můžeme zanedbat pohyb v ose x , lze to udělat i v případě NP bez návratu. To nelze, jednak musíme pohyb v x alespoň povolit, byť ho nebudeme zaznamenávat, a navíc se i ve 2D

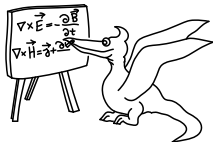
projeví tendence NP bez návratu „pokračovat ve směru, kterým vyrazila“.

Dále je při studiu vzdálenosti Brownovy částice od počátečního bodu potřeba zprůměrovat velké množství NP, abychom zjistili, jak se typicky (statisticky) vzdálenost vyvíjí po delším čase. Z jedné realizace procházky žádnou statistiku nevyčteme. Několik řešitelů se také dopustilo chyby, kdy místo počítání aktuální vzdálenosti sčítalo vzdálenosti ze všech předchozích kroků, což je samozřejmě jiná veličina, než nás zajímá. Nakonec je potřeba uvědomit si, že předpokládaná odmocninná závislost vzdálenosti na čase je asymptotická, chování okolo počátku je jiné. Po delším čase se vzdálenost každé realizace od počátku mezi sebou výrazně liší a je potřeba velký statistický soubor, jinak bude každý bod na průměrovaném grafu zatížen velkou chybou a i směrnice fitu bude nepřesná. (Použité funkce pro fitování v Pythonu neuvažují chyby jednotlivých bodů, proto vám přesná hodnota 0,5 nemusela padnout ani do několikerého násobku směrodatné odchylky fitu.)

Miroslav Hanzelka
mirek@fykos.cz

Lukáš Timko
lukast@fykos.cz





Seriál: Kořeni a automati

31. ročník FYKOSu a s ním i seriál o numerických metodách a simulacích vstupují do druhé poloviny. Je proto na čase opustit metodu Monte Carlo a věnovat se zcela novému tématu – buněčným automatům. Seznámíme se s jejich principy a ukážeme si několik jednoduchých příkladů jejich použití. V numerické části se budeme věnovat klasickému, ale velmi užitečnému tématu: hledání kořenů funkcí.

Hledání kořenů

Hledáním kořenů funkce $f(x)$ máme na mysli hledání všech nebo některých řešení rovnice $f(x) = 0$. Předpokládáme přitom, že f je reálná funkce reálného argumentu, tedy že x i hodnoty $f(x)$ jsou reálná čísla (a ne komplexní čísla, vektory, ...). Dále předpokládáme, že funkce je spojitá (její graf lze nakreslit jedním tahem), pro některé metody pak musíme předpokládat i spojitost prvních derivací (graf funkce nemá ostré „zuby“, takové funkce se proto označují jako hladké). Je poměrně zřejmé, že jde o rozumné předpoklady, které naprostá většina funkcí, se kterými jste se na střední škole setkali, splňuje.

Ve škole jste se většinou setkali pouze s rovnicemi, které dokážete analyticky vyřešit. Ve skutečnosti je ale takových rovnic poměrně málo.¹⁸ Jako příklad analyticky neřešitelných rovnic poslouží třeba $x = \cos x$ nebo řešení úlohy Jáchymovská z letošního FoLu. Hledání kořenů má ale i jiné aplikace, například může posloužit k numerickému nalezení inverze funkce. Pokud totiž pro zvolené y chceme najít x takové, že $y = f(x)$, pak nejde o nic jiného, než právě hledání kořenu funkce $g(x) = f(x) - y$. Věříme, že jsme vás již dostatečně namotivovali, pojďme si proto nějaké základní metody představit.

Metoda půlení intervalu

Na začátku si potřebujeme zvolit dvě hodnoty a_0 a b_0 tak, že v intervalu (a_0, b_0) leží právě jeden kořen (ten, který chceme najít). Pak vezmeme střed tohoto intervalu, tedy hodnotu $c_0 = (a_0 + b_0)/2$ a podíváme se, jestli kořen leží v intervalu (a_0, c_0) , nebo (c_0, b_0) (nebo jestli není $f(c_0)$ zrovna nula, i když díky omezené přesnosti reálných čísel tento případ typicky nenastává). Interval, ve kterém leží kořen, pak použijeme jako interval (a_1, b_1) a iterujeme pro stále větší n , dokud nebude interval (a_n, b_n) dostatečně malý. Pak je kořen přibližně roven hodnotě $(a_n + b_n)/2$ s maximální chybou $(b_n - a_n)/2$.

Algoritmus máme téměř hotov, chybí zjistit, jak rozhodnout, ve kterém z intervalů kořen leží. Využijeme zde Bolzanovy věty, která říká: „Nechť f je spojitá na omezeném a uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ a $f(a)f(b) < 0$. Pak existuje (alespoň jedno) $c \in (a, b)$ takové, že $f(c) = 0$.“ Rozmyslete si, že věta říká poměrně intuitivní věc: „Pokud $f(a)$ a $f(b)$ mají rozdílné znaménko a spojím je jedním tahem (grafem funkce), pak tento tah někde protíná osu x .“ Věta nám tedy napovídá, že správným testem je kontrolovat jestli $f(a_i)f(c_i) < 0$, nebo $f(c_i)f(b_i) < 0$ (pokud $f(c_i) \neq 0$, bude alespoň jedna nerovnost platit). Všimněte si ale, že věta nám neříká, že kořen bude v intervalu pouze jeden. To musíme zajistit na začátku, proto jsme si původní

¹⁸Ve smyslu, že pokud náhodně vymyslíme rovnici, tak ji vyřešit nedokážeme.

interval zvolili tak, aby v něm ležel právě jeden kořen. Pokud toto nesplníme, pak může metoda samozřejmě selhat – pokud pro počáteční interval platí $f(a_0)f(b_0) < 0$, nějaký kořen nalezneme vždy, ale jiné se můžou ztratit.

Metoda půlení intervalu (též bisekce) je velmi jednoduchá metoda, její základní myšlenka se tedy ujala i v problémech, které s hledáním kořenů nesouvisí. Jako příklad poslouží třeba hledání hodnoty v seřazeném poli, kdy se nejprve koukneme doprostřed, pokud je hodnota menší, koukneme se na prvek v jedné čtvrtině délky pole, pokud je větší, na prvek ve tří čtvrtinách, ... Je pozoruhodné, že se tato metoda osvědčila i jako „dřevorubecský způsob“ hledání některých typů chyb v programu. Pokud nám např. nějaká funkce dává chybný výsledek, stačí si postupně vypisovat hodnoty z poloviny metody, čtvrtiny metody, ... a ověřovat, jestli je tam hodnota výpočtu ještě v pořádku. Tímto způsobem pak poměrně rychle dokážeme najít konkrétní příkaz, kde chyba nastává.

Z popisu algoritmu je patrné, že bisekce (stejně jako všechny ostatní metody, které zde představíme) je iterativní metoda. Nikdy nedostaneme zcela přesný výsledek, ale čím více iterací provedeme, tím více se mu budeme blížit. Důležitou vlastností iterativních metod je rychlost konvergence, tedy to, jak rychle se budeme správné hodnotě blížit s rostoucím počtem iterací. Nyní se pokusme tento pojem formalizovat. Mějme posloupnost $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ konvergující k hodnotě s . Pokud existují konečné konstanty $k \neq 0$ a $p > 0$ takové, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - s|}{|x_n - s|^p} = k,$$

pak řekneme, že posloupnost konverguje s řádem konvergence p . Speciálně pokud $p = 1$, pak posloupnost konverguje lineárně, pokud $p = 2$, pak konverguje kvadraticky, ...

Pokud bude konvergující posloupností posloupnost chyb metody (v závislosti na počtu iterací) $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde $e_n = |x_n - s|$, pak dle definice bude pro danou posloupnost pro dostatečně velké n platit $e_{n+1} \approx ke_n^p$. Tento rekurentní vztah můžeme rozepsat do podoby

$$e_n \approx k^{1+p+\dots+p(n-n_0-1)} e_{n_0}^{p(n-n_0)},$$

kde jsme si zvolili pevně dostatečně velké n_0 a uvažujeme $n \geq n_0$. Zlogaritmováním pak dostaneme

$$\ln e_n \approx p^{n-n_0} \ln e_{n_0} + \sum_{j=0}^{n-n_0-1} p^j \ln k.$$

Pro případ $p > 1$, $k < 1$, $e_{n_0} < 1$ tedy platí, že závislost *logaritmu* chyby na n se bude chovat přibližně jako $-Cp^n$, kde $C > 0$ je konstanta. Pro $p = 1$ se logaritmus chyby chová jako $-Cn$, chyba tedy klesá exponenciálně.

S rychlostí konvergence jsme se již setkali v úloze o hledání čísla π v první sérii. Ve vzorovém řešení bylo zmíněno, že metoda konverguje kvadraticky s počtem hran, a názorně jsme si předvedli, co to znamená. Upozorněme zde ale, že šlo o jinou definici rychlosti konvergence, která je používána spíše pro diskretizační metody (metody, kde kouskujeme nějakou oblast či čas na malé dílky). V obou definicích ale platí, že čím vyšší řád, tím lépe metoda konverguje, jen to pokaždé znamená něco trochu jiného.

Vypočtěme nyní řád konvergence pro metodu bisekce. Je zřejmé, že v $ntém$ kroku hledáme kořen v intervalu šířky $|b_n - a_n| = 2^{-n}|b_0 - a_0|$. Protože v tomto intervalu kořen jistě leží, můžeme touto hodnotou shora odhadnout chybu metody e_n v $ntém$ kroku. Posloupnost $\{e_n\}$ konverguje k nule, dle výše uvedené definice tedy hledáme takové $p > 0$, aby výraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{-n-1}|b_0 - a_0|}{(2^{-n}|b_0 - a_0|)^p} = \frac{1}{2}|b_0 - a_0|^{1-p} \lim_{n \rightarrow \infty} (2^{p-1})^n$$

byl roven nenulovému reálnému číslu. Je vidět, že pro $p > 1$ je hodnota výrazu rovna $+\infty$, pro $p \in (0, 1)$ je pak rovna nule. Řešením je $p = 1$, kdy je hodnota výrazu rovna číslu $1/2$. Dokázali jsme tedy, že metoda konverguje lineárně.

Pokud si to tedy shrneme, pro metodu bisekce potřebujeme dopředu znát interval, kde se kořen vyskytuje a jde o lineárně konvergující metodu. Lze si také rozmyslet, že metoda konverguje vždy (což, jak uvidíme, není samozřejmost). Jde tedy o jednoduchý a robustní algoritmus, ne ale příliš rychlý. Představme si tedy rychleji konvergující metody.

Metoda sečen

Myšlenka této metody je opět poměrně jednoduchá. Na začátku potřebujeme dva body x_0 a x_1 . Kořen nemusí tentokrát nutně ležet mezi nimi, musí ale ležet „dostatečně blízko“. Nyní proložíme body $[x_0, f(x_0)]$ a $[x_1, f(x_1)]$ přímkou – sečnu funkce $f(x)$. Ta je v jistém smyslu rozumnou aproximací funkce $f(x)$ blízko bodů x_0 a x_1 , navíc je to přímka, a pro ni dokážeme najít kořen lehce. Označme tento kořen sečny x_2 . Protože je ale sečna pouze aproximací, x_2 (většinou) není kořenem funkce $f(x)$. Proto proložíme další sečnu body $[x_1, f(x_1)]$ a $[x_2, f(x_2)]$, najdeme kořen této sečny x_3 a dále iterujeme až do dosažení konvergence. Tu můžeme detekovat například tak, že se dvě následující hodnoty x_i v podstatě neliší.

Bez důkazu uvedme, že řád konvergence metody je roven zlatému řezu, tedy přibližně 1,62, což je lepší než u lineárně konvergující bisekce. Problém ale je, že metoda nekonverguje vždy. Jako příklad si uveďme funkci, která je na nějakém intervalu konstantní. Pokud se v nějaké iteraci stane, že chceme proložit sečnu dvěma body ležícími v tomto intervalu, nebude mít tato sečna žádný kořen. To je samozřejmě extrémní případ, stačí, pokud je funkce někde málo strmá (v porovnání se strmostí v okolí kořenu funkce), pak sice sečna protne osu x , ale zpravidla v bodě ležícím daleko od skutečného kořenu funkce.

Metoda regula falsi

Pokusme se modifikovat metodu sečen tak, aby byla vždy konvergentní. Na začátku si opět zvolíme x_0 a x_1 , tentokrát ale tak, aby kořen ležel mezi nimi (aby $f(x_0)f(x_1) < 0$). Těmito dvěma body opět proložíme sečnu a najdeme její kořen x_2 . Nyní ale nastane podstatná změna. Další sečnu proložíme buď body x_1 a x_2 , nebo x_0 a x_2 podle toho, mezi kterou dvojicí bodů leží skutečný kořen funkce $f(x)$, což, podobně jako u bisekce, ověříme podle toho, jestli $f(x_0)f(x_2) < 0$, nebo $f(x_1)f(x_2) < 0$. Poté iterujeme až do požadované přesnosti.

Vidíme, že podstatnou modifikací je to, že si hlídáme, aby skutečný kořen ležel vždy mezi průsečíky sečny s osou x . Tento požadavek nám zajistí, že se odhad kořene x_i bude přibližovat skutečnému kořenu a metoda tedy bude vždy konvergentní. Zaplatíme za to ale tím, že metoda konverguje pouze lineárně, nicméně o něco rychleji než bisekce (ne o tolik, aby se to projevilo na řádu konvergence, ale i tak je to vítané zlepšení).

Newtonova metoda tečen

Myšlenka Newtonovy metody je taková, že zvolíme nějaký bod x_0 „blízko“ hledaného kořenu funkce $f(x)$. Funkci poté aproximujeme tečnou v bodě x_0 , což technicky provedeme rozepsáním Taylorova polynomu v okolí bodu x_0 do 1. řádu

$$f(x) \approx y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Nyní, podobně jako v předchozích dvou metodách, nalezneme kořen této aproximace, tedy položíme $y = 0$. Pak platí

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

protože je ale toto x opět pouhou aproximací kořenu, označme jej jako x_1 a iterujme dále. Kompletní rekurentní předpis Newtonovy metody tedy je

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Specifikem této metody je, že je potřeba znát nejen funkční hodnoty samotné funkce $f(x)$, ale i její derivace. Mohli byste namítnout, že pokud bychom derivaci neznali, mohli bychom použít její numerickou aproximaci. Nicméně lze ukázat, že v případě použití dopředné diference přechází Newtonova metoda na metodu sečen (zkuste si to, jde jen o dosazení do vzorce). To dává smysl, neboť numerická derivace je pouze aproximací, hledáme tedy vlastně sklon sečny procházející body x a $x + h$, zatímco při použití derivace je h infinitesimálně malé, sečna tedy přejde v tečnu.

S metodou sečen má Newtonova metoda společnou i tu nehezkou vlastnost, že nekonverguje vždy. Pokud ale konverguje, tak konverguje (za splnění určitých předpokladů) kvadraticky, jde tedy o nejefektivnější z metod, které jsme si zde představili.

Banachova věta o kontrakci

Jako poslední si představme metodu, kterou nelze použít obecně, nicméně za určitých okolností se může vyplatit ji znát. Navíc jde o poměrně zajímavou matematickou větu, se kterou jste se již možná setkali, ani o tom nevíte.

Banachova věta je poměrně obecné tvrzení, které se zavádí na abstraktním matematickém objektu nazývaném metrický prostor. My se zde ale spokojíme s méně obecnou verzí této věty, kdy si ji zavedeme pouze na intervalech reálných čísel, což, pokud přirozeně použijeme absolutní hodnotu rozdílu dvou čísel jako tzv. metriku, je speciální případ metrického prostoru.

Nejprve si ale potřebujeme definovat několik pojmů. Funkce $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ se nazve *lipschitzovská*, pokud existuje $L \geq 0$ takové, že $\forall x, y \in \langle a, b \rangle$ platí $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$. Pokud navíc $L < 1$, pak funkci f na intervalu $\langle a, b \rangle$ nazveme *kontrakcí*. Toto označení má jasný význam, neboť funkční hodnoty kontrakce jsou si blíže, než původní argumenty, kontrakce tedy interval $\langle a, b \rangle$ zobrazuje na interval $\langle c, d \rangle$, který je menší, než původní interval, „zkontrahuje jej“.

Nyní již samotná Banachova věta. Necht $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$ je kontrakce. Pak existuje jediné $x_P \in \langle a, b \rangle$ takové, že $f(x_P) = x_P$ (x_P je tzv. *pevný bod zobrazení*). Navíc pokud $x_0 \in \langle a, b \rangle$ a $x_{k+1} = f(x_k)$, pak pro všechna $k = 1, 2, \dots$ platí

$$|x_k - x_P| \leq \frac{L^k}{1 - L} |x_0 - x_1|.$$

Takto matematicky napsaná věta nejspíš vypadá hrozivě, pojďme si tedy rozebrat, co říká. První část tvrdí existenci právě jednoho bodu, který se kontrakcí zobrazí sám na sebe. Nejlépe si to představíme na příkladu. Hezkým příkladem kontrakce je turistická mapa, která zobrazuje reálné body ve světě na papír. Banachova věta pak tvrdí, že pokud mapu položíme na zem někde

v oblasti, kterou zobrazuje,¹⁹ pak existuje na mapě právě jeden bod, který se zobrazuje sám na sebe. Druhá část věty pak říká, že pokud vezmeme libovolný bod z intervalu $\langle a, b \rangle$ a budeme na něj opakovaně aplikovat kontrakci f , dokonvergujeme právě do pevného bodu zobrazení. Věta navíc říká, jak rychle tam dokonvergujeme (jde vidět, že jde o lineární konvergenci).

Zde se dostáváme k aplikaci. Zkusili jste si někdy na kalkulačce zadat nějaké číslo a pak opakovaně mačkat tlačítko \cos ? Všimli jste si přitom, že ať už zadáte jakékoliv číslo, vždy nakonec dospějete k číslu přibližně 0,739? Pak jste použili právě Banachovu větu o kontrakci a našli tak kořen rovnice $x = \cos x$, neboť funkce \cos je kontrakce. Počáteční hodnotu jste mohli volit kdekoliv, protože je to kontrakce na libovolném intervalu obsahujícím interval $\langle -1, 1 \rangle$.

Nevýhodou Banachovy věty je, že funguje pouze na kontrakce, musíte tedy mít štěstí na řešený problém. V praxi tedy nejspíš použijete některou z ostatních metod. Jde ale rozhodně o pozoruhodný a v určitých oblastech matematiky i velmi důležitý koncept.

Celulární automaty

Mnohé matematické a fyzikální systémy jsou popsány rovnicemi, které nedokážeme analyticky řešit a zapojujeme proto do práce numeriku a simulace. Existují však i situace, kdy je systém příliš komplikovaný na to, abychom dokázali všechny potřebné rovnice vůbec sepsat. O to překvapivější je, když takový systém po čase vykazuje zřejmé symetrie, opakující se geometrické vzorce, vyvíjí se od chaosu k jednoduchému uspořádání. Příkladem může být růst sněhové vločky či krystalu obecně. Ačkoli je agregace částic velice komplikovaný a tedy těžko předvídatelný proces, výsledkem je geometricky přesný krystal. Jinými slovy, jednoduché globální uspořádání je důsledkem složitého působení lokálních interakcí.

Aniž bychom příliš zabíhali do termodynamiky, rozmyslíme si, že jestliže entropie („neuspořádanost“) izolovaného systému samovolně neklesá, musí systémy vykazující samouspořádání být otevřené.²⁰ Naše neschopnost snadno popsat takový systém soustavou rovnic s jednoznačným řešením plyne z toho, že by tato soustava musela obsahovat časový vývoj v principu nekonečného prostředí. Chceme tedy najít model sestávající z rozumně malého počtu pravidel, který dokážeme prostudovat detailněji než velkou soustavu diferenciálních rovnic (popisující stejný problém) a zároveň bude vykazovat netriviální dynamické chování vedoucí, pro určité hodnoty parametrů, k samoorganizaci. Jak jsme již předeslali, cílem tohoto textu bude ukázat, že právě takový model nám poskytnou buněčné (celulární) automaty.

Se studiem celulárních automatů (CA) začali matematicí fyzikové Stanislav Ulam a John von Neumann během pobytu v Los Alamos za druhé světové války. Ulamovou motivací bylo zkoumání růstu krystalů pomocí mřížkových modelů, zatímco von Neumanna k CA přivedla myšlenka autoreplikace strojů. Společně pak svoje znalosti použili ke studiu pohybu tekutin pomocí metody, která spočívala v prostorové diskretizaci tekutiny a zkoumání interakce mezi sousedními buňkami. V sedmdesátých letech se do širšího povědomí dostal 2D buněčný automat zvaný Hra života, který objevil John Conway.²¹ Tento automat je zajímavý množstvím statických i dynamických objektů, které se v něm i přes jeho jednoduchá pravidla objevují, a ještě se k němu později vrátíme. V osmdesátých letech se do práce na buněčných automatech pustil

¹⁹To je důležitý požadavek, vyjádřený matematicky $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$. Pokud mapu Prahy položíme na zem v New Yorku, nejsou předpoklady Banachovy věty splněny.

²⁰Otevřený termodynamický systém je takový, který si s okolím může vyměňovat hmotu i energii. O okolí se nezajímáme (neznáme jeho extenzivní popisné veličiny jako je objem, hmotnost, entropie), pouze měříme toky skrz hranice studovaného systému. Izolovaný systém si nevyměňuje ani hmotu, ani energii.

²¹Anglický matematik, narozen 1937.

Stephen Wolfram,²² přičemž rigorózně klasifikoval všechny jednorozměrné automaty a pomohl rozšířit CA jako metodu do dalších oborů, nejen přírodovědných.

Vlastnosti a klasifikace CA

Celulární automat je jednoznačně definován pomocí tří objektů. První z nich je (pro účely simulací konečná, matematicky je možné studovat i nekonečné) *mřížka* Λ s pozičním indexem i , která nám říká, jakým způsobem jsme diskretizovali prostor. Může být čtvercová, hexagonální i jakákoli jiná. Dále musíme zadat *množinu stavů* S , kterých může nabývat každá jednotlivá buňka. Stav konkrétní buňky označíme s_i . Nakonec musíme znát lokální *pravidlo*, podle kterého se systém v diskrétním čase vyvíjí. Takové pravidlo lze obecně napsat ve tvaru

$$s_i(t+1) = f(\{s\}_{O(i)}(t)). \quad (6)$$

Zde máme na levé straně stav buňky na pozici i v čase $t + \Delta t$, přičemž jsme pro jednoduchost volili $\Delta t = 1$. Napravo máme funkci f , která nabývá hodnot z množiny S . Jejím argumentem jsou stavy buněk z okolí $O(i)$ v čase t . Okolí můžeme definovat libovolně, obvykle se jedná o nejbližší sousedy, samotná buňka i může, ale nemusí být do okolí zahrnuta.

Ještě než si ukážeme příklad jednoduchého pravidla f , povězme si něco stručně o klasifikaci buněčných automatů. Podle charakteru pravidla můžeme CA dělit na *deterministické* a *stochastické*. V prvním případě je na pravé straně rovnice (6) obyčejná funkce, zatímco stochastické pravidlo má na pravé straně funkci vracející náhodnou proměnnou (která může nabývat hodnot pouze z množiny S). Dále můžeme CA rozdělit podle toho, jak aplikují své pravidlo. Pokud při provádění jednoho časového kroku vkládáme do funkce napravo vždy hodnoty buněk, kterých nabývali před provedením tohoto kroku, jedná se o *synchronní* automat. V jakémkoli jiném případě nazýváme automat *asynchronním*. Striktně řečeno jsme tedy výše definovali pouze deterministický a synchronní automat, to proto, abychom se vyhnuli komplikovanému zápisu při větším zobecnění. Dalším možným kritériem pro klasifikaci CA je jejich komplexita, která sahá od typů, kdy vždy po pár krocích dosáhneme statického stavu, až po automaty s velmi dlouhým dynamickým vývojem. Užitečným kritériem klasifikace je také stabilita vůči poruše.

A nyní k příkladu. Uvažujme 1D automat (tvar mřížky zde není potřeba udávat) s binární množinou stavů $S = \{0, 1\}$ s pravidlem

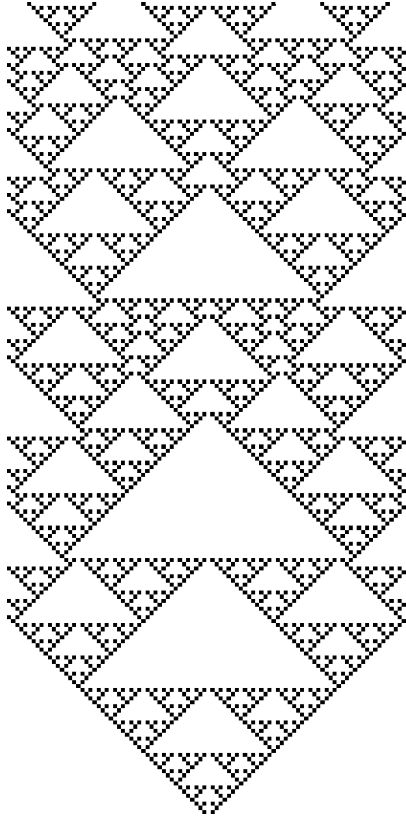
$$s_i(t+1) = s_{i-1}(t) \vee s_{i+1}(t), \quad (7)$$

kde symbol \vee označuje logický operátor výlučné nebo (exclusive or, xor).²³ Při časovém vývoji se tedy u každé buňky díváme, jakých hodnot nabývají nejbližší sousedi. Pokud právě jeden z nich má hodnotu 1 (uvažujeme synchronní automat, tedy v čase t), pak bude mít buňka na pozici i v čase $t + 1$ hodnotu 1, jinak 0. Jelikož je mřížka Λ omezená, je potřeba stanovit, jak se chovají buňky na okraji. Obvykle předpokládáme periodické podmínky (sousedem poslední buňky je první buňka), ale nic nám nebrání volit i jiné. Obrázek 11 nám ukazuje prvních 200 kroků vývoje. Všimněte si, že se v obrázku opakují podobné geometrické útvary, ale nejedná se o periodické chování.

Jednorozměrné automaty je pro jejich jednoduchost poměrně snadné klasifikovat. Budeme uvažovat $O(i) = \{i-1, i, i+1\}$, tedy do okolí zahrnujeme i buňku na aktuální pozici. Také se

²²Anglický počítačový fyzik, narozen 1959. Ano, je to *ten* Wolfram. Jeho zájem o celulární automaty se projevil i v online algebraickém systému Wolfram|Alpha, který ve svých starších verzích mívá na čekací obrazovce během výpočtu animaci vývoje některých CA.

²³Od klasického *nebo* (or) se liší tím, že pro $A = 1, B = 1$ platí $A \vee B = 1$, ale $A \wedge B = 0$.



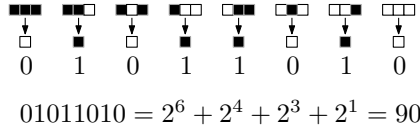
Obr. 11: 1D buněčný automat na mřížce délky 100 s periodickými podmínkami a s pravidlem (7). Na počátku má jeden bod hodnotu 1 a ostatní 0 (počáteční stav není vyobrazen). Na svislé ose je čas (rostoucí směrem nahoru), na vodorovné index i .

omezíme na binární množinu S . Potom může celé okolí nabývat osmi možných stavů: 111, 110, 101, 100, 011, 010, 001, 000. Pro každý z těchto stavů existují dvě možnosti, jak se bude buňka i vyvíjet: buďto bude mít v příštím kroce hodnotu 1, nebo 0. Celkem tedy existuje 256 různých pravidel²⁴ pro automaty uvedeného typu (občas se nazývají *elementární buněčné automaty*). Pravidlo (7) potom nazveme „pravidlo 90“, jak je názorně ukázáno na obrázku 12.

Podívejme se, jak se to má s počtem automatů ve více dimenzích. Pokud budeme za okolí $O(i)$ opět považovat pouze nejbližší sousedy a samotnou buňku i , bude okolí v d dimenzích obsahovat $N = 2d + 1$ buněk. Velikost množiny stavů je obecně $|S| = q$, počet možných konfigurací na okolí je tedy $C = q^N$. Z každé konfigurace může vzejít q různých stavů buňky i , a proto celkový počet pravidel bude v tomto obecném případě

$$N_{\text{CA}} = q^C = q^{q^{2d+1}}. \quad (8)$$

²⁴S využitím symetrií tento počet můžeme redukovat na 32.

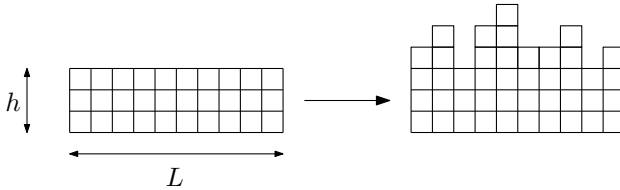


Obr. 12: Názorná ukázka klasifikace pravidla daného rovnicí (7).

Tak například pro dvourozměrný binární buněčný automat existuje celkem $2^{2^{4+1}} = 4\,294\,967\,296$ pravidel. Při takovém počtu nelze pravidla klasifikovat jedno po druhém, smysl má pouze dívat se na statistické chování. Prozatím proto zůstaneme v 1D světě a podíváme se na jednu zajímavou fyzikální aplikaci.

Využití CA pro modelování růstu povrchů

Představme si, že máme kovovou destičku, jejíž povrch je dokonale rovný. Tedy, na jejím povrchu jsou atomy uspořádány jeden vedle druhého, jak je ukázáno v levé části obrázku 13. Na tuto destičku naprašíme²⁵ několik vrstev stejného materiálu. Nový materiál se však neusazuje zcela rovnoměrně, po naprašování vypadá nanosená vrstva například jako na pravé části obrázku 13. Destička není již tak hladká jako na počátku – říkáme, že se zvýšila *hrubost povrchu*.



Obr. 13: Ukázka hrubnutí 1D povrchu.

Nechť kovová mřížka destičky neobsahuje žádné dislokace. Potom se na ni můžeme dívat jako na jednotlivé sloupčky. Výšku sloupčků částic značme h . Hrubost povrchu definujeme jako odmocninu druhého centrálního momentu výšky²⁶

$$W(t, L) = \sqrt{E(h^2) - (E(h))^2}. \quad (9)$$

Rozepsáno podrobněji,

$$W(t, L) = \sqrt{\frac{1}{L^d} \sum_i h_i^2 - \left(\frac{1}{L^d} \sum_i h_i \right)^2}, \quad (10)$$

kde t je čas, L je charakteristický lineární rozměr povrchu, d je jeho dimenze a h_i výška sloupčků s indexem i . Budeme-li se dívat na řez destičkou, bude dimenze povrchu $d = 1$ a L bude délka

²⁵Naprašování je jednou z metod epitaxe neboli depozice tenkých vrstev. Zdrojový materiál po malém množství převádíme do plynného stavu a částice plynu pomocí elektromagnetického pole deponujeme na destičku.

²⁶Směrodatná odchylka výšky, chcete-li.

řezu (počet sloupečků). Pokud navíc budeme pokládat rozměr molekuly za jednotkový, udává h počet molekul v každém sloupečku a L je počet molekul v řadě.

S časem a přibývajícími částicemi na povrchu hrubost roste. Ale jak? To záleží na způsobu depozice částic, respektive na metodě, kterou ho budeme modelovat. My budeme k simulaci používat 1D asynchronní buněčný automat, přičemž počet buněk bude L a výšky sloupců částic budou představovat jejich stavy. Formálně je tedy množina stavů $S = \mathbb{N}$ neomezená, prakticky ale samozřejmě nevytvříme destičku nekonečné tloušťky.

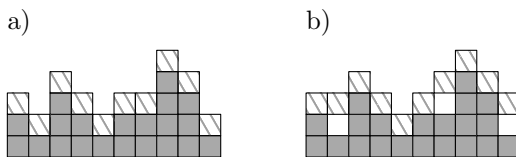
Pravidla evoluce automatu pro simulaci růstu hrubosti mohou být různá. Nejjednodušším pravidlem je *náhodná depozice*, tj. v každém kroku (máme asynchronní automat, krok znamená, že přibude jedna částice, ne celá vrstva) vybereme jednu buňku a zvýšíme její hodnotu o jedna. Náhodný výběr děláme z rovnoměrného rozdělení na L , není-li fyzikální důvod provádět výběr jinak.

Dalším používaným modelem růstu je *balistická depozice*. Opět vybíráme rovnoměrně náhodně buňky, které budou růst, ale v tomto případě se pomyslná padající částice nemusí zastavit až na vybraném sloupečku, ale může se „přilepit“ na sloupeček sousední. Při vybrání buňky i tedy můžeme formulovat evoluční vztah (s vhodnou úpravou na okraji)

$$h_i(t+1) = \max(h_{i-1}(t), h_i(t) + 1, h_{i+1}(t)) . \quad (11)$$

Ve struktuře destičky tedy vznikají dutiny, automat si je ale nepoznamenává.

Názorná ukázka toho, jak se chovají uvedené dva modely, je na obrázku 14.



Obr. 14: a) Model náhodné depozice, b) model balistické depozice. **Nejedná se o časový vývoj.** Schémata pouze zobrazují, kam dopadne nová (šrafovaná) částice, bude-li vybrán určitý sloupec/buňka. Kdyby se jednalo o evoluci, mohly by se nové buňky přilepovat i vzájemně na sebe.

Další příklady CA

V povídání o 1D automatech jsme se nevěnovali příliš jednotlivým pravidlům, byť jsou některé z nich nepochybně zajímavé. Například²⁷ u již zmíněného pravidla 90 existují pro každou konfiguraci čtyři možní předchůdci (zde uvažujeme mřížku bez okrajů, nekonečnou; tvar okrajových podmínek má taky vliv na počet předchůdců), zatímco u některých jiných CA existují konfigurace, ke kterým se nelze evolucí dostat. Pravidlo 110 zase plynule přechází mezi chaotickými a uspořádanými oblastmi v časo-prostorovém diagramu a navíc je turingovsky úplné.²⁸

²⁷Mějte na paměti, že ke každému příkladu existuje několik symetrických automatů, striktně řečeno tedy nejsou unikátní.

²⁸Být turingovsky úplný ve stručnosti znamená být schopný řešit všechny úlohy, které dokáže řešit jakýkoli jiný stroj. Neznamená to ale řešit efektivně, viz 8-bitové procesory sestavené v Minecraftu...

Mnohem zajímavější chování nalezneme mezi 2D automaty. Již výše zmíněná Hra života (Game of Life, GoL) je synchronní, deterministický, binární CA s následujícím pravidlem:

$$\begin{aligned} s_i(t+1) &= 1 \quad \text{pro } 1 < |O(i)| < 4 \\ &= 0 \quad \text{jinak.} \end{aligned} \tag{12}$$

Název Hra života plyne z představy, že buňka s více než třemi sousedy umírá v důsledku „přelidnění“ a buňka s jedním nebo žádným sousedem umírá z osamění. Toto jednoduché pravidlo vede ke vzniku mnoha statických i dynamických vzorů, navíc je GoL dokáže nekonečně replikovat. Na rozdíl od pravidla 90 existují v GoL konfigurace, ke kterým není možno dospět evolucí – takové počáteční stavy se obvykle velice rychle redukují na základní objekty. Také nelze na základě počátečního stavu jednoznačně předpovědět, které objekty budou během evoluce vznikat. To mimo jiné plyne z toho, že GoL je podobně jako pravidlo 110 turingovsky úplná (kdyby šlo bez proběhnutí evoluce předpovědět výsledek, byla by GoL „silnější“ než univerzální Turingův stroj, což není možné). Nejlépe se s GoL seznámíte, když si sami vyzkoušíte nechat vyvíjet některé počáteční stavy. Ke hraní doporučujeme online simulátor <https://bitstorm.org/gameoflife/>.

Hra života je zajímavá, ale není vidět její přímý užitek. Za užitečné můžeme považovat například modelování tvorby kolon v dálničním provozu. Úplně nejjednodušším modelem je pravidlo 184, kde buňka s hodnotou 1 představuje auto a buňka s hodnotou 0 prázdné místo. Pokud je napravo od auta prázdné místo, tak se pohne, jinak stojí (rozmyslete si, jak formálně toto pravidlo může vypadat, případně si to dopočtete pomocí schématu). Pokročilejší model je Nagelův-Schreckenbergův, stochastický 1D celulární automat s proměnlivou rychlostí „auta“. Nebudeme ho zde podrobně rozebírat, pouze uvedeme zajímavý výsledek: kolona se s průběhem času posouvá proti směru rychlosti aut.

Pomocí buněčných automatů dokážeme simulovat (a bylo to nakonec i naší motivací) také problémy, které nejde dobře fyzikálně uchopit. Pěkným příkladem je CA model šíření lesních požárů. Jedná se o 2D stochastický, synchronní automat, v němž každá buňka nabývá několika stavů z množiny hodnot mladý strom, starý strom, hořící strom, spáleniště (dělení může být i podrobnější), přičemž požár se s nejvyšší pravděpodobností rozšíří na starý strom, s menší na mladý strom a nemůže se rozšířit na spáleniště. Ze spáleniště se v každém časovém kroku může s určitou pravděpodobností stát mladý strom. V případě tohoto automatu závisí výsledek velice silně na poměrech zadaných pravděpodobností. K vyhrání si doporučujeme online simulátor <http://www.eddaardvark.co.uk/svg/forest/forest.html>.

Celulární automaty se také hodí ke studiu kritických jevů, jakými jsou například fázové přechody. O tom ale až příště.



Pořadí řešitelů po III. sérii

Kompletní výsledky najdete na <http://fykos.cz>.

Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	III	„%“	%	Σ
Student Pílný	MFF UK	6	6	6	7	8	8	12	10	63	100	190	
1. Robert Gemrot	G Komenského, Havířov	6	6	7	4	4	8	12	8	55	89	169	
2. Martina Daňková	Klasické a španělské G, Brno	6	6	5	–	2	6	12	6	43	82	133	
3. Lubor Čech	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	6	6	0	4	1	4	10	–	31	71	113	
4. Marco Souza de Joode	G Nad Štolou, Praha	6	4	3	–	–	–	12	3	28	76	99	
5. Patrik Kašpárek	Katolické gymnázium Třebíč	6	6	–	1	–	7	10	–	30	72	98	
6. Šárka Štěpánková	G J. Ressela, Chrudim	6	4	3	2	–	5	11	–	31	64	87	
7. Hana Slámová	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	6	–	–	4	–	5	10	–	25	83	84	
8. Viktor Fukala	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	94	65	
9. Karolína Letochová	G Šternberk	2	–	–	–	–	4	–	–	6	60	58	
10. Jan Raja	G, Nymburk	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	35	
11. Soňa Husáková	G, Českolipská, Praha	2	0	0	–	1	–	–	–	3	43	32	
12. Jiří Szotkowski	G, Karviná	–	–	–	–	–	–	–	–	–	83	29	
13. Lucie Urbanová	G Chotěboř	–	–	–	–	–	–	–	–	–	77	23	
14. Aleš Socha	G a SOŠ, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	–	–	38	22	
15. Michaela Valková	G Česká, Bratislava	6	0	–	–	–	4	–	–	10	49	21	
16. Lucia Gintnerová	G Sv. Františka, Žilina	–	6	–	–	–	–	–	–	6	100	6	

Kategorie druhých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	III	„%“	%	Σ
Student	MFF UK	6	6	6	7	8	8	12	10	63	100	190	
1. <i>Martin Schmied</i>	G Jihlava	6	4	3	4	8	5	6	8	44	75	143	
2. <i>Viktor Materna</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	6	6	3	4	–	8	12	–	39	85	132	
3. <i>Jakub Jobus</i>	G PdC, Piešťany	6	6	1	3	1	5	10	5	37	68	129	
4.–5. <i>Martin Vavřík</i>	G, Šumperk	4	6	0	6	8	–	12	–	36	84	107	
4.–5. <i>Jiří Zelenka</i>	G Z. Wintra, Rakovník	6	4	–	–	4	4	11	5	34	69	107	
6. <i>Radka Křížová</i>	G J. Heyrovského, Praha	0	2	–	5	1	5	7	–	20	63	104	
7. <i>Jonáš Havelka</i>	G Jírovcova, České Budějovice	6	6	2	7	8	8	–	–	37	81	100	
8. <i>Jan Benda</i>	G, Litoměřická, Praha	6	6	2	–	8	–	12	2	36	81	86	
9.–10. <i>Pavla Rudolfová</i>	G, Vídeňská, Brno	6	4	1	3	1	6	–	–	21	74	73	
9.–10. <i>Eva Vochozková</i>	Biskupské G, Brno	6	4	–	–	–	6	5	–	21	72	73	
11. <i>Lukáš Hronek</i>	G, Písek	6	6	–	–	–	–	–	–	12	90	55	
12.–13. <i>Adam Grunt</i>	G, Trutnov	6	–	–	–	–	5	–	–	11	65	53	
12.–13. <i>Aneta Vacková</i>	Jiráskovo G, Náchod	6	6	–	–	–	5	–	–	17	78	53	
14. <i>Adam Křivka</i>	Cytilmet. G a SOŠ pg., Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	–	80	51	
15. <i>Jan Vondra</i>	G Týn nad Vltavou	2	2	–	0	–	5	4	–	13	45	49	
16. <i>Matěj Holubička</i>	G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice	6	2	–	1	–	3	–	–	12	50	40	
17. <i>Kateřina Barotová</i>	G, Olomouc-Hejčín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	108	26	
18. <i>Václav Svoboda</i>	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	46	22	
19. <i>Jan Svoboda</i>	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	57	20	
20.–21. <i>Soňa Curylová</i>	G F. Palackého, Val. Mez.	2	4	–	–	–	–	–	–	6	61	19	
20.–21. <i>Filip Wagner</i>	G Tišnov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	76	19	
22. <i>Daniel Krátký</i>	G, Trutnov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	33	18	
23. <i>Marek Nestěra</i>	G K. Sladkovského, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	84	16	
24. <i>Josef Polášek</i>	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	63	15	
25. <i>Marcel Zdeněk</i>	SPŠ strojnická a SOŠ profesora Š	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	14	
26. <i>Lucie Ambrožová</i>	G, Svitavy	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	13	
27. <i>Milan Tichavský</i>	Slezské G, Opava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	86	12	
28.–29. <i>Marek Čermoch</i>	G F. Palackého, Val. Mez.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	63	10	
28.–29. <i>Filip Novotný</i>	G Jihlava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	53	10	
30. <i>Lucia Krajčovičková</i>	G Jura Hronca, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	80	8	
31. <i>Jakub Pravda</i>	ŠpMNDaG, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	6	
32. <i>MERT UNSAL</i>	Bahcesehir HS for Sc and Tech,TR	–	–	–	–	–	–	–	–	–	17	2	

Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	III	„%“	%	Σ
Student	MFF UK	3	3	6	7	8	8	12	10	57	100	172	
1. <i>Kateřina Rosická</i>	G J. Ortena, Kutná Hora	3	3	3	6	8	8	12	9	52	99	170	
2. <i>Jindřich Dušek</i>	G Jana Keplera, Praha	3	2	1	6	7	8	9	8	44	87	150	
3. <i>Vojtěch Klímeš</i>	G, Třeboň	3	3	2	6	7	8	12	7	48	85	146	
4. <i>Ladislav Trnka</i>	G, Havlíčkův Brod	1	3	0	6	4	5	12	2	33	81	140	
5. <i>Josef Minařík</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	3	3	2	7	8	4	8	6	41	78	134	
6. <i>Jindřich Jelínek</i>	G, Olomouc-Hejčín	4	3	3	–	8	5	12	3	38	82	133	
7. <i>Marek Jankola</i>	G M. Hattalu, Trstená	3	2	–	6	8	6	12	–	37	85	115	
8. <i>Lucie Kundratová</i>	G, nám. TGM, Zlín	3	3	3	–	4	5	11	–	29	76	87	
9. <i>Petr Zahradník</i>	G dr. V. Šmejkal, Ústí n. L.	3	–	1	–	–	–	9	4	17	66	83	
10. <i>Tomáš Drobil</i>	G Dačice	4	–	3	–	8	8	2	25	65	82		
11. <i>Ivan Hudák</i>	ESS, Lip. Mikuláš	3	1	–	–	–	–	–	–	4	79	80	
12. <i>Marko Bermell</i>	Slovanské G, Olomouc	3	1	–	–	1	3	8	–	16	60	78	
13. <i>Marie Grunová</i>	G Moravský Krumlov	1	1	1	1	1	3	6	2	16	52	70	
14. <i>Filip Koňarik</i>	G F. Palackého, Val. Mez.	3	–	3	5	–	–	–	–	11	74	59	
15. <i>Samuel Amrich</i>	G Poštová, Košice	3	2	1	–	–	3	9	4	22	57	52	
16. <i>Jiří Blaha</i>	G, Uherské Hradiště	3	–	2	6	1	–	–	–	12	75	49	
17. <i>Kateřina Charvátová</i>	G B. Němcové, HK	–	–	–	–	–	–	–	–	–	86	48	
18.–19. <i>Jakub Růžička</i>	G, Nymburk	–	–	–	–	–	–	–	–	–	75	36	
18.–19. <i>Veronika Vohníková</i>	Nový PORG, Praha	3	–	–	–	–	3	7	–	13	72	36	
20. <i>Mária Polačková</i>	G Velká okružná, Žilina	–	–	–	3	–	–	–	–	3	76	29	
21. <i>Daniel Staník</i>	G Uničov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	58	25	
22. <i>Bibiána Hroncová</i>	G Poštová, Košice	3	–	–	–	–	–	–	–	3	100	24	
23. <i>Karel Balej</i>	G a SOŠ, Rokycany	–	–	–	–	–	–	–	–	–	88	21	
24. <i>Daniël Pitoňák</i>	G a SOŠP, Čáslav	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	20	
25. <i>On Tai Wu</i>	Li Po Chun UWC, Hong Kong	–	–	–	–	–	–	–	–	–	94	17	
26. <i>Jaromír Sladkovský</i>	PORG, Praha	3	–	1	4	8	–	–	–	16	67	16	
27.–28. <i>Adéla Foglarová</i>	G, Špitálská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	93	14	
27.–28. <i>Jakub Smolka</i>	Slezské G, Opava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	54	14	
29. <i>Tereza Pavlišová</i>	G, Olomouc-Hejčín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	87	13	
30.–31. <i>Tereza Prokopová</i>	G Jura Hronca, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	83	10	
30.–31. <i>Martin Škoudlil</i>	G T. G. Masaryka, Litvínov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	59	10	
32. <i>Jana Pekařová</i>	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	75	9	
33. <i>Zuzana Fialková</i>	Sunny Can. International Sch.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	8	
34. <i>Richard Veselý</i>	G, Budějovická, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	38	5	
35.–36. <i>Domínik Beňo</i>	G L. Svobodu, Humenné	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	3	
35.–36. <i>Michal Jůza</i>	G, Benešov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	3	
37. <i>Jakub Zemek</i>	G, Uherské Hradiště	–	–	–	–	–	–	–	–	–	33	1	

Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	III	„%“	%	Σ
Student Pilný	MFF UK	3	3	6	7	8	8	12	10	57	100	172	
1. Šimon Pajger	G Velká okružná, Žilina	3	3	3	7	8	7	11	7	49	85	146	
2. Viktor Rosman	G, Pelhřimov	1	3	2	8	3	7	12	–	36	96	130	
3. Tomáš Červeň	G V. P. Tótha, Martin	3	2	–	5	8	6	11	3	38	77	123	
4. David Němec	G, Tanvald	3	2	3	4	–	5	12	–	29	71	109	
5. Katarína Častulíková	1. súkromné G v Bratislave	1	3	3	5	1	7	10	–	30	75	106	
6. Tomáš Dulava	Matiční G, Ostrava	2	3	–	–	–	–	–	–	5	84	86	
7. Jáchym Bareš	G, Olomouc-Hejčín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	61	51	
8. Dominik Starý	G, Benešov	3	1	3	–	–	–	–	–	7	77	50	
9. Martin Repčík	G, Olomouc-Hejčín	3	–	–	2	0	–	–	–	5	51	46	
10. Zuzana Richterová	G, Pelhřimov	1	0	–	1	1	3	10	–	16	44	41	
11. Miroslav Hrabal	G, Olomouc-Hejčín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	33	
12. Jan Kučera	G, Písek	–	–	–	–	–	–	–	–	–	86	31	
13. Ján Pavlech	G sv. Jozefa Nové Mesto n. V.	3	1	–	–	–	–	–	–	4	78	29	
14. Soňa Burešová	G J. Heyrovského, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	105	23	
15. Filip Keller	G P. de Coubertina, Tábor	–	–	–	–	–	–	–	–	–	65	20	
16. Ondřej Buček	G Brno, tř. Jaroše	2	3	–	–	–	–	–	–	5	71	17	
17. Adéla Hanková	První české G, Karlovy Vary	3	–	–	–	–	–	–	–	3	100	12	
18. Dominik Ivan	ŠG PinkHarmony, Zvolen	–	–	–	–	–	4	–	–	4	32	9	
19. Vít Beran	Masarykovo G, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	70	7	



FYKOS

UK, Matematicko-fyzikální fakulta


Ústav teoretické fyziky

V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

www: <http://fykos.cz>

e-mail: fykos@fykos.cz

FYKOS je také na Facebooku 

<http://www.facebook.com/FYKOS>

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.