Úvodem

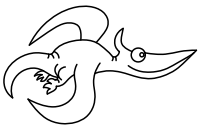
Milí řešitelé, milé řešitelky,
Jaro je tady a my jsme zase vymysleli několik hezkých úloh. Doufáme, že se vám budou líbit.

Pokud přijedete na jarní soustředění, vězte, že se moc těšíme :) . A pokud nejedete, ať už kvůli maturitě nebo něčemu jinému, přejeme hodně úspěchů ve škole.

Za chybějící vzorové řešení se omlouváme, co nejdříve bude zveřejněno na webu. Přikládáme ale řešení, které se v minulé brožurce neobjevilo.

Těšíme se na vás.

Organizátoři



Zadání V. série

Termín uploadu: 27. 3. 2018 23.59
Termín odeslání: 26. 3. 2018

Úloha V.1 ... schodiště na Měsíci

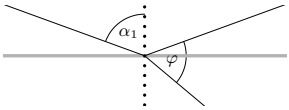
3 body

Pokud bychom jednou kolonizovali Měsíc, bylo by vhodné na něm používat schody? Představte si na Měsíci klesající schodiště s výškou schodu $h = 15\,\mathrm{cm}$ a délkou $d = 25\,\mathrm{cm}$. Odhadněte počet schodů N, které by přeletěl člověk, jestliže by před vstupem na schody šel rychlostí $v = 5{,}4\,\mathrm{km\cdot h^{-1}} = 1{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Tíhové zrychlení na povrchu Měsíce je šestkrát slabší než na povrchu Země.

Úloha V.2 ... paprsky smrti na skle

3 body

Na skleněnou desku s absolutním indexem lomu $n = 1{,}5$ dopadá světelný paprsek. Stanovte jeho úhel dopadu α_1, jestliže paprsek odražený od rozhraní svírá s lomeným paprskem úhel $60\,^\circ$. Deska je uložena ve vzduchu.

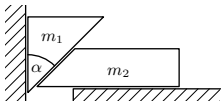


Úloha V.3 ... klín

5 bodů

Máme dva klíny o hmotnostech m_1, m_2 a úhel α (viz obrázek). Vypočítejte zrychlení levého klínu. Předpokládejte, že nikde nedochází ke tření.

Bonus Uvažujte tření s koeficientem f.



Úloha V.4 ... tepelné ztráty

7 bodů

Na jaké teplotě se ustálí vnitřní prostředí bytu v panelovém domě? Uvažujte, že náš byt sousedí delšími stěnami, stropem a podlahou s dalšími byty, ve kterých je udržována teplota $22\,^\circ\mathrm{C}$. Kratšími stěnami sousedí s okolím, kde je teplota $-5\,^\circ\mathrm{C}$. Vnitřní rozměry bytu jsou: výška $h = 2{,}5\,\mathrm{m}$, šířka $a = 6\,\mathrm{m}$ a délka $b = 10\,\mathrm{m}$. Součinitel měrné teplotní vodivosti stěn je $\lambda = 0{,}75\,\mathrm{W\cdot K^{-1}\cdot m^{-1}}$. Vnější stěny a stropy jsou tlusté $D_{\mathrm{out}} = 20\,\mathrm{cm}$ a vnitřní $D_{\mathrm{in}} = 10\,\mathrm{cm}$.

Jak se změní výsledek, pokud budovu zvenku zateplíme polystyrenem o tloušťce $d = 5\,\mathrm{cm}$ s měrnou tepelnou vodivostí $\lambda' = 0{,}04\,\mathrm{W{\cdot}K^{-1}{\cdot}m^{-1}}$?

Úloha V.5 ... záludná kapka

8 bodů

Mějme kulatou kapku o poloměru r_0 tvořenou vodou o hustotě ϱ_v, která shodou okolností padá v mlze v homogenním tíhovém poli g. Uvažujme vhodnou mlhu se speciálními předpoklady. Tvoří ji vzduch o hustotě ϱ_vzd a vodní kapičky s průměrnou hustotou ϱ_r, když uvážíme, že se rozptýlí zcela rovnoměrně. Jestliže kapka propadne nějakým objemem takové mlhy, vysbírá všechnu vodu, která se v tomto objemu nachází. Na místě zůstane pouze vzduch. Jaká je závislost hmotnosti kapky na vzdálenosti uražené v takovéto mlze?
Bonus Řešte pohybové rovnice.

Úloha V.P ... plovoucí rtuť

9 bodů

Vymyslete co nejvíce fyzikálních „fíglů“, díky kterým by rtuť, alespoň po omezenou dobu, plavala na kapalné vodě. Čím trvalejší řešení naleznete, tím lépe.

Úloha V.E ... nezbedné fotony

12 bodů

Spolu se zadáním úlohy vám přišly polarizační brýle. Máte tedy 2 polarizační filtry. Když je dáte za sebe tak, aby směry jejich polarizace byly na sebe kolmé, nebude skrz ně procházet téměř žádné světlo. Pokud ale mezi ně nyní vložíte třetí vhodně natočený filtr, můžete pozorovat, že bude procházet nemalé množství světla. Změřte závislost propustnosti na úhlu natočení prostředního filtru.
Poznámka: Jako první filtr a zároveň zdroj světla doporučujeme použít svítící displej.

Úloha V.S ... rostou nám diferenciální rovnice

10 bodů

a) Řešte problém dvou těles pomocí Verletovy a Rungovy-Kuttovy metody 4. řádu přes několik (mnoho) period. Krok přitom volte tak velký, aby se projevily numerické chyby, a pozorujte, jakým způsobem se chyby v obou případech projevují na tvaru trajektorie.
b) Řešte pohyb tlumeného lineárního harmonického oscilátoru, který je dán rovnicí $\ddot{x}+2\delta\omega\dot{x}+\omega^2 x = 0$, kde ω je úhlová frekvence a δ tlumící člen. Parametry měňte a sledujte změny v chování oscilátoru. Pro jaké hodnoty parametrů se oscilátor utlumí nejrychleji?
c) Modelujte růst povrchu metodou balistické depozice a studujte statistické chování hrubosti povrchu. Nalezněte mocniny α a β popisující růst před saturací a po saturaci (viz seriál). Vyjděte z kódu v seriálu. Volte takový počet kroků, abyste byli schopni dobře studovat oba režimy hrubnutí. Lineární rozměr povrchu volte alespoň $L = 256$. (Upozornění: simulace mohou trvat i několik hodin.)
d) Simulujte na čtvercové mřížce šíření zhoubného nádoru pomocí Edenova modelu. Uvažujte přitom následující obměnu: s pravděpodobností p_1 dojde k nákaze zdravé buňky v kontaktu s nádorovou a s pravděpodobností p_2 dojde k uzdravení nakažené. Volte nejprve $p_1 \gg p_2$, pak $p_1 > p_2$ a nakonec $p_1 < p_2$. Na počátku nechť je nakaženo pět buněk do tvaru kříže. Kvalitativně popište, co pozorujete.
e) Přepište kód ze seriálu pro růst fraktálního krystalu (DLA model) na hexagonální mřížce na růst na čtvercové mřížce a spočtěte dimenzi výsledného fraktálu.

Poznámka Využít kódy přiložené k seriálu není nutné, ale doporučené.

Řešení IV. série

Úloha IV.1 ... zmrzlina

3 body; průměr 2,12; řešilo 51 studentů

Odhadněte, kolik gramů zmrzliny dokážeme vyrobit, pokud máme k dispozici 5 l *kapalného dusíku o teplotě* $-196\,^\circ\mathrm{C}$ *a neomezené množství mléka a smetany o pokojové teplotě* $22\,^\circ\mathrm{C}$*? Předpokládejme, že požadovaná zmrzlina se skládá jen z mléka a smetany (hmotnostně půl na půl) a měla by mít teplotu* $-5\,^\circ\mathrm{C}$*. Protože se tepelné kapacity mléka a smetany v tomto intervalu teplot značně mění, počítejte s jejich průměrnými hodnotami* $c_\mathrm{m} = 3{,}45\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$ *pro mléko a* $c_\mathrm{s} = 4{,}45\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$ *pro smetanu. Zbylé potřebné údaje si dohledejte na internetu.*

Michal dostal chuť na zmrzlinu.

V tomto příkladu budeme řešit tepelné rovnováhy, kdy teplo přijaté dusíkem se bude rovnat teplu odevzdanému zmrzlinou

$$Q_\mathrm{dod} = Q_\mathrm{od}\,.$$

Označme si zadané teploty $t_1 = 22\,^\circ\mathrm{C}$, $t_2 = -196\,^\circ\mathrm{C}$ a $t_3 = -5\,^\circ\mathrm{C}$ a podívejme se nejprve na druhou část. Použijeme známý vzoreček $Q = cm\Delta T$, kde c je tepelná kapacita, m je hmotnost a ΔT změna teploty. Odtud, protože zmrzlina je napůl mléko a napůl smetana, nám vychází

$$Q_\mathrm{od} = c_\mathrm{z} m_\mathrm{z}(t_1 - t_3) = \frac{c_\mathrm{s} + c_\mathrm{m}}{2} m_\mathrm{z}(t_1 - t_3)\,,$$

kde m_z je celková hmotnost zmrzliny a c_z je její celková tepelná kapacita .

Kapalný dusík se při kontaktu s teplejším tělesem začne odpařovat. Nalezli jsme měrné skupenské teplo varu[1] $l_\mathrm{N} = 198\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$. Všimněme si, že vynecháváme ohřívání dusíku na teplotu $-5\,^\circ\mathrm{C}$. To je z toho důvodu, že plynný dusík samovolně vyprchává z nádoby, protože jeho objem je několikanásobně vyšší. Počítejme tedy jeho ohřev před vyprcháním za tepelné ztráty.

Protože známe pouze objem kapalného dusíku, budeme si muset jeho hmotnost dopočítat sami. Nejedná se o 5 kg plynného dusíku, proto si musíme nalézt jeho hustotu v kapalném stavu,[2] která činí $\varrho = 808\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. Nyní už můžeme psát

$$Q_\mathrm{dod} = l_\mathrm{N} m_\mathrm{N} = l_\mathrm{N}\varrho V_\mathrm{N}\,,$$

kde m_N značí hmotnost dusíku.

Spojením všech tří rovnic dostáváme

$$\frac{c_\mathrm{s} + c_\mathrm{m}}{2} m_\mathrm{z}(t_1 - t_3) = l_\mathrm{N}\varrho V_\mathrm{N}\,,$$

odkud si můžeme vyjádřit hledanou hmotnost zmrzliny

$$m_\mathrm{z} = \frac{2 l_\mathrm{N}\varrho V_\mathrm{N}}{(c_\mathrm{s} + c_\mathrm{m})(t_1 - t_3)}\,.$$

[1] `http://www.ivt.mzf.cz/wp-content/uploads/fyzika/tep_konst_latek-zmeny_skupenstvi.pdf`
[2] `https://en.wikipedia.org/wiki/Nitrogen`

Dosazením zjistíme, že jsme vyrobili $m_z \doteq 7{,}5\,\mathrm{kg} = 7\,500\,\mathrm{g}$ zmrzliny.

I přes zanedbání veškerého ohřevu dusíku je výsledek nereálný kvůli mnoha dalším tepelným ztrátám.

Kateřina Smítalová
katka@fykos.cz

Úloha IV.2 ... autisti

3 body; průměr 2,24; řešilo 41 studentů

Kolik nejméně dětí by muselo roztočit svůj fidget spinner, aby se tak den na Zemi prodloužil o 1 ms*? Všechny neznámé veličiny odhadněte.* *Matěj chtěl mít víc času na „točení“.*

Řešení úlohy je založeno na zákonu zachování momentu hybnosti. Máme-li izolovanou soustavu (v našem případě je to Země s fidget spinnery), její celkový moment hybnosti se zachovává. Pro velikost momentu hybnosti vzhledem k ose otáčení platí vztah

$$L = J\omega\,,$$

kde ω je úhlová rychlost rotace kolem dané osy a J je moment setrvačnosti vzhledem k této ose. Pro moment setrvačnosti Země platí $J_\mathrm{Z} = \frac{2}{5}MR^2$, kde M je hmotnost Země a R je její poloměr.

Abychom pozemský den prodloužili, musíme zpomalit zemskou rotaci. To uděláme tak, že jí „ukradneme“ část momentu hybnosti tím, že fidget spinnery roztočíme stejným směrem. Protože součet momentů hybnosti musí zůstat konstantní, moment hybnosti samotné Země se sníží. Označíme-li moment setrvačnosti fidget spinneru J_s a maximální úhlovou rychlost, kterou je obyčejné dítě schopné svůj spinner roztočit, ω_s, pro celkový moment hybnosti všech spinnerů dostaneme

$$L_\mathrm{s} = NJ_\mathrm{s}\omega_s\,,$$

kde N je hledaný počet dětí. Je třeba zdůraznit, že všechny spinnery se musí točit stejným směrem a ideálně i jejich roviny otáčení musí být rovnoběžné. Autisti na rovníku je musí nechat rotovat kolmo na povrch Země, autisti na pólech zase rovnoběžně s povrchem Země. Ostatní děti musí držet spinner pod určitým náklonem vzhledem k povrchu podle toho, v jaké zeměpisné šířce se nacházejí.

V našem případě se moment setrvačnosti Země má změnit z

$$L_0 = J_\mathrm{Z}\omega_\mathrm{Z}$$

na

$$L = J_\mathrm{Z}\omega'_\mathrm{Z}\,,$$

kde

$$\omega_\mathrm{Z} = \frac{2\pi}{T_\mathrm{Z}} = \frac{2\pi}{1\,\mathrm{den}}$$

a

$$\omega'_\mathrm{Z} = \frac{2\pi}{T_\mathrm{Z} + \Delta T_\mathrm{Z}} = \frac{2\pi}{1\,\mathrm{den} + 1\,\mathrm{ms}}\,.$$

Aproximací $\Delta T_\mathrm{Z} \ll T_\mathrm{Z}$ dostáváme

$$L_0 - L = J_\mathrm{Z}(\omega_\mathrm{Z} - \omega'_\mathrm{Z}) = J_\mathrm{Z}\left(\frac{2\pi}{T_\mathrm{Z}} - \frac{2\pi}{T_\mathrm{Z} + \Delta T}\right) \approx J_\mathrm{Z}\frac{2\pi\Delta T}{T_\mathrm{Z}^2}\,.$$

Tato změna momentu je rovna momentu hybnosti spinnerů

$$L_0 - L = L_\mathrm{s}\,,$$

$$J_\mathrm{Z}\frac{2\pi\Delta T}{T_\mathrm{Z}^2} = N J_\mathrm{s}\omega_s\,,$$

$$N = \frac{4\pi M R^2 \Delta T}{5 J_\mathrm{s}\omega_s T_\mathrm{Z}^2}\,.$$

Nyní zbývá jen odhadnout neznámé veličiny fidget spineru (J_s a ω_s).

Ačkoliv některé kvalitní kovové spinnery mohou vážit i přes 120 g, nejčastěji používaný typ fidget spinneru má obvykle hmotnost kolem 50 g a poloměr zhruba 35 mm [3]. Moment setrvačnosti by bylo poměrně komplikované spočítat přesně, protože spinnery většinou nejsou homogenní. Proto je vhodné použít aproximaci. Můžeme například „od oka“ odhadnout, jaký poloměr by měl disk se stejnými parametry (tím bychom dostali správný řádový odhad). My použijeme sofistikovanější metodu. Všimneme si, že většina hmoty se nachází v prstencových kovových závažích, které se nacházejí v každé ze tří hlavic (někdy jsou jako závaží použita ložiska). Tato závaží aproximujeme kružnicemi s poloměrem 10 mm a se středem ve vzdálenosti 25 mm od středu spinneru.

Moment setrvačnosti nezávisí na tom, kolik má fidget spinner hlavic, protože moment setrvačnosti každé samotné hlavy je stejný a přímo úměrný její hmotnosti, která je zase nepřímo úměrná počtu hlav. Moment setrvačnosti kružnice vzhledem k její ose je stejný jako moment setrvačnosti hmotného bodu ve stejné vzdálenosti od osy

$$J_\mathrm{k} = m r_\mathrm{k}^2\,.$$

Moment vůči středu spinneru spočítáme pomocí Steinerovy věty

$$J_\mathrm{s} = m r^2 + J_\mathrm{k}\,,$$

kde $m = 50\,\mathrm{g}$, $r_\mathrm{k} = 10\,\mathrm{mm}$ a $r = 25\,\mathrm{mm}$ jsou výše odhadnuté hodnoty. Po dosazení dostáváme $J_\mathrm{s} \doteq 4 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}$ [4].

Zbývá odhadnout, jak rychle lze spinner roztočit. Pokud nemáme k dispozici stlačený vzduch, vrtačku či jiný mechanismus, může se nám podařit spinner roztočit až na 30 otáček za sekundu (to už chce zkušenost s točením a silné prsty). Tedy $\omega_\mathrm{s} \doteq 190\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$.

Dosazením těchto hodnot do vztahu pro N dostáváme

$$N \doteq 1 \cdot 10^{28},$$

což je tak velké číslo, že se o změny délky dne kvůli lidem s ADHD vůbec nemusíme bát.

Matěj Mezera
`m.mezera@fykos.cz`

[3] Pokud nějaký máte, můžete si ho zkusit zvážit a změřit.

[4] Také jsme mohli spinner aproximovat homogenním diskem (usnadnilo by to výpočet na úkor přesnosti) $J'_\mathrm{s} = \frac{1}{2} m r_\mathrm{s} \doteq 3 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}$, kde r_s je poloměr disku.

Úloha IV.3 ... divně tvarovaná nádobka

6 bodů; průměr 3,78; řešilo 32 studentů

Máme válcovou skleničku, která má zboku u dna malou díru o ploše S. Tato nádoba je naplněná vodou, která samovolně přetéká do druhé nádoby, která je tentokrát již bez díry. Jaký tvar by musela mít druhá nádoba, aby v ní hladina rostla rovnoměrně? Předpokládejte, že má být válcově symetrická.

Bonus Dna obou nádob jsou ve stejné výšce a nádoby jsou dírou spojené.

Karel se díval, jak se nalévá skleníčka na rautu.

Přepokládejme kvazistacionární proudění, abychom mohli sestrojit Bernoulliho rovnici pro proudnici od hladiny válcové nádoby v daném okamžiku až po výtokový otvor. Nechť ϱ je hustota vody, p_a atmosférický tlak, v výtoková rychlost vody z otvoru, h_1 výška hladiny ve válcové nádobě a $v_1 = -\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t} > 0$ je rychlost klesání hladiny. Bernoulliho rovnice pak má tvar

$$\frac{1}{2}\varrho v_1^2 + p_\mathrm{a} + h_1\varrho g = \frac{1}{2}\varrho v^2 + p_\mathrm{a}\,.$$

Po odečtení atmosférického tlaku p_a a vydělení rovnice hustotou pak dostaneme

$$\frac{1}{2}v_1^2 + h_1 g = \frac{1}{2}v^2\,. \tag{1}$$

Za předpokladu nestlačitelnosti vody plyne z rovnice kontinuity rovnost

$$S_1 v_1 = S v\,,$$

kde S_1, resp. S, je obsah příčného průřezu válcové nádoby, resp. jejího otvoru. Dosazením za v do rovnice (1) dostaneme

$$\frac{1}{2}v_1^2 + h_1 g = \frac{1}{2}\left(\frac{S_1}{S}\right)^2 v_1^2\,.$$

Odtud můžeme vyjádřit rychlost klesání hladiny

$$v_1 = \sqrt{\frac{2h_1 g}{\left(\frac{S_1}{S}\right)^2 - 1}}\,.$$

Dosazením $v_1 = -\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t}$ získáme diferenciální rovnici, kterou řešíme separací proměnných

$$-\frac{\mathrm{d}h_1}{\sqrt{h_1}} = \sqrt{\frac{2g}{\left(\frac{S_1}{S}\right)^2 - 1}}\mathrm{d}t\,.$$

Integrujeme od h_0 do h_1, tedy od počáteční výšky hladiny do její výšky v čase t

$$\int_{h_0}^{h_1} -\frac{\mathrm{d}h_1}{\sqrt{h_1}} = \int_0^t \sqrt{\frac{2g}{\left(\frac{S_1}{S}\right)^2 - 1}}\mathrm{d}t\,,$$

$$\left[-2\sqrt{h_1}\right]_{h0}^{h_1} = \left[\sqrt{\frac{2g}{\left(\frac{S_1}{S}\right)^2 - 1}}\,t\right]_0^t\,.$$

Dosazením integračních mezí dostáváme

$$-2\sqrt{h_1}+2\sqrt{h_0}=\sqrt{\frac{2g}{\left(\frac{S_1}{S}\right)^2-1}}t\,,$$

odkud vyjádříme

$$h_1=h_0-\sqrt{\frac{2h_0g}{\left(\frac{S_1}{S}\right)^2-1}}t+\frac{g}{\left(\frac{S_1}{S}\right)^2-1}\frac{t^2}{2}\,.$$

Derivací a drobnými algebraickými úpravami získáme vztah pro rychlost klesání hladiny v první nádobě

$$v_1=\sqrt{\frac{2h_0g}{\left(\frac{S_1}{S}\right)^2-1}}-\frac{g}{\left(\frac{S_1}{S}\right)^2-1}t\,.$$

Odtud můžeme dosadit do rovnice kontinuity ve tvaru $S_1v_1=S_2v_2$, kde v_2 je rychlost růstu hladiny ve druhé nádobě a S_2 je obsah jejího plošného průřezu. Ze zadání víme, že v_2 je konstantní, tedy $v_2=h_2/t$. Odtud si vyjádříme čas. Také platí $S_2=\pi r_2^2$, kde r_2 je hledaný poloměr druhé nádoby. Dostáváme pro něj

$$r_2=\sqrt{\frac{S_1}{\pi v_2}\left(\sqrt{\frac{2h_0g}{\left(\frac{S_1}{S}\right)^2-1}}-\frac{g}{\left(\frac{S_1}{S}\right)^2-1}\frac{h_2}{v_2}\right)}\,.$$

Tím máme analyticky zadaný tvar druhé nádoby, tedy závislost jejího poloměru na výšce ode dna. Závislost výšky na poloměru je

$$h_2=\frac{v_2}{g}\sqrt{\left(\frac{S_1}{S}\right)^2-1}\left(\sqrt{2h_0g}-\frac{\pi r_2^2v_2}{S_1}\sqrt{\left(\frac{S_1}{S}\right)^2-1}\right)\,.$$

Jedná se o rovnici paraboly s maximem v jejím vrcholu, jejíž osa leží na ose nádobky. Nádobka má tedy tvar části rotačního paraboloidu.

V případě, že $S\ll S_1$, můžeme v Bernoulliho rovnici (1) zanedbat první člen. Pro výtokovou rychost potom platí

$$v=\sqrt{2h_1g}$$

a pro rychlost klesání hladiny v první nádobě tak dostáváme

$$v_1=\frac{S}{S_1}\sqrt{2h_1g}\,.$$

Podobným postupem jako výše bychom se dostali k výsledku

$$r_2=\sqrt{\frac{S}{\pi v_2}\left(\sqrt{2h_0g}-\frac{Sg}{S_1}\frac{h_2}{v_2}\right)}\,.$$

Bonus

Bernoulliho rovnice pro hladiny válcové a divně tvarované nádoby má tvar

$$\frac{1}{2}\varrho v_1^2 + p_\mathrm{a} + h_1\varrho g = \frac{1}{2}\varrho v_2^2 + p_\mathrm{a} + h_2\varrho g\,,$$

kde všechny veličiny jsou definovány jako dříve. Jednoduchými úpravami ji dostaneme do tvaru

$$\frac{1}{2}v_1^2 + h_1 g = \frac{1}{2}v_2^2 + h_2 g\,. \tag{2}$$

Derivací podle času dostáváme

$$v_1\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} - v_1 g = v_2 g\,,$$

kde jsme první člen zderivovali podle pravidla pro derivaci složené funkce a o v_2 víme, že je konstantní. Nyní separujeme proměnné a obě strany rovnice integrujeme

$$\int \frac{v_1}{v_1+v_2}\mathrm{d}v_1 = \int g\mathrm{d}t\,.$$

První integrál vyřešíme částečným dělením integrandu, neboli

$$\int \frac{v_1}{v_1+v_2}\mathrm{d}v_1 = \int \frac{v_1+v_2-v_2}{v_1+v_2}\mathrm{d}v_1 = \int \left(1-\frac{v_2}{v_1+v_2}\right)\mathrm{d}v_1 = v_1 - v_2\ln\left(v_1+v_2\right) + C_1\,.$$

Druhý integrál je triviální, celkově vychází

$$v_1 - v_2\ln\left(v_1+v_2\right) = gt + C\,, \tag{3}$$

kde C je již jediná integrační konstanta (zde jsme výhodněji použili neurčité integrály s integračními konstantami místo určitých integrálů), kterou určíme z počátečních podmínek. V čase $t=0$ je výška hladiny válcové nádoby h_0 a klesá rychlostí v_0. Odtud dostáváme

$$v_0 - v_2\ln\left(v_0+v_2\right) = C\,. \tag{4}$$

Z rovnice (2) si vyjádříme rychlost

$$v_0 = \sqrt{{v_2}^2 - 2h_0 g}\,,$$

kterou dosadíme do (4), a tím získáme vztah pro hledanou integrační konstantu

$$C = \sqrt{{v_2}^2 - 2h_0 g} - v_2\ln\left(\sqrt{{v_2}^2 - 2h_0 g} + v_2\right)\,.$$

Odtud můžeme dosadit do (3). Stejně tak dosadíme za $v_1 = \frac{\pi r_2^2}{S_1}v_2$ a za $t = \frac{h_2}{v_2}$. Celkově píšeme

$$\frac{\pi r_2^2}{S_1}v_2 - v_2\ln\left(\frac{\pi r_2^2}{S_1}v_2 + v_2\right) = \frac{h_2 g}{v_2} + \sqrt{{v_2}^2 - 2h_0 g} - v_2\ln\left(\sqrt{{v_2}^2 - 2h_0 g} + v_2\right)\,.$$

Nyní můžeme konečně vyjádřit

$$h_2 = \frac{{v_2}^2}{g}\left(\frac{\pi r_2^2}{S_1} - \sqrt{1-\frac{2h_0 g}{v_2^2}} + \ln\left(\frac{\sqrt{1-\frac{2h_0 g}{v_2^2}}+1}{\frac{\pi r_2^2}{S_1}+1}\right)\right)\,,$$

což je vztah závislosti výšky divně tvarované nádoby na poloměru r_2. Bezpochyby by byla zajímavější opačná závislost, tedy závislost poloměru na výšce. Ta bohužel analyticky vyjádřit nejde, protože rovnice je transcendentní vzhledem k proměnné r_2. Ještě dodejme, že při volbě počátečních podmínek jsme mohli zvolit kromě výšky h_0 např. i obsah dna divně tvarované nádoby nebo rychlost klesání hladiny ve válcové nádobě v čase $t = 0$. Dále si povšimněme, že při řešení bonusové úlohy již nemůžeme zanedbat první člen levé strany Bernoulliho rovnice.

Václav Mikeska
v.mikeska@fykos.cz

Úloha IV.4 ... vymyslete si sami

7 bodů; průměr 6,16; řešilo 32 studentů

Máme černou skříňku se třemi výstupy (A, B a C). Víme, že obsahuje n rezistorů se stejným odporem, ale nevíme jak jsou zapojeny. Změříme tedy odpory mezi dvojicemi bodů AB, BC a CA a zjistíme, že $R_{AB} = 3\,\Omega$, $R_{BC} = 5\,\Omega$ a $R_{CA} = 6\,\Omega$. Zjistěte, kolik nejméně rezistorů může skříňka obsahovat a určete příslušný odpor jednoho rezistoru.

Matěj to vymyslel velmi rychle.

Při řešení úlohy lze postupovat několika různými způsoby. Jelikož máme jen jeden druh součástky, kterou můžeme použít (víme, že všechny odpory uvnitř jsou stejné), můžeme zkoušet sestavovat různá zapojení mezi třemi výstupy a zjišťovat, jaké budou výsledné odpory. Neznámý počet odporů uvnitř nám ale bude práci značně ztěžovat. Dalším způsobem je nahradit si celý vnitřní obvod třemi různými odpory zapojenými do trojúhelníku nebo do hvězdy. My si ukážeme oba postupy.

brute-force

Označme si nejprve počet odporů n. Toto číslo budeme po jednom postupně zvyšovat a hledat, zda existuje dané zapojení.

Zároveň nás nebude zajímat konkrétní poloha bodů A, B a C, protože ty můžeme přeznačením libovolně vyměňovat. Budeme se zajímat pouze o poměr výstupních odporů, protože ten je lineárně závislý na odporu R jednoho rezistoru. Hledáme poměr 3:5:6.

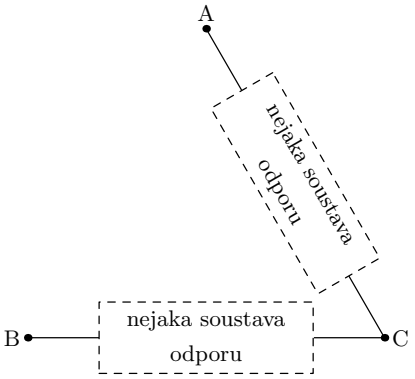
$n = 1$

Z jednoho odporu skříňku zřejmě nepostavíme.

$n = 2$

Povšimněme si, že se největší hodnota odporu mezi dvěma výstupy se nerovná součtu zbývajících dvou odporů. Dva odpory mezi třemi výstupy lze ale zapojit pouze sériově, tedy jeden výstupní odpor by musel být součtem předchozích dvou.

Toto je klíčové pozorování, které nám dále usnadní práci. Zjišťujeme tu, že obvod nemůže být zapojen tak, že každá cesta mezi dvěma vzdálenějšími výstupy vede přes prostřední výstup, jak je zobrazeno na obrázku 1.
Proto už dále nebudeme takovou možnost zapojení uvažovat.



Obr. 1: Zapojení přes uzel.

$n = 3$

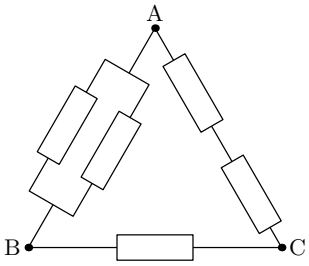
Pro tři odpory máme pouze dvě možná zapojení: trojúhelník nebo hvězda (neuvažujeme zapojení vyloučená výše). Snadno nahlédneme, že obě tato zapojení jsou symetrická a vedla by tak k naměření stejných hodnot pro jakoukoliv dvojici výstupů.

$n = 4$

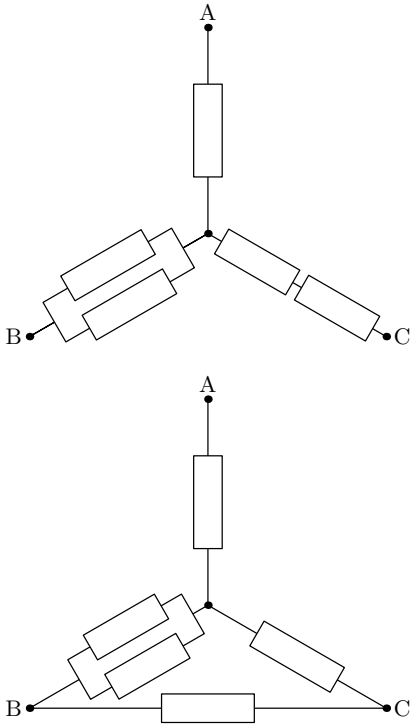
Víme, že každé uvažované zapojení tří odporů má tři osy symetrie. Přidáním jednoho dalšího rezistoru do obvodu se zbavíme pouze dvou z nich. Vždy nám jedna osa symetrie zůstane, což implikuje naměření stejných hodnot na dvou různých výstupech. Jelikož jsme naměřili tři různé hodnoty odporu, nelze vnitřní obvod sestavit ani ze čtyř rezistorů.

$n = 5$

Přidáním dalšího rezistoru už jsme schopni sestavit nesymetrický obvod. Začneme-li si vypisovat všechna možná zapojení pěti rezistorů mezi třemi výstupy, podaří se nám najít pouze tři nesymetrická zapojení.[5]



[5] Důkaz zde uvádět nebudeme. Podařilo-li se vám najít nějaké další zapojení, zkuste si ho překreslit do co nejjednodušší podoby a zjistíte, že je buď symetrické, nebo je to jedno ze tří uvedených zapojení.



Jednotlivé výstupní odpory pro zapojení ve tvaru hvězdy vypočítáme jednoduše sečtením dvou „ramen“ spojujících dané vrcholy

$$\begin{aligned} R^{\star}_{AB} &= R^{\star} + \frac{R^{\star 2}}{R^{\star} + R^{\star}} = 1\frac{1}{2}R^{\star}\,., \\ R^{\star}_{BC} &= \frac{R^{\star 2}}{R^{\star} + R^{\star}} + R^{\star} + R^{\star} = 2\frac{1}{2}R^{\star}\,, \\ R^{\star}_{CA} &= 2R^{\star} + R^{\star} = 3R^{\star}\,, \end{aligned}$$

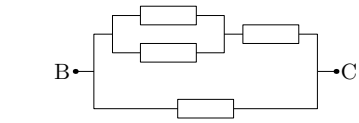
Poměr odporů mezi výstupy je tedy $3 : 5 : 6$.

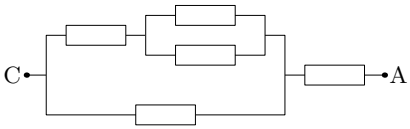
Výstupní odpory v zapojení do trojúhelníku spočítáme jako paralelní zapojení části spojující dané body a větve procházející přes třetí vrchol

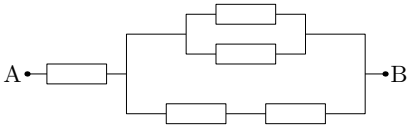
$$\begin{aligned} R^{\triangle}_{AB} &= \frac{\frac{1}{2}R^{\triangle} \cdot 3R^{\triangle}}{R^{\triangle} + 2R^{\triangle} + \frac{1}{2}R^{\triangle}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{2}}R^{\triangle} = \frac{3}{7}R^{\triangle}\,, \\ R^{\triangle}_{BC} &= \frac{R^{\triangle} \cdot \left(2\frac{1}{2}\right)R^{\triangle}}{R^{\triangle} + 2R^{\triangle} + \frac{1}{2}R^{\triangle}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{7}{2}}R^{\triangle} = \frac{5}{7}R^{\triangle}\,, \\ R^{\triangle}_{CA} &= \frac{2R^{\triangle} \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)R^{\triangle}}{R^{\triangle} + 2R^{\triangle} + \frac{1}{2}R^{\triangle}} = \frac{\frac{6}{2}}{\frac{7}{2}}R^{\triangle} = \frac{6}{7}R^{\triangle}\,. \end{aligned}$$

U tohoto zapojení nám vyšel také poměr 3 : 5 : 6.

Výstupní odpory třetího zapojení spočítáme následovně (pomoci může přehlednější překreslení jednotlivých situací a použití základních pravidel pro dva sériově nebo paralelně zapojené rezistory)







$$R^{\triangledown}_{CA} = R^{\triangledown} + \frac{R^{\triangledown}\frac{3}{2}R^{\triangledown}}{R^{\triangledown} + \frac{3}{2}R^{\triangledown}} = \frac{8}{5}R^{\triangledown}$$

$$R^{\triangledown}_{AB} = R^{\triangledown} + \frac{2R^{\triangledown}\frac{1}{2}R^{\triangledown}}{2R^{\triangledown} + \frac{1}{2}R^{\triangledown}} = \frac{7}{5}R^{\triangledown}$$

$$R^{\triangledown}_{BC} = \frac{R^{\triangledown}\frac{3}{2}R^{\triangledown}}{R^{\triangledown} + \frac{3}{2}R^{\triangledown}} = \frac{3}{5}R^{\triangledown}\,.$$

Teď jsou odpory rozděleny v poměru 3 : 8 : 7, což není požadovaný poměr.

$n \geq 6$

Nemá smysl hledat dál, protože jsme již našli zapojení s menším počtem použitých rezistorů.

Závěr

Zjišťujeme, že úloha má dvě možná řešení, přičemž oba obvody sestávají z pěti rezistorů. Odpor jednoho rezistoru zjistíme jednoduše. Stačí vzít např. odpor mezi body A a B a položit ho roven 3Ω

$$1\frac{1}{2}R^{\star} = 3\Omega \quad \Rightarrow \quad R^{\star} = 2\Omega\,,$$

$$\frac{3}{7}R^{\triangle} = 3\Omega \quad \Rightarrow \quad R^{\triangle} = 7\Omega\,.$$

Přímý výpočet

Další metodou výpočtu je převedení úlohy na hledání jednotlivých dílčích odporů. Začneme tím, co jsme ukázali v prvním obrázku, tzn. že obvod nemůže mít jediný uzel v některém výstupním bodě, a obvody tohoto typu nebudeme uvažovat.

Složitějším zapojením tří bodů jsou sestavy trojúhelník a hvězda. Zkusíme tedy spočítat, jaké odpory by tato hvězda nebo trojúhelník musely obsahovat, a poté se je pokusíme seskládat ze samotných stejných odporů. Označme $R_{\mathrm{AB}} = 3\Omega$, $R_{\mathrm{BC}} = 5\Omega$ a $R_{\mathrm{CA}} = 6\Omega$. Dále jednotlivé odpory, ze kterých se skládá hvězda, budeme značit R_{A}, R_{B} a R_{C}. Můžeme si napsat soustavu tří rovnic

$$\begin{aligned} R_{\mathrm{AB}} &= R_{\mathrm{A}} + R_{\mathrm{B}}\,, \\ R_{\mathrm{BC}} &= R_{\mathrm{B}} + R_{\mathrm{C}}\,, \\ R_{\mathrm{CA}} &= R_{\mathrm{C}} + R_{\mathrm{A}}\,. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy je

$$\begin{aligned} R_{\mathrm{A}} &= \frac{R_{\mathrm{AB}} - R_{\mathrm{BC}} + R_{\mathrm{CA}}}{2} = 2\Omega\,, \\ R_{\mathrm{B}} &= \frac{R_{\mathrm{BC}} - R_{\mathrm{CA}} + R_{\mathrm{AB}}}{2} = 1\Omega\,, \\ R_{\mathrm{C}} &= \frac{R_{\mathrm{CA}} - R_{\mathrm{AB}} + R_{\mathrm{BC}}}{2} = 4\Omega\,. \end{aligned}$$

Vidíme, že vycházejí „pěkné“ hodnoty. Dále řešíme jen úvahou. Jestliže jeden odpor má 2Ω, sériové zapojení dvou takových rezistorů má 4Ω a paralelní zapojení těchto dvou rezistorů má 1Ω, což nám dává řešení úlohy v podobě prvního obrázku hvězdy s pěti použitými rezistory.

Kdybychom se na začátku rozhodli místo hvězdy počítat zapojení pro trojúhelník, dostali bychom značně komplikované rovnice,[6] ale jejich vyřešením také dostaneme poměr tří dílčích odporů 1:2:4.

I v tomto případě je potřeba ověřit, že žádné zapojení jednoho až čtyř rezistorů nevede na požadované odpory mezi výstupy. To provedeme stejně jako v metodě brute-force.

Matěj Mezera
`m.mezera@fykos.cz`

Úloha IV.5 ... nemožnost nakažení

7 bodů; průměr 4,24; řešilo 34 studentů

Představme si, že roztlačíme nějakou bakterii obvyklé velikosti na rychlost $v = 50\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ ve vodorovném směru a necháme ji volně letět ve vzduchu. Jakou vzdálenost zhruba urazí, než se zastaví?

Výsledek vás možná překvapí. Jak je tedy možné se infikovat tímto způsobem bakteriální infekcí? Diskutujte, proč je to možné i přes takový výsledek.

Karel se díval na Youtube na TED-Ed.

[6] Výrazně jednodušší je nejprve spočítat hvězdu a poté jí převést na trojúhelník (to lze buď podle známých převodních vztahů nebo vlastním výpočtem).

Bakterie se v čase t bude nacházet na vodorovné souřadnici $x\,(t)$ a bude mít vodorovnou rychlost $\dot{x}\,(t)$. Vzhledem k rychlostem a velikosti bakterie můžeme proudění vzduchu okolo považovat za laminární. Odporovou sílu působící na bakterii spočítáme ze Stokesova vztahu

$$F = -6\pi\eta r\dot{x}\,,$$

kde η je dynamická viskozita a r je charakteristický rozměr bakterie. Po dosazení do pohybové rovnice $F = m\ddot{x}$ dostaneme lineární homogenní diferenciální rovnici druhého řádu

$$\ddot{x} + \frac{6\pi\eta r}{m}\dot{x} = 0\,,$$

kterou řešíme určením charakteristického polynomu.[7] Jeho kořeny jsou

$$\lambda_1 = 0$$
$$\lambda_2 = -k\,,$$

kde

$$k = \frac{6\pi\eta r}{m}\,.$$

Řešení rovnice potom hledáme ve tvaru

$$x = C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t} = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-kt}\,.$$

V čase $t = 0$ je celková uražená dráha nulová, tedy

$$C_1 + C_2 = 0\,.$$

Rychlost v čase t získáme derivací

$$\dot{x} = -C_2 k\mathrm{e}^{-kt}\,,$$

což v kombinaci s druhou počáteční podmínkou $\dot{x}\,(0) = v_0$ vede na rovnici

$$v_0 = -C_2 k\,.$$

Jednoduchou algebrou vyjádříme jednotlivé konstanty

$$C_1 = \frac{v_0}{k}\,,$$
$$C_2 = -\frac{v_0}{k}\,.$$

Dosazením získáme parametrickou rovnici pohybu

$$x\,(t) = \frac{v_0}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right)\,.$$

Z rovnice je vidět, že bakterie ve skutečnosti nikdy nezastaví, ale bude se limitně blížit do bodu

$$x_{\max} = \lim_{t\to\infty} x\,(t) = \frac{v_0}{k}\,,$$

který tak představuje maximální vzdálenost, kterou může bakterie urazit, než se zastaví.

[7] Můžeme použít i separaci proměnných, ale užití charakteristického polynomu je v tomto případě jednodušší.

Dále bychom mohli uvažovat pohyb bakterie ve svislé ose. Díky tomu, že odporová síla je v rychlosti lineární, můžeme oba pohyby počítat zvlášť a výsledek získáme součtem jednotlivých pohybů.

Označme svislou souřadnici bakterie $y(t)$. Tíhová síla potom bude $F_g = -mg$, pro odporovou sílu platí $F = -mk\dot{y}$. V úlohách jako je tato těleso typicky velmi rychle dosáhne terminální rychlosti,[8] kterou můžeme z podmínky nulové výslednice sil určit jako

$$\dot{y}_{\mathrm{term}} = -\frac{g}{k}\,,$$

Dále už bakterie zrychlovat nebude. Nic nám však nebrání tento odhad ověřit výpočtem. Dosazením do pohybové rovnice dostáváme nehomogenní diferenciální rovnici

$$\ddot{y} + k\dot{y} = -g\,,$$

kterou opět řešíme pomocí charakteristického polynomu. Jak už asi tušíte, získáme tím řešení homogenní rovnice, které je stejné jako u rovnice vodorovného pohybu. K tomu ještě musíme přičíst partikulární řešení, které v tomto případě najdeme snadno,[9] bude to lineární funkce t. Řešení hledáme ve tvaru

$$y = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-kt} + C_3 t\,.$$

Opět vyjdeme z počátečních podmínek, $y(0)$ a $\dot{y}(0) = 0$, tedy $C_1 + C_2 = 0$. Pro derivaci y podle času platí

$$\dot{y} = -C_2 k\mathrm{e}^{-kt} + C_3\,,$$

což vede na vztah $-C_2k + C_3 = 0$. Poslední podmínku získáme spočítáním druhé derivace y a dosazením do původní diferenciální rovnice

$$0 = \ddot{y} + k\dot{y} + g = C_2k^2\mathrm{e}^{-kt} - C_2k\mathrm{e}^{-kt} + C_3 + g\,,$$

ze které vyplývá $C_2k(k-1) + C_3 + g = 0$. Nyní už trošku pracnější, ale stále jednoduchou algebrou vyjádříme

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{g}{k^2} \\ C_2 &= -\frac{g}{k^2} \\ C_3 &= -\frac{g}{k}\,. \end{aligned}$$

Konečně tak můžeme napsat parametrickou rovnici pro pohyb ve svislém směru

$$y(t) = \frac{g}{k^2}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right) - \frac{g}{k}t\,.$$

Vidíme, že náš odhad byl správný. Rychlost se velmi brzy přiblíží hodnotě $\dot{y}_{\mathrm{term}}$, protože hodnota k je vysoká (jak ukážeme níže) a člen e^{-kt} tedy velmi rychle konverguje k nule. Bakterie předtím sice urazí jistou vzdálenost, ta je však vzhledem k velikosti k^{-2} téměř zanedbatelná.

Nyní už nezbývá než dosadit číselné hodnoty. Dynamická viskozita vzduchu je při normálních podmínkách přibližně $\eta = 1{,}8 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{Pa}\cdot\mathrm{s}$. Bakterie jsou co do velikosti velmi rozmanité, ale

[8] Teoreticky nebude terminální rychlosti dosaženo nikdy, nicméně to můžeme považovat za dobrou aproximaci.

[9] Jedná se o rovnici se speciální pravou stranou.

můžeme odhadnout $r = 1\,\mu\text{m} = 1 \cdot 10^{-6}\,\text{m}$. Hmotnost typické bakterie odhadneme jako $m = 4\,\text{pg} = 4 \cdot 10^{-15}\,\text{kg}$. Dosazením číselných hodnot zjistíme, že $k \doteq 8{,}5 \cdot 10^4\,\text{s}^{-1}$.

Pro vodorovnou vzdálenost, kterou bakterie urazí, dostáváme $x_{\max} \doteq 1{,}6 \cdot 10^{-4}\,\text{m}$. To skutečně není daleko. Na druhou stranu, velikost terminální rychlosti ve svislém směru bude $\dot{y}_{\text{term}} \doteq -1{,}2 \cdot 10^{-4}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Bakterie tedy po výstřelu nedoletí téměř nikam, ale také prakticky nebude padat na zem. Může se tak pohybovat díky větru, čímž dokáže urazit daleko větší vzdálenosti.

Ve skutečnosti to však není tak jednoduché, protože bakterie se typicky šíří v malých kapičkách s poloměrem řádově $r' = 100\,\mu\text{m} = 1 \cdot 10^{-4}\,\text{m}$. Pokud předpokládáme, že se jedná o koule s hustotou podobnou hustotě vody, pro jejich hmotnost platí

$$m' = \frac{4}{3}\pi r_{\text{k}}^3 \varrho\,,$$

z čehož pro neznámou konstantu dostáváme

$$k' = \frac{9\eta}{2r_{\text{k}}^2 \varrho}\,.$$

Po dosazení číselných hodnot vychází $k' \doteq 8\,\text{s}^{-1}$, což vede na vzdálenost $x' \doteq 1{,}7\,\text{m}$. To už je docela reálný odhad toho, jak daleko běžně kýcháme. Pro rychlost klesání pak dostáváme $\dot{y}'_{\text{term}} \doteq -1{,}2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Shrneme-li výsledky předchozích výpočtů, dojdeme k závěru, že jednotlivé bakterie ve stojícím vzduchu urazí jen minimální vzdálenost. Díky tomu se ale dokáží efektivně šířit větrem. Oproti tomu větší kapičky brzy spadnou na zem, ale předtím se stihnou dostat do vzdálenosti, která bezpečně stačí k nakažení všech lidí v blízkém okolí.

Poznámky k došlým řešením

Základem této úlohy bylo uvědomit si, jaká odporová síla bude na bakterii působit. Z běžného života známe dva vzorce pro odporovou sílu – Stokesův pro laminární proudění a Newtonův pro turbulentní proudění. Pro velké rychlosti je sice proudění typicky turbulentní, ale co je to "velká rychlost" závisí mimo jiné na rozměrech tělesa. O jaký druh proudění jde zjistíme z hodnoty Reynoldsova čísla. V tomto případě vychází, že proudění bude laminární, tedy musíme použít Stokesův vzorec.

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`

Úloha IV.P ... Voyager II a Voyager I žijí! 9 bodů; průměr 3,19; řešilo 16 studentů

Máme nějaký satelit, který chceme vypustit ven ze Sluneční soustavy. Vypouštíme ho z oběžné dráhy Země tak, že po nějakých korekcích dráhy získá rychlost, která je vyšší než úniková rychlost ze Sluneční soustavy. Jaká je pravděpodobnost, že dojde ke kolizi sondy s nějakým kosmickým materiálem s průměrem větším než $d = 1\,\text{m}$ před opuštěním Sluneční soustavy?

Karel si říkal, proč ta NASA tuhle možnost ani neuvažuje...

Ľudstvo za svoju existenciu vypustilo do vesmíru približne stovku medziplanetárnych sond,[10] z pomedzi ktorých päť (Voyager 1 a 2, Pioneer 10 a 11 a New Horizons) opúšťa Slnečnú sústavu.

[10] `https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_interplanetary_voyages`

Najvzdialenejšia z nich je sonda Voyager 1, na začiatku roka 2018 vzdialená od Slnka asi 140 AU. V žiadnom prípade (aspoň pokiaľ je nám známe) nebola potvrdená zrážka s cudzím telesom. Niektoré sondy boli na kolízny kurz navedené zámerne, no mnoho sond, hlavne na začiatku kozmických letov, bolo stratených. Mohli za to technické problémy, alebo je vesmír plný „zabijáckych“ asteroidov?

Pravdepodobnosť zrážky

Pusťme sa do riešenia úlohy. Predpokladajme, že pozíciu planét poznáme a dokážeme sa im vyhnúť. Ďalej nech naša sonda letí v rovine ekliptiky ako väčšina sond. Nájdime najprv vzťah pre pravdepodobnosť zrážky našej sondy s jediným asteroidom. Pre jednoduchosť predpokladajme guľový tvar asteroidov a sondy s polomermi r_a, r_s. Zrážka nastane, ak je vzdialenosť sondy od asteroidu menšia ako súčet ich polomerov. V sústave pevne spojenej so sondou opíše asteroid obklopený „ochrannou zónou“ a pohybujúci sa rýchlosťou v' za čas Δt objem $V_a = \pi\,(r_a + r_s)^2\, v'\Delta t$. Ak sa bude asteroid nachádzať v náhodnom mieste objemu V (teda jeho polohu nepoznáme, len vieme, že tam niekde je), dostávame pre pravdepodobnosť zrážky

$$p_0 = \frac{V_a}{V} = \frac{\pi\,(r_a + r_s)^2\, v'\Delta t}{V}\,.$$

Opäť pre jednoduchosť predpokladajme, že asteroidy obiehajú okolo Slnka po kruhových trajektóriách a naša sonda sa vzďaľuje zo Slnečnej sústavy po priamke prechádzajúcej cez Slnko s práve únikovou rýchlosťou v rovine ekliptiky. Potom

$$p_0 = \frac{\pi\,(r_a + r_s)^2\,\sqrt{v_s^2 + v_a^2}\Delta t}{V}\,.$$

Pre kruhovú a únikovú rýchlosť platí $v_k^2 = \frac{GM}{R}$, $v_u^2 = \frac{2GM}{R}$, ďalej $v_s = \frac{\Delta R}{\Delta t}$, teda

$$p_0(R, r_a) = \frac{\pi\,(r_a + r_s)^2\,\sqrt{\frac{3}{2}}\Delta R}{V}\,.$$

Viac zrážok

Pre celkovú pravdepodobnosť P, že našu sondu niečo zasiahne, máme

$$1 - P = \prod_i (1 - p_i)\,,$$

čo po zlogaritmovaní a použitia odhadu $\ln(1 + x) = x$ pre $|x| \ll 1$ dá

$$P = \sum_i p_i\,,$$

ak predpokladáme, že všetky pravdepodobnosti sú malé (teda hlavne výsledná). Index i prebieha všetky telesá, ktoré nás zaujímajú. Príspevok telies vo vzdialenostiach R až $R+\Delta R$ s polomermi r_a až $r_a + \Delta r_a$ do celkovej pravdepodobnosti je

$$p(R, r_a) = \pi\,(r_a + r_s)^2\,\sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{(r_a + r_s)^2}{V(R)}\,\frac{\partial N(R, r_a)}{\partial r_a}\Delta r_a \Delta R\,,$$

kde $\frac{\partial N(R,r_a)}{\partial r_a}\Delta r_a$ je počet takýchto telies v objeme $V(R)$. Tento objem môžeme odhadnúť ako toroid s obdĺžnikovým prierezom, ktorý má polomer R, hrúbku ΔR a výšku $2R\sin i$, kde i je odhad istej strednej inklinácie dráh asteroidov. Preto

$$V(R) = 4\pi R^2 \Delta R \sin i\,,$$

$$p(R, r_a) = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{(r_a + r_s)^2}{4R^2 \sin i}\frac{\partial N(R, r_a)}{\partial r_a}\Delta r_a\,,$$

Celkovú pravdepodobnosť dostaneme súčtom/integrálom cez všetky prípustné R, r_a.

Distribúcia veľkosti asteroidov

Zostáva teda určiť funkciu $N(R, r_a)$. Určme najprv $P(R)$, pravdepodobnosť zásahu asteroidom ľubovoľnej veľkosti v intervale vzdialeností od Slnka R, $R + \Delta R$. Pre závislosť počtu asteroidov od ich veľkosti približne platí vzťah

$$N(r_a > r) = Ar^B\,,$$

kde koeficient $-2 > B > -3$ v závislosti na skupine a veľkosti objektov.[11] Pravdepodobne najväčší vplyv na parameter B majú vlastnosti materiálu, z ktorého sú asteroidy zložené. Koeficient A určíme pomocou polomeru desiateho najväčšieho asteroidu r_{10} v danej oblasti, čo je dohľadateľný údaj a zároveň už má istú štatistickú významnosť

$$10 = Ar_{10}^B \quad \Rightarrow \quad A = \frac{10}{r_{10}^B}\,,$$

$$N(r_a > r) = 10\left(\frac{r}{r_{10}}\right)^B\,.$$

Pre počet asteroidov s polomermi r_a až $r_a + \mathrm{d}r_a$ dostávame diferencovaním

$$\frac{\partial N(R, r_a)}{\partial r_a}\mathrm{d}r_a = 10B\left(\frac{r_a}{r_{10}}\right)^B\frac{\mathrm{d}r_a}{r_a}\,.$$

Preto vieme $P(R)$ určiť ako integrál

$$P(R) = \int_{r_0}^{r_1}\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{(r_a + r_s)^2}{4R^2 \sin i}\frac{\partial N(R, r_a)}{\partial r_a}\mathrm{d}r_a\,,$$

kde $r_0 = 0{,}5m$ je polomer najmenších asteroidov, ktoré nás zaujímajú,

$$P(R) = \int_{r_0}^{r_1}\frac{(r_a + r_s)^2}{r_a^{3+b}}\frac{5}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{Br_{10}^{2+b}}{R^2 \sin i}\mathrm{d}r_a\,,$$

$$P(R) = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{Br_{10}^2}{R^2 \sin i}\int_{r_0}^{r_1}\frac{r_{10}^b\,(r_a + r_s)^2}{r_a^{3+b}}\mathrm{d}r_a\,,$$

[11] `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Asteroids_by_size_and_number.svg`, `orbit.psi.edu/~tricaric/pdf/skads.pdf` alebo heslo *meteoroid* na en.wiki

kde sme na niektorých miestach nahradili $B = -2-b$, $0 < b < 1$. Označme integrál ako $-\alpha$, po jeho vypočítaní a dosadení medzí ($r_1 = 10^{-\frac{1}{B}} r_{10}$) s prihliadnutím na $r_s \approx r_0 \ll r_{10}$ dostávame

$$\alpha = -\left(\frac{r_1^{2+B} - r_0^{2+B}}{2+B} - r_0^B \left(\frac{2}{1+B} r_0 r_s + \frac{1}{B} r_s^2 \right) \right) r_{10}^b \,.$$

Pre danú oblasť a veľkosť sondy je α len bezrozmerná konštanta. Konečne pre pravdepodobnosť, že v oblasti, ktorej desiaty najväčší objekt má polomer r_{10}, dôjde k zrážke, dostávame

$$P(R) = -B \frac{5}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{r_{10}^2}{R^2 \sin i} \alpha \,.$$

Celkovú pravdepodobnosť určíme súčtom dielčích pravdepodobností pre všetky oblasti.

Medziplanetárna hmota

S rastúcou vzdialenosťou od Slnka musí naša sonda postupne prekonať:

- asteroidy skupín Apollo a Amor v priestore medzi dráhami Zeme a Marsu,
- krížiče Marsu,
- hlavný pás asteroidov,
- skupinu Trójanov, ktorí sa nachádzajú v okolí libračných bodov L4, L5 Jupitera, teda približne 60 ° pred a za ním na jeho orbite,
- skupinu Centaurov, ktorí sa nachádzajú medzi dráhami joviálnych planét a majú výrazne excentrické orbity,
- Kuiperov pás za dráhou Neptuna, v ktorom sa nachádza aj Pluto,
- objekty rozptýleného disku,
- Oortov oblak komét.

Prvé dve menované skupiny však obsahujú len málo objektov[12] v porovnaní s hlavným pásom. Pre hlavný pás odhadneme $R_{\min} = 2{,}2\,\mathrm{km}$, $R_{\max} = 3{,}2\,\mathrm{km}$, $i = 10\,°$.[13] Pre náš výpočet odhadnime $R = 2{,}5\,\mathrm{AU}$. Desiaty najväčší objekt v hlavnom páse je 15 Eunomia s polomerom $r_{10} = 134\,\mathrm{km}$.

Skupine Trójanov sa väčšina sond vyhýba, keďže využíva prelet okolo Jupitera na zvýšenie rýchlosti. Vystavuje sa tým ale riziku zrážky s Jupiterovymi satelitmi.

Pre Centaurov $r_{10} \doteq 80\,\mathrm{km}$,[14] $i = 15\,°$, $R = 5{,}5 \ldots 30\mathrm{AU} \doteq 10\,\mathrm{AU}$,[15] pričom pri poslednom odhade berieme do úvahy, že hľadáme priemer obrátených štvorcov, ktorý je vždy menší ako aritmetický.

Pre objekty za dráhou Neptúna $r_{10} \doteq 420\,\mathrm{km}$,[16] $i = 20\,°$, $R \doteq 45\,\mathrm{AU}$.[17]

O tom, ako vyzerá Slnečná sústava vo vzdialenostiach väčších ako 100 AU, veľa nevieme, preto náš výpočet ukončíme práve tu. Dokonca sa špekuluje o existencii deviatej planéty.[18] Vo vzdialenostiach väčších ako niekoľko tisíc AU sa predpokladá existencia Oortovho oblaku komét s miliardami objektov s priemerom väčším ako 20 km.[19]

[12] obrázok na http://faculty.washington.edu/trq/hpcc/stawarz/orbres.html
[13] https://en.wikipedia.org/wiki/Asteroid_family#/media/File:AsteroidIncAu.png
[14] http://www.johnstonsarchive.net/astro/tnodiam.html
[15] https://en.wikipedia.org/wiki/Centaur_(minor_planet)#/media/File:TheKuiperBelt_42AU_Centaurs.svg
[16] https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_trans-Neptunian_objects
[17] https://en.wikipedia.org/wiki/Trans-Neptunian_object#/media/File:TheTransneptunians_73AU.svg
[18] http://www.findplanetnine.com/
[19] https://en.wikipedia.org/wiki/Oort_cloud

Finálny výpočet

Tab. 1: Závislosť parametra α na B, r_{10}

$\frac{r_{10}}{\mathrm{km}}$	$B=-2.1$	$B=-2.5$	$B=-2.9$
80	60	4 000	400 000
134	60	5 000	600 000
420	70	9 000	1 600 000

Najprv sa bližšie pozrime na hodnoty, ktoré nadobúda α. Pre $r_0 = 0{,}5\,\mathrm{m}$, $r_s = 1{,}5\,\mathrm{m}$ a rôzne hodnoty B dostávame pre jednotlivé pásma hodnoty v tabuľke 1. Vidíme, že α sa v závislosti od parametrov nachádza v intervale 50 až 2 000000, pričom dominantný vplyv má parameter B. Pôjde teda o extrémne hrubý odhad. Vďaka tomu sú aj naše pôvodné zanedbania modelu oprávnené. Pre zaujímavosť sú v tabuľke 2 uvedené hodnoty α pre rôzne hodnoty r_0 pre $r_{10} = 100\,\mathrm{km}$. Môžeme si všimnúť, že zatiaľ čo v prípade $r_s \ll r_0$ je koeficient pomerne malý, pre $r_0 \ll r_s$ nadobúda obrovské hodnoty. Sonda totiž „vymetá“ priestor vyplnený obrovským množstvom malých telies.

Tab. 2: Závislosť parametra α na B, r_0

r_0	$B=-2.1$	$B=-2.5$	$B=-2.9$
1 km	7	19	70
100 m	11	60	600
10 m	17	200	5 000
1 m	30	1 500	110 000
1 dm	600	110 000	20 000 000
1 cm	60 000	30 000 000	1 600 000 000
1 mm	7 000 000	9 000 000 000	12 000 000 000 000

Čiastkovú pravdepodobnosť môžeme odhadnúť ako

$$P(R) = 50\frac{r_{10}^2}{R^2}\alpha\,.$$

Pre parameter $\frac{r_{10}^2}{R^2}$ dostávame postupne $1{,}3 \cdot 10^{-13}$ pre hlavný pás, $3 \cdot 10^{-15}$ pre Centurov a $4 \cdot 10^{-15}$ pre transneptunické objekty. Teda hlavný pás je dominantný zdroj rizika.

Pre celkovú pravdepodobnosť zrážky s telesom väčším ako 1 m dostávame

$$P \doteq 4 \cdot 10^{-10} \text{ až } 4 \cdot 10^{-6}\,.$$

Môžme vidieť, že inžinieri sa nemusia ničoho obávať, pokiaľ ide o zásah sondy objektom väčším ako meter pri voľnom prelete Slnečnou sústavou. Aby sa riziko pohybovalo na úrovni percent, musí mať koeficient α hodnotu v ráde miliárd. To ale nastáva len pre milimetrové telesá v prípade nepriaznivejšieho koeficienta B.

Inou otázkou sú ale blízke prelety popri objektoch, ktoré majú prstence, keďže v nich je koncetrácia hmoty vyššia. Touto otázkou sa zaoberali vedci v prípade finálnej časti misie Cassini, ktorá prelietavala medzerou v prstencoch Saturna a kľúčová bola u sondy New Horizons pri prelete okolo Pluta, o ktorom sa dovtedy nevedelo, že prstence nemá. V dnešnej dobe sa rovnako problematickým stáva odletieť preč od Zeme, ktorú sme si obklopili množstvom satelitov, ale i odpadu.

Jozef Lipták
liptak.j@fykos.cz

Úloha IV.S ... kořeni a automati

10 bodů; průměr 7,05; řešilo 19 studentů

a) *Nalezněte všechny (tři) reálné kořeny funkce* $\exp(x) - 5x^2$*. Výběr metody je na vás. Nezapomeňte okomentovat, jak a proč jste zvolili daný postup.*

b) *Newtonova metoda tak, jak jsme si ji představili funguje i pro funkce komplexní proměnné. Vaším úkolem je vykreslit tzv. Newtonovy fraktály, tedy oblasti v komplexní rovině takové, že když v nich zvolíme počáteční odhad kořenu pro Newtonovu metodu, tak dokonvergujeme k určitému kořenu. Fraktál vykreslete pro funkce* z^3-1 *a* z^6+z^3-1*, kde z je komplexní číslo. Derivace těchto funkcí jsou* $3z^2$*, resp.* $6z^5+3z^2$*. Pro výpočet a vykreslení můžete použít Pythonní kód přiložený k zadání.*

Poznámka *Komplexní derivaci, pokud existuje, lze technicky spočítat stejně, jako reálnou derivaci, tedy pro ni platí stejné vzorce pro derivaci součtu, součinu a složené funkce.*

Bonus *Nalezněte co nejzajímavější nebo nejhezčí Newtonův fraktál.*

c) *Simulujte na počítači (nebo napočítejte ručně) elementární buněčný automat s pravidlem 54 na mřížce délky 20 s periodickými podmínkami alespoň na 10 časových kroků (víc určitě neuškodí). Na počátku má jedna libovolná buňka hodnotu 1 a zbylé 0. Výsledek zobrazte v časoprostorovém diagramu (jako na obr. 1 z textu seriálu).*

d) *Simulujte hrubnutí 1D povrchu pomocí modelu náhodné depozice popsaném v seriálu. Povrch má rozměr* $L = 100$*, na počátku je zcela hladký. Nakreslete graf závislosti hrubosti W na čase pro alespoň* 10^8 *kroků (jeden krok = jedna nová částice), výsledek diskutujte.*

Lukáš a Mirek se inspirují na přednáškách.

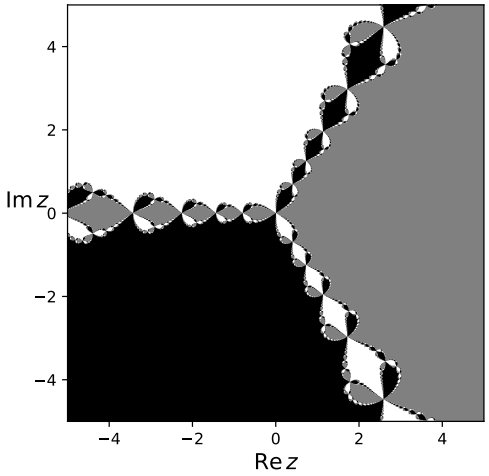
a) Naším úkolem je nalézt všechny kořeny funkce $\exp(x)-5x^2$, ale všechny metody, se kterými jsme se seznámili, dokáží samy o sobě najít vždy jen jeden kořen. Prvním krokem tedy bude najít přibližné hodnoty kořenů. Na každý z nich poté zvlášť spustíme některý z algoritmů pro upřesnění hodnoty. Konkrétně použijeme metodu regula-falsi, protože je zpravidla rychlejší, než bisekce. Metodu sečen ani Newtonovu metodu nepoužijeme, neboť obecně nemáme jistotu, že dokonvergujeme, a pokud ano, že dokonvergujeme ke kořenu, který je nejblíže od počátečního odhadu (viz Newtonovy fraktály).

Těchto nevýhod metody sečen a tečen se lze zbavit tak, že je zkombinujeme třeba s metodou bisekce. Základní myšlenka těchto metod je taková, že dostaneme počáteční interval, odněkud z něj vystartujeme Newtonovou metodou a hlídáme si, aby odhad kořene nevylezl z intervalu. Pokud z něj vyleze, přepneme na bisekci.

Abychom mohli použít metodu regula-falsi, musíme nejprve najít tři intervaly takové, aby v každém z nich ležel právě jeden kořen. Nejjednodušeji toho docílíme vykreslením grafu funkce. Takto „od oka“ zjistíme, že kořeny leží přibližně v bodech $-0{,}4$, $0{,}6$ a $4{,}7$. Jako počáteční intervaly nám tedy poslouží například $(-1,0)$, $(0,1)$ a $(4,5)$ (první dva intervaly můžeme uhodnout i podle znamének hodnot funkce v bodech $x=-1$, $x=0$ a $x=1$, třetí

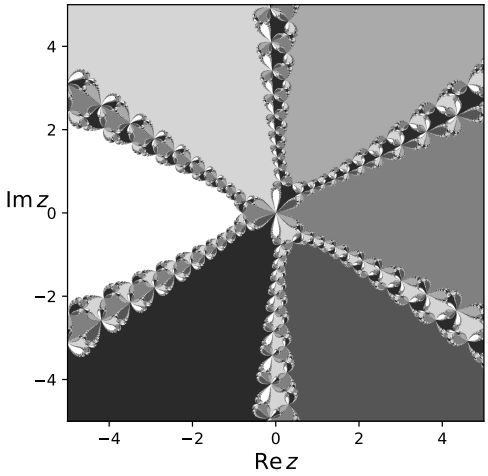
kořen pak musí ležet v $(1, \infty)$, protože v nekonečnu je exponenciála větší než kvadratická funkce). Přímočarou aplikací metody regula-falsi pak dostaneme kořeny přibližně $-0{,}371\,42$, $0{,}605\,27$ a $4{,}707\,94$. Zdrojový kód řešení naleznete v příloze na webu.

b) Dosazením funkcí ze zadání do šablony přímočaře získáme Newtonovy fraktály na obrázcích 2 a 3. Barva přitom označuje kořen, do kterého dokonvergujeme z daného počátečního místa. Je vidět, že tyto oblasti tvoří poměrně komplikovaný geometrický útvar – fraktál. Nebudeme zde uvádět složitou matematickou definici fraktálu založenou na nerovnosti různých definic dimenze, všimněme si ale jedné časté vlastnosti fraktálů, soběpodobnosti. Pokud se totiž podíváme na námi vykreslené fraktály, uvidíme, že určité výřezy vypadají stejně jako celý obrázek, jen jsou zmenšeny. Pokud bychom si tyto oblasti přiblížili a vykreslili s dostatečným rozlišením, zjistili bychom, že v zoomování můžeme pokračovat dále, prakticky do nekonečna, a vzniklý výřez by byl stále podobný celému fraktálu.
Prakticky tedy vidíme, že při použití Newtonovy metody si musíme dát pozor na to, že nemusíme vždy dokonvergovat k nejbližšímu kořenu a že v určitých oblastech stačí nepatrně změnit počáteční odhad a dokonvergujeme k jinému kořenu, než předtím. A v neposlední řadě, fraktály jsou prostě hezké a fascinující.



Obr. 2: Newtonův fraktál pro funkci $z^3 - 1$.

c) Připomeňme si, jak se elementární buněčné automaty klasifikují. Budeme-li možné stavy buňky označovat 1 a 0, musí okolí jedné buňky (včetně ní) vypadat jako jedna z následujících trojic: 111, 110, 101, 100, 011, 010, 001, 000. Pro každou z těchto osmic (v tomto pořadí) si zapíšeme, do jakého stavu se vyvine prostřední buňka a tato série nul a jedniček nám dá binární číslo, které představuje hledané pravidlo. V této úloze máme pravidlo zadané, 54 se zapíše ve dvojkové soustavě jako 00 110 110 (úmyslně nevynecháváme nuly na začátku). Nyní tedy víme, že pokud je buňka ve stavu 1 a zleva i zprava sousedí s buňkami také ve stavu 1, změní svůj stav na 0 atd. Když se na pravidlo dobře podíváme, vidíme, že se dá popsat i slovně – buňka změní barvu vždy, když sousedí s černou.



Obr. 3: Newtonův fraktál pro funkci $z^6 + z^3 - 1$.

Když si zkusíme nakreslit prvních pár kroků na čtverečkovaný papír, zjistíme, že se jedná o velice jednoduché pravidlo, kde se po dvou krocích pokaždé zreplikuje tvar připomínající tetrisový dílek. Jediný potenciální problém představují okrajové podmínky, ale jak vidíme na obrázku 4, kromě rozseknutí okrajových dílků se nic nezmění.

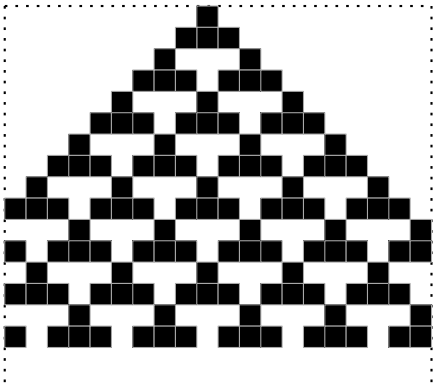
Obrázek 4 byl nakreslen v grafickém editoru, pokud bychom chtěli přeci jen získat výsledek pomocí počítače, museli bychom použít kód, který využívá některé pokročilejší funkce jazyka Python. Na našem webu naleznete příklad takového kódu: `http://fykos.cz/rocnik31/ulohy/serie4`.

d) Tento úkol již nelze vyřešit pomocí tužky a papíru, ale nebude potřeba konstruovat dvourozměrné pole. Sice opět studujeme vývoj 1D automatu, avšak nemusíme si pamatovat stav každé buňky v každém časovém kroku, ale pouze jednu hodnotu – hrubost. Také je dobré si uvědomit, že na grafu nezobrazíme všech zadaných 10^8 kroků, stačí tedy hrubost spočíst vždy jen po intervalu délky 10^4 nebo větším.

Výsledek simulace vidíte na grafu 5. Všimněte si, že zatímco na začátku roste hrubost strmě, postupně se rychlost růstu snižuje a zvyšuje se šum. Kód použitý k simulaci náhodné depozice je velmi jednoduchý, naleznete ho taktéž na našem webu.

Podívejme se ještě, jaké je statistické chování vývoje hrubosti – data získáme mírnou úpravou kódu, kdy cyklus uzavřeme do dalšího cyklu a při každém opakování přičteme výsledné pole hrubostí k nově definovanému poli, jehož každý prvek po proběhnutí vnějšího cyklu vydělíme počtem opakování. Po delší simulaci (100 realizací pro $3 \cdot 10^7$ kroků, může trvat i několik hodin) zjistíme, že charakter vývoje hrubosti je mocninný, konkrétně jde o druhou odmocninu. Stejný výsledek jsme dostali minule při zkoumání střední vzdálenosti 2D náhodné procházky od počátku. Jelikož k této úloze nebyl poskytnut kód, nevyžadujeme fitování, lze si však zkopírováním kódu z minulého dílu[20] ověřit, že se střední hrubost v asymptotě

[20] `http://fykos.cz/_media/rocnik31/ulohy/pdf/serial31_3.pdf`, str. 7.

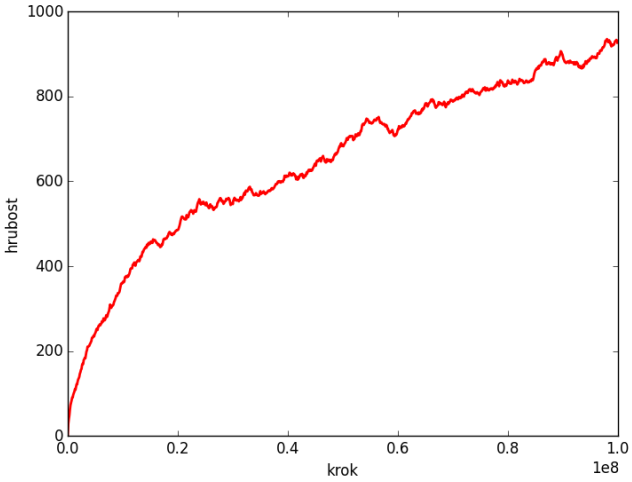


Obr. 4: Vývoj elementárního CA s pravidlem 54 na mřížce délky 20 s periodickými podmínkami.

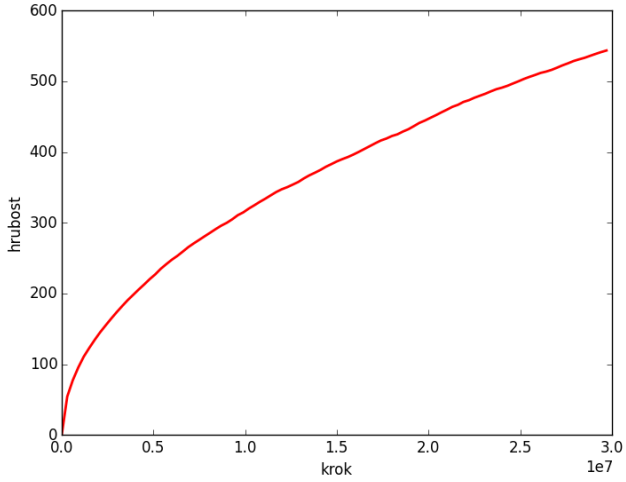
velkých t chová podle vztahu $(t/L)^{1/2}$, kde t je počet kroků. Důležitým poznatkem je, že střední hrubost neustále narůstá, což pro růstové modely obecně neplatí.

Lukáš Timko `lukast@fykos.cz`

Miroslav Hanzelka `mirek@fykos.cz`



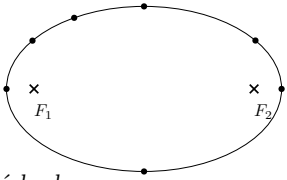
Obr. 5: Vývoj hrubosti na povrchu délky $L = 100$ s náhodnou depozicí po dobu 10^8 kroků.



Obr. 6: Vývoj hrubosti na povrchu délky $L = 100$ po dobu $3 \cdot 10^7$ kroků, zprůměrováno přes 100 realizací.

Úloha III.2 ... zrychleníčko, zrychlení

3 body; průměr 2,20; řešilo 46 studentů



Na obrázku vidíte náčrt elipsy s ohnisky F_1 a F_2 a několika vyznačenými body na ní. Uvažujte, že elipsa znázorňuje trajektorii nějakého hmotného bodu. Znázorněte do obrázku zrychlení, která působí na hmotný bod v jednotlivých vyznačených bodech dráhy pro dvě situace (jde o směry a vzájemné poměry zrychlení (které je větší/menší) v různých bodech v rámci jednoho náčrtu).

a) *V ohnisku F_1 je umístěno hmotné těleso, kolem kterého hmotný bod obíhá. Uvažujeme, že platí 2. Keplerův zákon.*

b) *Těleso má konstantní velikost rychlosti, pouze se pohybuje po elipse.*

Karel na konferenci slyšel, že s takovými úlohami mají problémy i vysokoškoláci.

a)

Ako prvé si musíme uvedomiť, čo za druh zrýchlenia pôsobí v prípade klasickej Keplerovej úlohy Slnko-jedna planéta. Vezmeme si na počiatku teleso v nejakej vzdialenosti od Slnka a udelíme mu rýchlosť, menšiu ako je kruhová rýchlosť v tejto vzdialenosti smerom kolmo od spojnice teleso-Slnko. Zo základov nebeskej mechaniky vieme, že teleso sa bude pohybovať po elipse, ktorej afélium (najvzdialenejší bod dráhy od Slnka) bude práve v bode, odkiaľ sme teleso vypustili. Jediná sila, ktorá bude v takomto prípade pôsobiť na nami vypustené teleso, bude príťažlivá gravitačná sila medzi telesom a Slnkom. Pre ľubovoľnú silu pôsobiacu na teleso s konštantnou hmotnosťou platí, že táto sila uvádza teleso do pohybu so zrýchlením, ktoré je rovné

$$a = \frac{F}{m}\,,$$

kde F je sila pôsobiaca na teleso a m je hmotnosť daného telesa. Môžeme si všimnúť, že z tohto vzťahu si vieme prirodzene definovať hmotnosť ako schopnosť telesa klásť odpor voči pôsobeniu vonkajších síl. Sila pôsobiaca na toto teleso je v našom prípade rovná Newtonovskej gravitačnej sile

$$F_g = -\frac{GMm}{r^3}\boldsymbol{r}\,,$$

kde G je gravitačná konštanta, M je hmotnosť cetrálneho telesa (v našom prípade Slnka) a $\boldsymbol{r}$ je polohovy vektor voči Slnku. Ďalej je vhodné spraviť si transformáciu kartézských súradníc s počiatkom v strede elipsy, na kartézske súradnice so stredom v Slnku. Potom $y$ová súradnica Slnka je totožná s y súradnicou stredu elipsy, avšak $x$ovú súradnicu musíme posunúť o

$$f = \sqrt{a^2 - b^2}\,,$$

kde a, b sú hlavné a vedľajšie polosi elipsy. Potom nové súradnice budú:

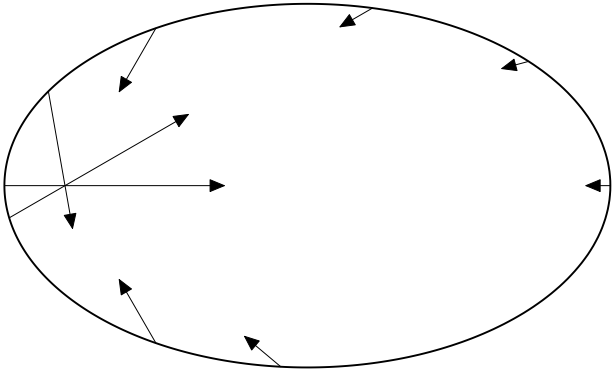
$$x' = x + f\,,$$
$$y' = y\,.$$

Ak do vzorca pre zrýchlenie dosadíme náš vzorec pre silu a doň dosadíme za $\boldsymbol{r}$ polohu bodu v nových súradniciach, tak výsledný vzťah pre veľkosť zrýchlenia pre ľubovoľný bod ležiaci na elipse bude

$$a_d = \frac{GM}{x'^2 + y'^2} = \frac{GM}{\left(x + \sqrt{a^2 - b^2}\right)^2 + y^2}\,.$$

Po dosadení do tohto vzorca vieme určiť presnú veľkosť. Avšak naším cieľom je toto zrýchlenie zakresliť. Keďže smer zrýchlenia je od daného bodu na elipse smerom k Slnku, v našom prípade smeruje vektor zrýchlenia z daného bodu na elipse, do ohniska F_1.

Ak si vhodne zvolíme mierku obrázku tak s týmito informáciami je jednoduché vkresliť vektory zrýchlenia do obrázku. Vyzerať by to mohlo asi ako na Obrázku 7.



Obr. 7: Výsledok prípadu a).

b)
Predpokladajme teraz že teleso sa znova hýbe po tej istej elipse, a to napriek prítomnosti akejkoľvek gravitačnej alebo inej sily. Môžeme si predstaviť napríklad vesmírnu loď ktorá niekde v priestore jazdí dookola po elipse, spaľujúc pritom palivo na to, aby si udržala požadovanú dráhu. Vieme že zrýchlenie pôsobiace na teleso si vieme vždy rozdeliť na normálovú zložku, ktorá spôsobuje zakrivenie dráhy, a na tangenciálnu zložku, ktorá spôsobuje zmenu rýchlosti telesa. Keďže teleso si po celý čas udržiava rovnakú rýchlosť, je tangenciálna zložka zrýchlenia nulová, a smer zrýchlenia je teda totožný s normálou k dotyčnici v danom bode.

Úlohu si rozdelíme na dve časti. Najprv budeme hľadať, ako vyzerá smerový vektor zrýchlenia, t.j. normála k danej krivke. Potom si zrátame, akú veľkosť má zrýchlenie v závislosti na poloha. Keďže sa jedná o geometrickú úlohu, nemusíme nájsť explicitný predpis pre priamku, na ktorej leží normálový vektor v danom bode. Stačí nám vedieť, že daná priamka bude prechádzať cez nami zvolený bod, a bude rovnobežná s vektorom gradientu elipsy (ako implicitnej funkcie), ktorý zo svojej prirodzenej definície je vnímaný ako vektorový operátor určujúci normálu k nejakej krivke či ploche. Bez znalostí vyššej matematiky, skrátka vezmeme pravítko s ryskou a nájdeme kolmicu na dotyčnicu v nejakom bode. Poznámka pre prípadných záujemcov, matematicky-analyticky by sme to spočítali takto:

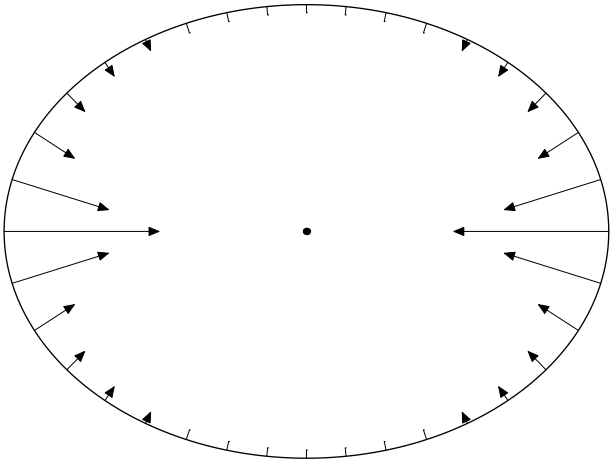
Elipsa je popísaná implicitne krivkou

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Gradientom tejto krivky, a teda nami hľadaným vektorom je

$$\left[\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}\right]\,.$$

Na základe týchto informácií vieme ľubovoľnému bodu priradiť smer zrýchlenia.



Obr. 8: Výsledok prípadu b).

Veľkosť dostredivého zrýchlenia ("šípka" vektora bude teda smerovať vždy smerom dovnútra elipsy) je potom daná vzťahom

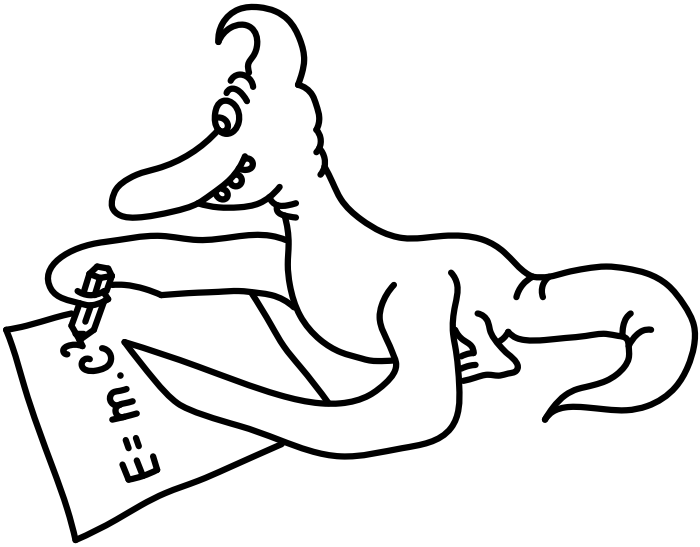
$$a_d = \frac{v^2}{R}\,,$$

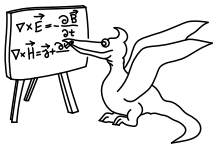
kde rýchlosť v je po celý čas konštantná a polomer krivosti elipsy R v nejakom bode, je daný vzťahom

$$R = a^2 b^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)^{\frac{3}{2}}\,,$$

kde x a y sú súradnice daného bodu. Dosadením vzťahu pre polomer krivosti v nejakom bode do vzťahu pre veľkosť dostredivého zrýchlenia máme vzorec, z ktorého vieme dopočítať veľkosť zrýchlenia v ľubovoľnom bode na elipse, pri daných počiatočných podmienkach. Po zakreslení do obrázku s použitím takto odvodených informácií by mal vyzerať ako Obrázek 8.

Jakub Jambrich
jakubj@fykos.cz


E = m·c²



Seriál: Rostou nám diferenciální rovnice

V tomto díle seriálu pokročíme k numerickému tématu, které je ve fyzice všudypřítomné: řešení obyčejných diferenciálních rovnic (ODR). Ačkoli nejsou tak složité jako parciální diferenciální rovnice, vyžaduje jejich analytické řešení v mnoha případech pokročilé matematické metody. Numerika nám umožní se matematickým komplikacím vyhnout – pomocí diskretizace derivací získáme integrační schémata, pomocí nichž dokážeme vyřešit každou ODR se zvolenou přesností.

Simulační část seriálu nepokročí, ale naopak zůstane u tématu z minulého dílu. Ukážeme si, že jiné modely růstu povrchů vedou na kvalitativně odlišný vývoj hrubosti povrchu a také si předvedeme, jak použít růstové modely v mikrobiologii. Poté se vrátíme k náhodným procházkám a využijeme je k simulaci růstu fraktálního krystalu.

Obyčejné diferenciální rovnice

V tomto díle se naučíme základy numerického řešení obyčejných diferenciálních rovnic. Jde o poměrně atraktivní problematiku, ostatně mnoha lidem se při vyslovení pojmu „počítačové simulace“ vybaví právě řešení diferenciálních rovnic. My již víme, že numerická matematika je daleko rozsáhlejším oborem, to ale nijak nesnižuje význam a potřebu numerického řešení diferenciálních rovnic. Nicméně jde o zvlášť zákeřnou oblast numerické matematiky, narazit zde na nestabilní řešení není nic výjimečného a opravdu platí rčení: „Důvěřuj, ale prověřuj!“

Diferenciální rovnice jsou jednoduše řečeno takové rovnice, ve kterých vystupuje derivace. Na rozdíl od algebraických rovnic, jejichž řešením je číslo, řešením diferenciálních rovnic je funkce. Příkladem diferenciální rovnice je například pohybová rovnice svislého vrhu $\ddot{y} = -g$, kde $\ddot{y}$ značí druhou derivaci $y(t)$ vůči času. Řešením této rovnice pak je funkce $y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$, kde y_0 a v_0 jsou tzv. integrační konstanty, tedy volné parametry řešení. V případě svislého vrhu pak mají jasný fyzikální význam počáteční polohy a rychlosti. Sami si pak můžete snadno ověřit, že druhá derivace dané funkce podle času je skutečně rovna $-g$. Pokud k zadání přidáme i tzv. počáteční podmínky, např. $y(0) = 1$ a $\dot{y}(0) = 0$, dokážeme jednoznačně určit i hodnotu integračních konstant. V našem případě pak řešení bude $y(t) = 1 - \frac{1}{2}gt^2$. Platí přitom, že počátečních podmínek potřebujeme tolik, jaký je řád diferenciální rovnice, tedy řád nejvyšší derivace v ní vystupující. V našem případě rovnice obsahuje druhou derivaci, rovnice je tedy druhého řádu a potřebujeme dvě nezávislé počáteční podmínky. Takto přesně analyticky vyřešit ovšem umíme pouze některé jednoduché rovnice, na zbytek musíme použít aproximace, rozvoje, nebo právě numerické metody.

Diferenciální rovnice dělíme na *obyčejné* (zkr. ODR), které obsahují neznámou funkci pouze jedné proměnné a derivace podle této proměnné, a *parciální* (zkr. PDR), obsahující neznámou funkci více proměnných a (parciální) derivace podle nich. Řešení parciálních diferenciálních rovnic je zpravidla složitější úloha, než řešení ODR, a to i při numerickém přístupu, nadále se tedy budeme zabývat pouze řešením ODR. Konkrétně budeme hledat řešení soustavy N rovnic, na které můžeme nahlédnout jako na vektorovou rovnici

$$\dot{\boldsymbol{u}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(t), t)$$

s počáteční podmínkou $\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0$. To, že jde o soustavu rovnic, se prakticky projeví pouze tak, že všechny kroky řešení neprovedeme jednou, ale N-krát, tedy pro každou z rovnic soustavy. Při popisu metod si tedy nemusíte zadání představovat jako soustavu, ale jen jako jednu rovnici. Tento přístup má dokonce jisté výhody, jak uvidíme při praktické implementaci metod. Ač to tak na první pohled nevypadá, do výše uvedeného tvaru lze převést naprostou většinu soustav obyčejných diferenciálních rovnic libovolného řádu,[21] nijak se tedy v úloze neomezujeme. Jak tento převod prakticky provést si ukážeme na rovnici $\ddot{y} = -g$. Nejprve zavedeme substituci $\dot{y}(t) = v(t)$ a dosadíme do původní rovnice, čímž získáme $\dot{v} = -g$. Máme tedy soustavu dvou rovnic prvního řádu $\dot{y} = v$ a $\dot{v} = -g$ s neznámými $y(t)$ a $v(t)$. Nyní jsme připraveni k popisu samotných metod řešení, ještě předtím si ale pokusíme osvojit dovednost pro fyzika možná i důležitější, a to, jak formulovat problém ve formě diferenciální rovnice.

Derivace nějaké veličiny podle času vyjadřuje rychlost změny této veličiny. Jako příklad si můžeme vzít model radioaktivity, kdy z fyziky víme, že za jednotku času se rozpadne takové množství atomů, které je přímo úměrné počtu nerozpadlých atomů. Příslušná diferenciální rovnice tedy je

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = -\lambda N(t)$$

s počáteční podmínkou $N(0) = N_0$, kde $N(t)$ je počet ještě nerozpadlých atomů v čase t a λ je rozpadová konstanta vyjadřující počet přeměn za jednotku času přepočtený na jeden atom. Mínus pak značí, že nerozpadlé atomy postupně ubývají. Řešením této rovnice je pak známá rovnice radioaktivní přeměny $N(t) = N_0 \exp(-\lambda t)$.

Dalším důležitým příkladem jsou pohybové rovnice vycházející z druhého Newtonova zákona, který je vlastně diferenciální rovnicí $\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{F}$, slovně: „Časová změna hybnosti hmotného bodu je v každém okamžiku rovna výslednici sil na tento bod působících“. Pokud budeme uvažovat konstantní hmotnost, pak dostáváme méně obecnou verzi $\dot{\boldsymbol{p}} = (m\boldsymbol{v})\dot{} = m\dot{\boldsymbol{v}} = m\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}$, tedy $\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}/m$. Nyní stačí dosadit za sílu dle konkrétního fyzikálního problému a získáme soustavu pohybových rovnic daného hmotného bodu. Například pro šikmý vrh v homogenním gravitačním poli bude síla za použití kartézských souřadnic rovna $\boldsymbol{F} = (0, 0, -g)$. Musíme pak ještě samozřejmě zadat 6 počátečních podmínek, např. polohy a rychlosti na počátku a rovnice případně převést na soustavu rovnic prvního řádu, jak bylo ukázáno výše.

Eulerova metoda

První a nejjednodušší metodou, kterou si zde představíme, je explicitní Eulerova metoda. Vyjdeme ze soustavy $\dot{\boldsymbol{u}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(t), t)$ a derivaci nahradíme dopřednou diferencí. Po úpravě pak dostaneme

$$\frac{\boldsymbol{u}(t+h) - \boldsymbol{u}(t)}{h} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(t), t) + O(h)\,,$$
$$\boldsymbol{u}_{n+1} = \boldsymbol{u}_n + h\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_n, t_n) + O(h^2)\,,$$

kde jsme označili $t_n \overset{\text{def}}{=} nh$ (bez újmy na obecnosti můžeme začít v čase $t_0 = 0$), $\boldsymbol{u}_n \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{u}(t_n)$ a $\boldsymbol{u}_{n+1} \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{u}(t_{n+1})$. Nyní již máme přímočarý návod k řešení diferenciální rovnice. Vezmeme počáteční podmínku $\boldsymbol{u}_0$ a dosazením $\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{u}_0$ a $t_n = 0$ do rovnice výše vypočteme $\boldsymbol{u}_1$, to opět dosadíme (nyní s časem $t_1 = h$) a iterujeme, dokud nezískáme hodnoty až do kýženého času. Metodu lze implementovat například takto:

[21] Snad s výjimkou některých obzvlášť ošklivých rovnic, které jsou nelineární v nejvyšším řádu derivace.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def euler_step(f,y,t,h):
        return y+h*f(y,t)

def ODE_solve(f,y0,t0,tf,steps):
        times = np.linspace(t0,tf,steps)
        h = (tf-t0)/steps
        result = []
        y = y0
        for t in times:
                result.append(y)
                y = euler_step(f,y,t,h)
        return times,np.array(result)

def vrh(y,t):
        return np.array((y[2],y[3],0.0,-9.81))

X0,Y0 = 0.0,0.0
VX0,VY0 = 5.0,10.0
t0,tf,steps = 0.0,10.0,1000
y0 = np.array((X0,Y0,VX0,VY0))

times, res = ODE_solve(vrh, y0, t0, tf, steps)
plt.plot(times, res[:,1]) #vykresli Y(t)
plt.show()
```

Všimněme si, že veškerá fyzika je obsažena v definici funkce $f(u,t)$ (v našem případě za ni dosazujeme funkci `vrh()`) a v počátečních podmínkách. Toto oddělení fyziky a numerického řešiče (integrátoru) umožňuje flexibilně používat stejný integrátor pro různé problémy a naopak.

Eulerova metoda funguje na principu lineární extrapolace, kdy v bodě (t_n, u_n) sestrojíme tečnu k řešení u (její směrnice je vyjádřena hodnotou funkce $f(u_n, t_n)$) a posuneme se podél této tečny o časový krok h do bodu (t_{n+1}, u_{n+1}). Je jasné, že jde pouze o hrubou aproximaci skutečného řešení, pro dostatečnou přesnost tedy musíme volit poměrně malý krok h.

Rungovy-Kuttovy metody

Přesnost dokážeme vylepšit například s použitím Rungových-Kuttových metod vyššího řádu. Předpis R-K metody s-tého řádu má tvar

$$u_{n+1} = u_n + h \sum_{i=1}^{s} b_i k_i \,, \text{ kde}$$

$$k_i = f\left(u_n + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_j, t_n + c_i h \right) ,$$

přičemž a_{ij}, b_i a c_i jsou číselné koeficienty příslušející dané metodě. Často jsou v literatuře zapisovány ve formě tzv. *Butcherovy tabulky*. Všimněme si, že pro $j \geq i$ potřebujeme znát hodnoty k_j, které při postupném vyhodnocování ještě neznáme. Tyto metody se nazývají *implicitní* a mají určité nemalé výhody, které si zmíníme později, ty jsou však vykoupeny složitějším způsobem vyhodnocování. Tento problém ale zmizí, pokud pro $j \geq i$ je $a_{ij} = 0$. Pak můžeme bez problémů vyčíslit k_1, poté k_2, …, k_s a nakonec u_{n+1}. Takové metody se nazývají *explicitní*.

Zkusme nyní dosadit $s = 1$, $a_{11} = 0$, $b_1 = 1$ a $c_1 = 0$. Pak dostaneme nám již známý předpis explicitní Eulerovy metody $u_{n+1} = u_n + hf(u_n, t_n)$. Explicitní Eulerova metoda je tedy Rungovou-Kuttovou metodou 1. řádu.

Pokusme se nyní ilustrovat, jak Rungovy-Kuttovy metody fungují, a to na příkladu R-K metody 4. řádu, která je jednou z nejpoužívanějších. Její předpis je

$$\begin{aligned} k_1 &= f(u_n, t_n)\,, \\ k_2 &= f\left(u_n + \frac{h}{2}k_1, t_n + \frac{h}{2}\right)\,, \\ k_3 &= f\left(u_n + \frac{h}{2}k_2, t_n + \frac{h}{2}\right)\,, \\ k_4 &= f(u_n + hk_3, t_n + h)\,, \\ u_{n+1} &= u_n + \frac{1}{6}hk_1 + \frac{1}{3}hk_2 + \frac{1}{3}hk_3 + \frac{1}{6}hk_4\,. \end{aligned}$$

Nejprve vypočteme směrnici k_1 v bodě (t_n, u_n), podobně, jako v případě Eulerovy metody. Dále ale vypočteme další směrnice k_i v mezibodech určených předchozími směrnicemi. Nakonec všechny směrnice zprůměrujeme s různými vahami a posuneme se podél této výsledné směrnice o krok h z počátečního bodu kroku (t_n, u_n). Lze intuitivně předpokládat, že toto odhadování v mezibodech a následné průměrování je přesnější, než prostý dlouhý skok jako v Eulerově metodě, metematický důkaz zde ale neuvedeme. Dále by se mohlo zdát, že by bylo jednodušší a možná i přesnější použít Eulerovu metodu s třeba čtyřikrát kratším krokem. Vtip je v tom, že R-K metoda s-tého řádu má globální zaokrouhlovací chybu (chybu nasčítanou přes všechny kroky) řádu $O(h^s)$. Pro velmi velký krok tedy bude skutečně Eulerova metoda lepší,[22] ale pro menší krok (prakticky pro každý rozumně velký krok) budou R-K metody vyššího řádu přesnější. V praxi se pak často používá zmíněná R-K metoda 4. řádu, která představuje rozumný kompromis mezi přesností (zlepšující se s řádem) a stabilitou a počtem vyčíslení funkce f v jednom kroku (což jsou s řádem se zhoršující vlastnosti). Dále je používána například Dormandova-Princeova metoda, což je jedna z adaptivních R-K metod, tedy metod, které dokáží odhadnout chybu v daném kroku a na jejím základě adaptivně upravovat délku kroku v průběhu výpočtu.

Tab. 3: Butcherova tabulka

c_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1s}
c_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2s}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
c_s	a_{s1}	a_{s2}	$\cdots$	a_{ss}
	b_1	b_2	$\cdots$	b_s

Lineární vícekrokové metody

Dalším typem pokročilejších metod jsou lineární vícekrokové metody. Metody, které jsme doposud poznali, byly jednokrokové, protože pro výpočet stavu u_{n+1} stačilo znát pouze stav u_n,

[22] V takovém případě by byla lepší už z toho důvodu, že by R-K metody vyššího řádu byly nestabilní, tj. nevedly by ke správnému řešení.

starší stavy jsme znát nepotřebovali. Myšlenka vícekrokových metod pak spočívá v tom, že tyto starší stavy známe a s jejich pomocí lépe odhadneme vývoj do následujícího kroku než pouze se znalostí stavu a jeho derivace v jednom bodě. Předpis obecné lineární s-krokové metody je

$$\sum_{j=0}^{s} \alpha_j u_{n+j} = h \sum_{j=0}^{s} \beta_j f(u_{n+j}, t_{n+j}) \,,$$

kde α_j a β_j jsou koeficienty a platí $\alpha_s = 1$, $\alpha_0 \neq 0$ a $\beta_0 \neq 0$ (pomocí $u_n, \ldots, u_{n+s-1}$ a $f(u_n, t_n)$, $\ldots$, $f(u_{n+s}, t_{n+s})$ tedy chceme spočíst u_{n+s}). Pokud navíc platí $\beta_s = 0$, je metoda explicitní, jinak je implicitní.

Praktickým problémem při implementaci vícekrokových metod je jejich nastartování. Dokud jsme totiž neudělali $s - 1$ kroků, nemůžeme metodu použít pro nedostatek známých u_i. Prvním řešením je, že máme k dispozici nadbytek počátečních podmínek, ideálně přímo ve formě potřebných u_i. To se stává zřídkakdy, protože to většinou znamená znalost řešení ODR, kterou chceme řešit. Častějším způsobem je použití nějaké jednokrokové metody pro prvních pár kroků. Dalším, hůře řešitelným problémem je, že vícekrokové metody předpokládají stálý krok h po celou dobu výpočtu, nelze tedy použít adaptivní změnu kroku dle aktuálního odhadu chyby.

Ne všechny metody splňující toto schéma jsou automaticky použitelné. Samozřejmým požadavkem je, aby metoda dostatečně přesně aproximovala danou ODR, musí tedy mít malou chybu metody (chyba musí být dostatečného řádu v h). Ovšem ani taková metoda nemusí automaticky fungovat dobře, protože metoda může neúměrně zvětšovat zaokrouhlovací chybu danou diskretizací problému, a to až tak, že řešení metody nebude vůbec kopírovat skutečné řešení. Říkáme pak, že je metoda *nestabilní*. Vyšetřování stability metod sahá nad rámec tohoto textu, spokojme se s tvrzením, že často používanými zástupci lineárních vícekrokových metod jsou explicitní Adamsovy-Bashforthovy metody a implicitní Adamsovy-Moultonovy metody, jejichž předpisy a vlastnosti (např. řád) najdete v literatuře.

Problémy s problémy se silným tlumením

Uvažujme diferenciální rovnici ve tvaru

$$y' = -cy \,,$$

kde $c > 0$ je reálná konstanta. Analytické řešení této rovnice je

$$y(x) = A\mathrm{e}^{-cx} \,,$$

kde A je integrační konstanta, kterou určíme z počátečních podmínek. Vidíme, že funkce $y(x)$ rychle klesá k nule. Takovému problému se říká problém se silným tlumením[23], anglicky *stiff equation*. Pokusme se jej nyní vyřešit pomocí explicitní Eulerovy metody. Přímým dosazením za $f(u, t)$ dostaneme

$$u_{n+1} = (1 - ch)u_n \,.$$

Pokud budeme volit $h > 2/c$, pak posloupnost $|u_n| \to +\infty$ pro $n \to +\infty$ pro libovolné počáteční podmínky, což rozhodně nedává správné řešení, metoda je *nestabilní*. Pokusme se nyní ten samý problém vyřešit s pomocí implicitní Eulerovy metody s předpisem $u_{n+1} = u_n + hf(u_{n+1}, t_{n+1})$,

[23] Název pochází z tlumení v harmonickém oscilátoru, které se projevuje právě takto.

kde ale můžeme vyjádřit u_{n+1} explicitně díky tomu, že známe vztah pro $f()$. Po dosazení dostáváme

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+ch}\,.$$

V tomto případě pro libovolně velký krok h posloupnost u_n klesá k nule. Zdá se tedy (a prakticky to tak je), že použití implicitních metod by mohlo být univerzálním lékem na problém silného tlumení.

Ukázali jsme tedy, že za určitých (ne zcela vzácných) okolností jsou implicitní metody nedocenitelné. Zbývá vyřešit problém, jak je řešit, když se zdá, že potřebujeme znát u_{n+1} dříve, než jej vypočítáme (a nemůžeme využít trik s dosazením za $f()$). První, co nás napadne, je použít iterativní metody, kdy nastřelíme nějaký odhad u^0_{n+1} a iterujeme předpisem implicitní metody, dokud u^i_{n+1} není dostatečně blízko u_{n+1} (horní index je jen index iterace, ne mocnina). Hodilo by se, aby už prvotní odhad byl dostatečně blízko, abychom dokonvergovali rychle, nabízí se tedy pro prvotní odhad použít explicitní metodu. Tím se dostáváme k metodám *prediktor-korektor*, které fungují přesně na tomto principu. Nejprve použijeme explicitní metodu (prediktor) pro určení hrubého nástřelu u_{n+1}, ten poté zpřesníme použitím jedné, nebo více iterací implicitní metody (korektoru). Díky použití implicitní metody máme prakticky zajištěnu stabilitu, nezdržujeme se ale příliš mnoha iteracemi (většinou stačí jedna), metoda je tedy rychlá. Při jejich použití je třeba dát pozor na správné namixování prediktoru a korektoru, mimo jiné na řád metod. Doporučujeme tedy používat nějaké standardní kombinace, či ještě lépe použít numerickou knihovnu, která má metody implementovány. V případě kombinace Adamsovy-Bashforthovy a Adamsovy-Moultonovy metody je takovou standardní kombinací, například

$$u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{1}{2}h(3f(u_{n+1},t_{n+1}) - f(u_n,t_n))\,,$$
$$u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{h}{12}(5f(u_{n+2},t_{n+2}) + 8f(u_{n+1},t_{n+1}) - f(u_n,t_n))\,,$$

čímž dostaneme prediktor-korektor 3. řádu.

Zachování energie a Verletův algoritmus

Jak jsme zmínili v úvodu (a po diskusi stability je nejspíš jasné), je třeba v průběhu výpočtu kontrolovat, jestli nám příliš neroste chyba. U fyzikálních dějů se nám často nabízejí různé zachovávající se veličiny, například u oběhu planety kolem Slunce se (mimo jiné) zachovává celková energie a moment hybnosti. Pokud si budeme tyto veličiny v průběhu výpočtu vypisovat, měly by být konstantní, samozřejmě až na nějakou numerickou chybu, která ale nesmí být velká.

Pokud ale řešíme diferenciální rovnici typu $u'' = f(u,t)$, což je mj. i častý případ mechanických pohybů, pak můžeme s výhodou použít metodu, která automaticky ze své podstaty zachovává energii. Napišme si Taylorův rozvoj $u(t+h)$ a $u(t-h)$ a sečtěme je.

$$u(t+h) = u(t) + hu'(t) + \frac{h^2}{2}u''(t) + \frac{h^3}{6}u'''(t) + O(h^4)$$
$$u(t-h) = u(t) - hu'(t) + \frac{h^2}{2}u''(t) - \frac{h^3}{6}u'''(t) + O(h^4)$$
$$u(t+h) = 2u(t) - u(t-h) + h^2u''(t) + O(h^4)$$

Poslední rovnice nám již dává předpis pro Verletovu metodu

$$u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} + h^2 f(u_n, t_n)\,.$$

Důležitou vlastností Verletovy metody je, že je symetrická vůči směru toku času, neboli *časově reverzibilní*. Skutečně, pokud zaměníme h za $-h$, dostaneme

$$u_{n-1} = 2u_n - u_{n+1} + h^2 f(u_n, t_n)\,,$$

což po úpravě dává vztah výše. Díky této vlastnosti pak z důležité matematické věty, které se říká *teorém Noetherové*, plyne, že Verletův vztah zachovává energii, ovšem samozřejmě pouze za předpokladu, že energii zachovává i simulovaný děj, reprezentovaný funkcí f.

Nejspíš jste se již s teorémem Noetherové setkali v populární literatuře. Pak si nejspíš vzpomínáte na tvrzení, že každé symetrii odpovídá nějaká zachovávající se veličina. Zde je tou symetrií invariance vůči směru toku času, odpovídající se zachovávající veličinou je pak energie.

Růst povrchů II – balistická depozice a Edenův model

Než začneme vysvětlovat nové pojmy, zopakujme si nejprve ve stručnosti poznatky z minulého dílu seriálu. Říkali jsme si, že růst povrchu lze modelovat pomocí stochastického vícestavového buněčného automatu. Automat je stochastický, protože buňku, která v daném kroce bude růst, vybíráme náhodně. Buňkou je zde myšlen jeden sloupeček molekul na mřížce. Že je automat vícestavový, znamená, že výška h_i sloupečku, kterou ztotožňujeme se stavem buňky, může nabývat během vývoje více než dvou různých hodnot ($h_i \in \mathbb{N}$). Hrubost povrchu v čase t (po t krocích) na 1D mřížce velikosti L definujeme jako

$$W(t, L) = \sqrt{\frac{1}{L}\sum_i h_i^2 - \left(\frac{1}{L}\sum_i h_i\right)^2}\,. \tag{5}$$

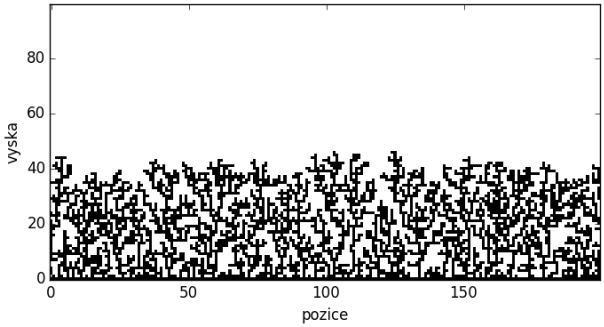
Model náhodné depozice náhodně vybere buňku i a zvětší hodnotu jejího stavu o jedna. Balistická depozice má mírně složitější pravidlo,

$$h_i(t+1) = \max\left(h_{i-1}(t),\, h_i(t)+1,\, h_{i+1}(t)\right)\,. \tag{6}$$

Růst povrchu modelovaný metodou balistické depozice si můžeme představit tak, že částice sestupují z nekonečna na povrch a zastaví se tehdy, když je nějaká částice ihned pod nimi, ale také tehdy, nachází-li se nějaká částice v sousední buňce nalevo nebo napravo. V materiálu tak vznikají dutiny, což se děje i ve skutečných experimentech, například při růstu povrchu pomocí naprašování (epitaxe). Porózní materiál má pak samozřejmě jiné vlastnosti. Ukázka materiálu vzniklého balistickou depozicí je na obrázku 9.

Balistická depozice[24] se však od náhodné depozice neliší pouze porozitou. Podívejme se, jak se vyvíjí hrubost povrchu. Na obrázku 10 je vykreslen vývoj hrubosti vygenerovaný pomocí kódu níže. Vidíme, že na počátku hrubost poměrně rychle narůstá, ale růst zpomaluje a po cca 10 000 krocích se zastaví – došlo k saturaci (nasycení). Tento efekt jsme nepozorovali u náhodné depozice (viz řešení úlohy ke 4. dílu seriálu), kdy hrubost neustále rostla jako mocnina $t^{1/2}$. Obecně můžeme rozdělit vývoj hrubosti na tři časové úseky na základě času přechodu $t_\times$:

[24] Pokud budete hledat o balistické depozici něco na internetu, možná narazíte na jinou definici. Zde jsme definovali NN (nearest neighbour) depozici.

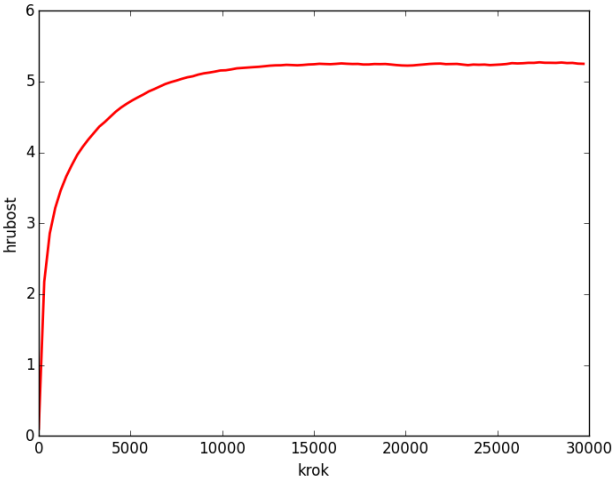


Obr. 9: Struktura povrchu získaného na základě modelu balistické depozice. Všimněte si vysoké porozity.

1. $t \ll t_\mathrm{x} \rightarrow W(t,L) \sim t^\beta$;
2. $t \approx t_\mathrm{x} \rightarrow$ přechodová oblast, růst se zpomaluje;
3. $t \gg t_\mathrm{x} \rightarrow W(t,L) \sim L^\alpha$.

Parametry α a β se nazývají *kritické škálovací parametry*. Dále se zavádí *dynamický škálovací parametr* $z = \alpha/\beta$, který popisuje chování času přechodu jako $t_\mathrm{x} \sim L^z$. Nalezení parametrů α a β pro model balistické depozice bude vaším úkolem v seriálové úloze.

```
# BALISTICKA DEPOZICE
# nacteme grafickou knihovnu a numericku knihovnu
import matplotlib as mpl
from matplotlib import pyplot as plt
import numpy as np

# definujeme rozmer mrizky a pocet kroku a interval pro vypocet hrubosti
pocet = 100
roz = 100
krok = 30000
inter = 30
# vytvorime pole naplnene nulami pro stavy a pro hrubost
stav = np.zeros(roz,dtype=float)
hrub = np.zeros(krok/inter,dtype=float)
sumhrub = hrub

for j in range(pocet):
        # v kazdem kroku nahodne vybereme bunku a zvysime jeji hodnotu o 1
        hrub = np.zeros(krok/inter,dtype=float)
        stav = np.zeros(roz,dtype=float)
        for i in range(krok):
```



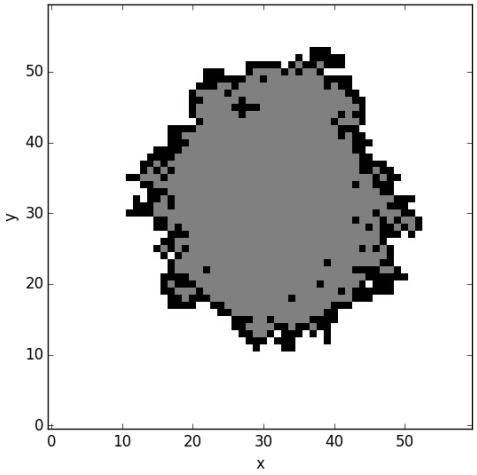
Obr. 10: Příklad vývoje hrubosti povrchu pro simulaci růstu metodou balistické depozice. Průměrováno přes 1000 běhů.

```
                nahod = np.random.randint(roz)
                stav[nahod] = max(stav[nahod]+1.,stav[(nahod-1) % roz],stav[(nahod+1) %
                     roz])
                if i % inter == 0:
                        hrub[i/inter] = np.sqrt(1./roz*np.sum(stav**2) - (1./roz*np.sum(
                             stav))**2)
        sumhrub += hrub

sumhrub *= 1./pocet

# nakreslime graf vyvoje hrubosti
# funkce linspace rovnomerne rozdeli pocet kroku na intervaly
body = np.linspace(0,krok-inter,krok/inter)
hrubplot = plt.plot(body,sumhrub,'r',linewidth=2,label='hrubost')
plt.xlabel('krok')
plt.ylabel('hrubost')
plt.show()
```

Druhým růstovým modelem, o kterém se zde blíže zmíníme, je Edenův model. Jeho princip je jednoduchý – částice se může přilepit na libovolné místo na povrchu (tj. seshora i zboku sloupečku). Ale protože zde bude naším cílem simulovat růst bakteriálních kolonií, jak jsme již v úvodu předeslali, nemůžeme použít 1D mřížku. Model si proto představíme jako binární automat (pouze stavy 0 a 1) na 2D mřížce a povolíme růst ze všech směrů. Během simulace je tedy potřeba pamatovat si celý povrch, a to včetně dutin uvnitř (bakterie se mohou množit kdekoli, kde mají životní prostor). Správným přístupem je ukládat si souřadnice buněk na povrchu, ale programátorsky jednodušší je vytvořit pole $N \times N$, kde N je zvolený rozměr mřížky, a ukládat hodnotu každé buňky. Výpočet je pak samozřejmě pomalý a musíme se omezit na malé mřížky. Příklad povrchu vytvořeného pomocí Edenova modelu vidíte na obrázku 11.

K vygenerování byl použit kód níže.

Edenův model přiřazuje růstu uvnitř dutin v materiálu stejnou pravděpodobnost jako růstu na volném povrchu. Porozita tak jednak zvyšuje celkovou délku povrchu, kterou musíme udržovat v paměti, a také nemusí odpovídat skutečnému chování fyzikálního systému, který studujeme. Proto se často zavádějí úpravy modelu, které zvyšují pravděpodobnost zaplňování dutiny úměrně její vzdálenosti od povrchu. Tato úprava samozřejmě ovlivní hodnoty škálovacích koeficientů ve vztazích pro hrubost, ale ne příliš výrazně.



Obr. 11: Výsledek simulace růstu podle Edenova modelu po 2000 krocích. Šedou barvou jsou označeny ty buňky, které byly náhodně vybrány, ale už neměly neobsazené sousedy (bylo by možné vykreslit je také černou barvou, jde jen o ukázku toho, jak funguje použitý algoritmus). Porozita je v porovnání s balistickou depozicí minimální.

```
# EDENUV MODEL
# nacteme grafickou knihovnu a numericku knihovnu
import matplotlib as mpl
from matplotlib import pyplot as plt
import numpy as np

# definujeme rozmer mrizky a pocet kroku
roz = 200
krok = 20000
# vytvorime pole nul, do ktereho budeme ukladat stavy bunek
# zavorka (kroky, rozmer) udava velikost 2D pole
pole = np.zeros((roz, roz),dtype=np.int)
# inicializujeme
pole[100,100] = 1

for i in range(krok):
```

```
        # funkce where vrati indexy prvku, ktere maji hodnotu jedna,
        # ve forme seznamu obsahujiciho dve pole, kde kazde z techto poli
        # obsahuje prislusne x,y souradnice
        indexy = np.where(pole == 1)
        # nahodne vybereme index
        rand = np.random.randint(len(indexy[0]))
        ind = [(indexy[0])[rand],(indexy[1])[rand]]
        # prozkoumame okoli odpovidajiciho prvku
        soused1 = pole[(ind[0]+1) % roz,ind[1]]
        soused2 = pole[ind[0],(ind[1]+1) % roz]
        soused3 = pole[(ind[0]-1) % roz,ind[1]]
        soused4 = pole[ind[0],(ind[1]-1) % roz]
        sousedi = np.array([soused1,soused2,soused3,soused4])
        sous_indexy = np.where(sousedi == 0)
        # pokud jsou sousedi zaplneni, nastavime pole[ind] na 2,
        # abychom ho jiz priste neprohledavali
        if len(sous_indexy[0]) == 0:
                pole[ind[0],ind[1]] = 2
        # nahodne vybereme prazdnou sousedni bunku a zaplnime ji
        else:
                sous_ind = (sous_indexy[0])[np.random.randint(len(sous_indexy[0]))]
                if sous_ind == 0:
                        pole[(ind[0]+1) % roz,ind[1]] = 1
                elif sous_ind == 1:
                        pole[ind[0],(ind[1]+1) % roz] = 1
                elif sous_ind == 2:
                        pole[(ind[0]-1) % roz,ind[1]] = 1
                elif sous_ind == 3:
                        pole[ind[0],(ind[1]-1) % roz] = 1

# definujeme barevne schema pomoci vyctu, v nasem pripade cernobile
barvy = mpl.colors.ListedColormap(['white','black','grey'])
# definujeme prechod mezi barvami kdekoli mezi 0 a 1
hranice=[0,0.5,1.5,2]
# pouzijeme barvy a hranice k normovani barevne mapy
norma = mpl.colors.BoundaryNorm(hranice, barvy.N)
# vykreslime barevnou mapu a zobrazime ji
mapa = plt.imshow(pole,cmap=barvy,interpolation='None',norm=norma,origin='lower')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.show()
```

Kvůli radiální geometrii nelze přímo aplikovat vzorec pro hrubost (5). Proto se nebudeme hrubostí zabývat, ale zavedeme do modelu malou změnu: s pravděpodobností p_1 změníme stav buňky na rozhraní z 0 (prázdná) na 1 (obsazená) a s pravděpodobností p_2 naopak změníme stav buňky na rozhraní z 1 na 0. Tento model, někdy nazývaný Williams-Bjerknesův, je vhodný pro simulaci růstu nádorových buněk nebo bakterií v Petriho misce. V seriálové úloze bude vaším úkolem zkoumat vývoj nádorových buněk pomocí právě popsaného modelu v závislosti na p_1, p_2.

Pro úplnost uveďme, že modelovat růst povrchů lze i jinými metodami než pomocí buněčných automatů. Ke každému zmíněnému růstovému modelu existuje ekvivalentní diferenciální rovnice, kterou lze v některých případech řešit analyticky a získat tak stejné škálovací parametry jako numerickým modelováním. Jedná se však o stochastické diferenciální rovnice, tj. rovnice obsahující člen, který reprezentuje šum. K řešení takových rovnic je potřeba zavést speciální integrální počet, tzv. Itův stochastický kalkulus.

DLA – difúzí limitovaná agregace

Zatím zmíněné růstové modely dokázaly poměrně dobře simulovat laboratorní tvorbu materiálů nebo růst bakteriálních kolonií. Pokud bychom ale chtěli modelovat růst krystalu vznikajícího v roztocích, např. pomocí elektrolýzy nebo sedimentací, bude lepší volbou model DLA (Diffusion limited aggregation).

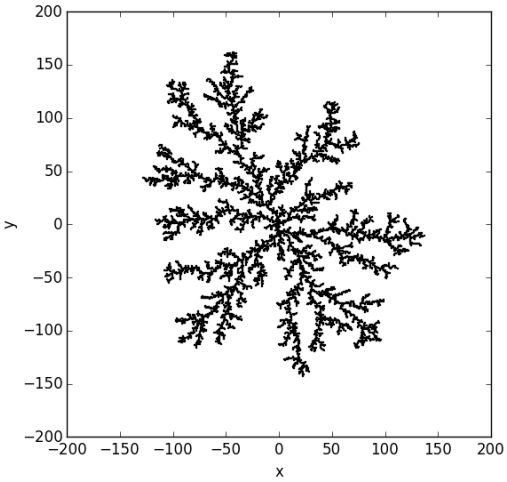
Fyzikální představa procesu je následující: částice z nekonečna se brownovsky pohybují prostorem, dokud nedojde k jejich kontaktu s krystalizačním jádrem, ke kterému se přilepí. Hustota částic je malá, vzájemně spolu nekolidují (brownovský pohyb zajišťují molekuly v pozadí, které na jádru neulpívají). V počítačové praxi nemůžeme poslat částici z nekonečna, vytvoříme ji proto v určité vzdálenosti od krystalu a necháme ji pohybovat se tak dlouho, dokud nedojde ke kolizi s krystalem, nebo se nedostane za určitou radiální hranici – potom částici přestaneme sledovat a vytvoříme novou.

Níže je příklad kódu (výsledek simulace je na obrázku 12), kde máme jednu částici v počátku hexagonální mřížky a nové částice generujeme ve vzdálenosti, která je rovna radiální vzdálenosti od počátku nejvzdálenější částice krystalu (plus jedna). Částici přestaneme sledovat, pokud se vzdálí na dvojnásobek počáteční vzdálenosti. Snížíme-li maximální povolenou vzdálenost, běh kódu se výrazně zrychlí, ale krystal potom začne vykazovat preferovaný směr růstu. Kód je poměrně komplikovaný kvůli implementaci šestiúhelníkové mřížky. V seriálové úloze budete simulovat růst na čtvercové mřížce, tím se kód podstatně zjednoduší.

```
# DIFFUSION LIMITED AGGREGATION
# nacteme grafickou knihovnu a numericku knihovnu
import matplotlib as mpl
from matplotlib import pyplot as plt
import numpy as np

# definujeme rozmer mrizky a maximalni pocet castic
roz = 20
mass_max = 100
# pole pro spiralni 1D index, bezpecne vetsi nez je potreba
roz_1d = 6*roz**2
# pole, do kterzch budeme ukladat prepoctene kartezske souradnice
# definujeme vektory pomahajici pri prepoctu z hexa na ctvercovou mrizku
xs = np.zeros(mass_max,dtype=float)
ys = np.zeros(mass_max,dtype=float)
xhelp = [np.sqrt(3.)/2.,0.,-np.sqrt(3.)/2.,-np.sqrt(3.)/2.,0.,np.sqrt(3.)/2.]
yhelp = [-0.5,-1.,-0.5,0.5,1.,0.5]
# pole nul, do ktereho budeme ukladat stavy bunek
pole = np.zeros(roz_1d,dtype=np.int)
# inicializujeme bunky, hmotnost a nejvetsi vzdalenost od stredu
pole[0] = 1
mass = 1
rmax = 0

while mass < mass_max:
        # pocatecni vzdalenost castice
        r = rmax+1
        # pricist k hranici v radialnim smeru, za kterou castice nesmi utect
        rkill = rmax
        # vyber nahodny prvek z sestiuhelniku o rozmeru r
        i = int(6*r*np.random.random() + 1)
        nn = 0
        # pohyb difundujici castice
        while nn == 0:
                i_full = i+3*r*(r-1) # pozice v poli 'pole'
                # nejsme-li ve vrcholu sestiuhelniku
```

```
if (i % r) != 0:
        # nalezneme sousedy
        if i == 1:
         ileft = 6*r
         idownleft = 3*r*(r-1)
        else:
         ileft = i-1
         idownleft = (i*(r-1))//r + 3*(r-1)*(r-2)
        # dvojite lomitko vraci floor
        pole_nn = [i+1+3*r*(r-1),ileft+3*r*(r-1),idownleft,
         (i*(r-1))//r+3*(r-1)*(r-2)+1,
         (i*(r+1))//r+3*r*(r+1),
         (i*(r+1))//r+3*r*(r+1)+1]
        obsazeno = np.where(pole[pole_nn] == 1)
        nn = len(obsazeno[0])
        # je-li nejaky soused obsazen, prilep se
        if nn > 0:
         pole[i_full] = 1
         rmax = max([rmax,r])
         mass += 1
        # jinak difunduj dal
        else:
         step = int(np.random.random()*6)
         # radialni sestup
         if (step == 2 or step == 3):
         r -= 1
         # radialni vzestup
         elif (step == 4 or step == 5):
         r += 1
         i = pole_nn[step] - 3*r*(r-1)
# pokud jsme ve vrcholu sestiuhelniku
else:
        if i == 6*r:
         iright = 1
         iupright = 1
        else:
         iright = i+1
         iupright = i*(r+1)/r+1
        if i == 1:
         ileft = 6
        else:
         ileft = i-1
        pole_nn = [iright+3*r*(r-1),ileft+3*r*(r-1),
         i*(r-1)//r+3*(r-1)*(r-2),i*(r+1)//r+3*r*(r+1),
         iupright+3*r*(r+1l),i*(r+1)//r-1+3*r*(r+1)]
        obsazeno = np.where(pole[pole_nn] == 1)
        nn = len(obsazeno[0])
        if nn > 0:
         pole[i_full] = 1
         rmax = max([rmax,r])
         mass += 1
        else:
         step = int(np.random.random()*6)
         if step == 2:
         r -= 1
         elif ((step == 3 or step == 4) or step == 5):
         r += 1
         i = pole_nn[step] - 3*r*(r-1)
# pokud castice utekla, zacneme znovu
if r > (rmax+rkill):
        r = rmax+1
        i = int(6*r*np.random.random()+1)
        continue
```

```
        x0 = r*np.sin(2.*np.pi/(6.*r)*(i - (i % r)))
        y0 = r*np.cos(2.*np.pi/(6.*r)*(i - (i % r)))
        x = x0 + (i % r)*xhelp[min(int(i//r),5)]
        y = y0 + (i % r)*yhelp[min(int(i//r),5)]
        xs[mass-1] = x
        ys[mass-1] = y

# vykreslime castice pomoci sestiuhelnikovych symbolu
dlaplot = plt.scatter(xs,ys,c='k',s=30000/(roz**2),marker=(6,0,30))
plt.xlim(-roz, roz)
plt.ylim(-roz, roz)
plt.axes().set_aspect('equal')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.show()
```



Obr. 12: Výsledek simulace růstu podle DLA modelu na hexagonální mřížce. Počet částic v krystalu je 8000. Všimněte si, že i přes poměrně benevolentní limit na maximální vzdálenost difundující částice je na krystalu vidět preferovaný směr růstu.

Na vzniklý krystal (shluk částic) můžeme pohlížet jako na fraktál. Nebudeme zde zabíhat do hluboké teorie, fraktál si prostě představíme jako objekt, který při bližším pohledu (myšleno ve větším měřítku) vykazuje stále stejnou strukturu – je soběpodobný. Příkladem z přírody je například list kapradiny, který se skládá z mnoha menších listů, a ty zase z menších lístků. V matematické abstrakci lze na objekt „zoomovat“ donekonečna, vždy budeme nacházet stále stejnou geometrickou strukturu. Podobně na obrázku 12 najdeme na každé větvi rostoucí z počátku další větev, ze které rostou další větve atd.

Pro fraktály je typické, že jejich dimenze je větší než u „obyčejných“ geometrických objektů. Například kružnice má dimenzi 1, ale Kochova vločka (obr. 13), což je vlastně jenom jinak

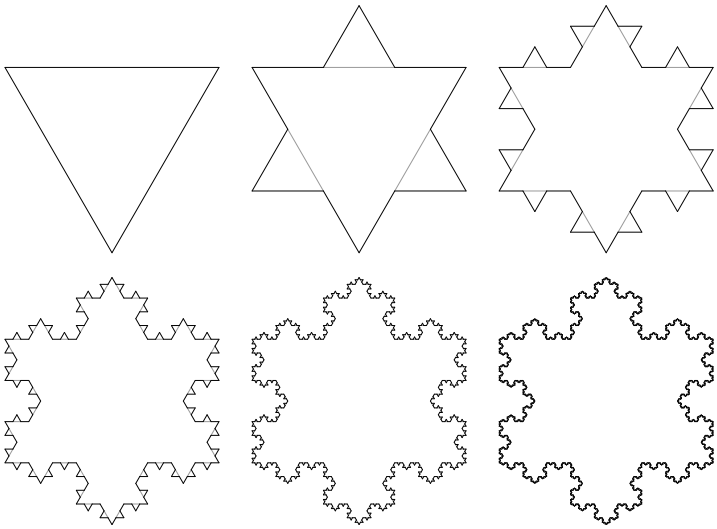
zakřivená čára, má dimenzi přibližně 1,26. Na Kochově vločce si vysvětlíme definici dimenze.[25] Nechť má strana počátečního trojúhelníku délku $\varepsilon = 1$. Počet úseček v jedné straně je samozřejmě $N = 1$. V dalším kroku již jedna strana obsahuje $N = 4$ úsečky délky $\varepsilon = 1/3$, v dalším kroku $N = 16$ úseček délky $\varepsilon = 1/9$ atd. Fraktální dimenze je pak definována jako

$$D = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \frac{1}{\varepsilon}}\,, \tag{7}$$

přičemž pro vločku můžeme psát $\varepsilon(n) = 1/3^n$, $N(n) = 4^n$, a tedy

$$D_{\mathrm{Koch}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\log 4^n}{\log 3^n} = \frac{\log 4}{\log 3} \doteq 1{,}26\,.$$

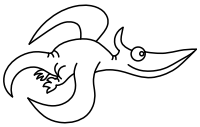
Všimněte si, že se ve výpočtu mocniny n zkrátily. To je dáno faktem, že princip výstavby Kochovy vločky spočívá v aplikaci zcela identické geometrické deformace na jednotlivé hrany vločky v každém kroku. Limitní proces tedy nemá v případě matematicky exaktní vločky smysl (tj. dimenzi by šlo definovat jinak, např. jako $\log N(\varepsilon)/\log(1/\varepsilon)$ bez limity), ale má smysl v případě fraktálu vytvořeného DLA. Při „zoomování“ zde totiž nepozorujeme zcela identické obrazce, ale pouze velmi podobné, protože výstavba krystalu probíhá náhodně. Navíc krystal není nekonečně velký, resp. nemá nekonečně detailní strukturu, a také v důsledku nutného omezení délky náhodné procházky vstupují do procesu další odchylky. Při výpočtu dimenze budeme nyní místo strany trojúhelníku měřit lineární rozměr krystalu (radiální vzdálenost nejvzdálenější částice od počátku), místo počtu úseček máme počet částic. Přítomnost limity nám říká, že pro co nejpřesnější výsledek chceme nechat krystal růst co nejdéle. Pro krystal na obrázku 12 vychází dimenze $D \doteq 1{,}75$.



Obr. 13: Prvních šest iterací Kochovy vločky. Tenké čáry jsou vždy z předchozího kroku.

[25] Existuje mnoho způsobů, jak definovat fraktální dimenzi, zde jsme vybrali jeden z nich.

Nakonec ještě dodejme, že v případě materiálu získaného na základě Edenova modelu můžeme pohlížet na jeho povrch jako na fraktál, tělo takového materiálu ale není fraktální.



Pořadí řešitelů po IV. sérii

Kompletní výsledky najdete na `http://fykos.cz`.

Kategorie prvních ročníků

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**P**	**E**	**S**	**IV**	„%“	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	6	6	6	7	7	9	12	10	**63**	*100*	*253*	
1.	*Robert Gemrot*	G Komenského, Havířov	4	4	3	7	4	3	11	8	**44**	*84*	*213*	
2.	*Martina Daňková*	Klasické a španělské G, Brno	6	2	–	7	4	–	11	10	**40**	*82*	*173*	
3.	*Marco Souza de Joode*	G Nad Štolou, Praha	6	6	1	7	5	3	10	3	**41**	*73*	*140*	
4.	*Lubor Čech*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	2	4	1	4	2	3	10	–	**26**	*65*	*139*	
5.	*Patrik Kašpárek*	Katolické gymnázium Třebíč	4	4	–	–	1	3	9	4	**25**	*66*	*123*	
6.	*Šárka Štěpánková*	G J. Ressela, Chrudim	2	2	2	4	3	1	9	–	**23**	*58*	*110*	
7.	*Hana Slámová*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	4	6	–	–	2	–	–	–	**12**	*80*	*96*	
8.	*Karolína Letochová*	G Šternberk	4	2	1	–	3	–	2	–	**12**	*53*	*70*	
9.	*Viktor Fukala*	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**–**	*94*	*65*	
10.	*Soňa Husáková*	G, Českolipská, Praha	4	2	–	–	–	–	–	–	**6**	*44*	*38*	
11.	*Jan Raja*	G, Nymburk	–	–	–	–	–	–	–	–	**–**	*67*	*35*	
12.	*Jiří Szotkowski*	G, Karviná	–	–	–	–	–	–	–	–	**–**	*83*	*29*	
13.	*Michaela Valkova*	G Česká, Bratislava	4	–	–	–	2	–	–	–	**6**	*48*	*27*	
14.	*Lucie Urbanová*	G Chotěboř	–	–	–	–	–	–	–	–	**–**	*77*	*23*	
15.	*Aleš Socha*	G a SOŠ, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	–	**–**	*38*	*22*	
16.	*Lucia Gintnerová*	G Sv. Františka, Žilina	4	–	–	–	–	–	–	–	**4**	*83*	*10*	
17.	*Adam Húšťava*	European School Luxembourg II	–	–	–	7	–	–	–	–	**7**	*100*	*7*	

Kategorie druhých ročníků

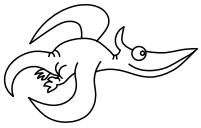
	jméno *Student Pilný*	**škola** MFF UK	**1** 6	**2** 6	**3** 6	**4** 7	**5** 7	**P** 9	**E** 12	**S** 10	**IV** **63**	„%“ *100*	% *253*	Σ
1.	*Martin Schmied*	G Jihlava	4	6	5	7	7	5	6	10	**50**	*76*	*193*	
2.	*Jakub Jobus*	G PdC, Piešťany	4	2	6	7	8	2	10	9	**48**	*70*	*177*	
3.	*Viktor Materna*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	4	2	–	7	7	4	11	–	**35**	*83*	*167*	
4.	*Radka Křížová*	G J. Heyrovského, Praha	6	6	3	7	3	3	10	–	**38**	*65*	*142*	
5.	*Jiří Zelenka*	G Z. Wintra, Rakovník	4	–	–	4	4	–	9	2	**23**	*66*	*130*	
6.	*Jonáš Havelka*	G Jírovcova, České Budějovice	6	6	–	7	2	–	–	–	**21**	*81*	*121*	
7.	*Jan Benda*	G, Litoměřická, Praha	6	6	6	–	–	–	7	7	**32**	*81*	*118*	
8.	*Martin Vavřík*	G, Šumperk	4	–	–	–	–	–	–	–	**4**	*83*	*111*	
9.	*Pavla Rudolfová*	G, Vídeňská, Brno	4	2	–	–	–	–	10	–	**16**	*73*	*89*	
10.	*Eva Vochozková*	Biskupské G, Brno	4	–	2	–	2	–	–	–	**8**	*67*	*81*	
11.	*Lukáš Hronek*	G, Písek	4	4	1	–	–	–	–	–	**9**	*81*	*64*	
12.	*Adam Grunt*	G, Trutnov	–	–	–	–	3	–	6	–	**9**	*61*	*62*	
13.	*Jan Vondra*	G Týn nad Vltavou	2	–	–	2	1	–	–	–	**5**	*42*	*54*	
14.	*Aneta Vacková*	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*78*	*53*	
15.	*Adam Křivka*	Cyrilomet. G a SOŠ pg., Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*80*	*51*	
16.	*Matěj Holubička*	G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice	4	–	–	–	–	–	–	–	**4**	*51*	*44*	
17.	*Kateřina Barotová*	G, Olomouc-Hejčín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*108*	*26*	
18.	*Jakub Pravda*	ŠpMNDaG, Bratislava	4	6	1	7	–	–	–	–	**18**	*77*	*24*	
19.	*Milan Tichavský*	Slezské G, Opava	4	–	–	7	–	–	–	–	**11**	*85*	*23*	
20.	*Václav Svoboda*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*46*	*22*	
21.	*Jan Svoboda*	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*57*	*20*	
22.–23.	*Soňa Curylová*	G F. Palackého, Val. Mez.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*61*	*19*	
22.–23.	*Filip Wagner*	G Tišnov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*76*	*19*	
24.	*Daniel Krátký*	G, Trutnov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*33*	*18*	
25.	*Marek Nestěra*	G K. Sladkovského, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*84*	*16*	
26.	*Josef Polášek*	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*63*	*15*	
27.	*Marcel Zdeněk*	SPŠ strojnická a SOŠ profesora Š	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*50*	*14*	
28.	*Lucie Ambrožová*	G, Svitavy	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*50*	*13*	
29.–30.	*Marek Černoch*	G F. Palackého, Val. Mez.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*63*	*10*	
29.–30.	*Filip Novotný*	G Jihlava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*53*	*10*	
31.	*Lucia Krajčoviechová*	G Jura Hronca, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*80*	*8*	
32.	*MERT UNSAL*	Bahcesehir HS for Sc and Tech,TR	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*17*	*2*	

Kategorie třetích ročníků

	jméno *Student Pilný*	**škola** MFF UK	**1** 3	**2** 3	**3** 6	**4** 7	**5** 7	**P** 9	**E** 12	**S** 10	**IV** **57**	„%“ *100*	% *229*	Σ
1.	*Kateřina Rosická*	G J. Ortena, Kutná Hora	1	4	6	7	7	4	12	7	**48**	*95*	*218*	
2.	*Jindřich Dušek*	G Jana Keplera, Praha	1	2	6	7	4	3	9	11	**43**	*84*	*193*	
3.	*Vojtěch Klimeš*	G, Třeboň	3	3	1	5	4	7	9	13	**45**	*83*	*191*	
4.	*Ladislav Trnka*	G, Havlíčkův Brod	2	1	4	7	8	3	11	7	**43**	*80*	*183*	
5.	*Josef Minařík*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	2	3	5	7	5	–	10	–	**32**	*79*	*166*	
6.	*Marek Jankola*	G M. Hattalu, Trstená	2	3	6	7	7	–	9	–	**34**	*86*	*149*	
7.	*Jindřich Jelínek*	G, Olomouc-Hejčín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*82*	*133*	
8.	*Lucie Kundratová*	G, nám. TGM, Zlín	3	3	6	6	–	–	10	–	**28**	*79*	*115*	
9.	*Ivan Hudák*	ESŠ, Lip. Mikuláš	2	–	6	2	7	–	12	–	**29**	*80*	*109*	
10.	*Tomáš Drobil*	G Dačice	3	0	3	–	4	–	7	8	**25**	*64*	*107*	
11.	*Petr Zahradník*	G dr. V. Šmejkala, Ústí n. L.	–	1	–	–	2	–	10	8	**21**	*66*	*104*	
12.	*Jiří Blaha*	G, Uherské Hradiště	2	3	6	7	7	–	10	8	**43**	*81*	*92*	
13.	*Marie Grunová*	G Moravský Krumlov	2	1	2	–	–	1	11	0	**17**	*49*	*87*	
14.	*Marko Bermell*	Slovanské G, Olomouc	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*60*	*78*	
15.	*Filip Koňařík*	G F. Palackého, Val. Mez.	2	3	4	–	–	–	–	–	**9**	*74*	*68*	
16.	*Kateřina Charvátová*	G B. Němcové, HK	2	3	2	–	–	–	–	–	**7**	*81*	*55*	
17.	*Samuel Amrich*	G Poštová, Košice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*57*	*52*	
18.	*Bibiána Hroncová*	G Poštová, Košice	–	3	–	7	–	–	9	–	**19**	*93*	*43*	
19.	*Jakub Růžička*	G, Nymburk	–	–	6	–	–	–	–	–	**6**	*78*	*42*	
20.	*Veronika Vohníková*	Nový PORG, Praha	2	–	–	–	1	–	–	–	**3**	*65*	*39*	
21.	*Mária Polačková*	G Veľká okružná, Žilina	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*76*	*29*	
22.	*Daniel Staník*	G Uničov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*58*	*25*	
23.–24.	*Matej Moško*	G Grösslingova, Bratislava	2	3	6	7	2	–	3	1	**24**	*50*	*24*	
23.–24.	*Tereza Prokopová*	G Jura Hronca, Bratislava	2	3	–	7	–	–	2	–	**14**	*65*	*24*	
25.	*Karel Balej*	G a SOŠ, Rokycany	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*88*	*21*	
26.	*Daniel Pitoňák*	G a SOŠP, Čáslav	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*50*	*20*	
27.	*On Tai Wu*	Li Po Chun UWC, Hong Kong	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*94*	*17*	
28.–29.	*Tereza Pavlišová*	G, Olomouc-Hejčín	–	–	–	3	–	–	–	–	**3**	*73*	*16*	
28.–29.	*Jaromír Sladkovský*	PORG, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*67*	*16*	
30.–31.	*Adéla Foglarová*	G, Špitálská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*93*	*14*	
30.–31.	*Jakub Smolka*	Slezské G, Opava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*54*	*14*	
32.–33.	*Zuzana Fialková*	Sunny Can. International Sch.	2	–	–	–	–	–	–	–	**2**	*67*	*10*	
32.–33.	*Martin Škoudlil*	G T. G. Masaryka, Litvínov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*59*	*10*	
34.	*Jana Pekařová*	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*75*	*9*	
35.	*Richard Veselý*	G, Budějovická, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*38*	*5*	
36.–37.	*Dominik Beňo*	G L. Svobodu, Humenné	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*100*	*3*	
36.–37.	*Michal Jůza*	G, Benešov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*100*	*3*	
38.	*Jakub Zemek*	G, Uherské Hradiště	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*33*	*1*	

Kategorie čtvrtých ročníků

	jméno *Student Pilný*	**škola** MFF UK	**1** 3	**2** 3	**3** 6	**4** 7	**5** 7	**P** 9	**E** 12	**S** 10	**IV** **57**	„%“ *100*	% *229*	Σ
1.	*Šimon Pajger*	G Veľká okružná, Žilina	2	2	6	5	–	–	7	11	**33**	*84*	*179*	
2.	*Viktor Rosman*	G, Pelhřimov	3	3	6	8	7	–	10	–	**37**	*97*	*167*	
3.	*Tomáš Červeň*	G V. P. Tótha, Martin	3	3	1	7	7	3	9	7	**40**	*75*	*163*	
4.	*Katarína Častulíková*	1. súkromné G v Bratislave	2	4	–	–	–	–	10	–	**16**	*76*	*122*	
5.	*David Němec*	G, Tanvald	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*71*	*109*	
6.	*Tomáš Dulava*	Matiční G, Ostrava	3	3	4	–	8	–	–	–	**18**	*86*	*104*	
7.	*Martin Repčík*	G, Olomouc-Hejčín	2	1	3	7	–	3	–	–	**16**	*53*	*62*	
8.	*Jáchym Bareš*	G, Olomouc-Hejčín	2	1	–	–	1	–	–	–	**4**	*57*	*55*	
9.	*Dominik Starý*	G, Benešov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*77*	*50*	
10.	*Zuzana Richterová*	G, Pelhřimov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*44*	*41*	
11.	*Miroslav Hrabal*	G, Olomouc-Hejčín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*67*	*33*	
12.–13.	*Jan Kučera*	G, Písek	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*86*	*31*	
12.–13.	*Ján Pavlech*	G sv. Jozefa Nové Mesto n. V.	2	–	–	–	–	–	–	–	**2**	*78*	*31*	
14.	*Soňa Burešová*	G J. Heyrovského, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*105*	*23*	
15.	*Filip Keller*	G P. de Coubertina, Tábor	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*65*	*20*	
16.	*Ondřej Buček*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*71*	*17*	
17.	*Adéla Hanková*	První české G, Karlovy Vary	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*100*	*12*	
18.	*Dominick Ivan*	ŠG PinkHarmony, Zvolen	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*32*	*9*	
19.	*Vít Beran*	Masarykovo G, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	*70*	*7*	



FYKOS
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `http://fykos.cz`
e-mail: `fykos@fykos.cz`

FYKOS je také na Facebooku
http://www.facebook.com/FYKOS

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte `http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/`.