Úloha I.4 ... praská mi v láhvi

7 bodů; průměr 4,46; řešilo 71 studentů

Co když si skoro prázdnou 1,5 litrovou PET láhev uzavřeme v dobře vytápěné kanceláři, dejme tomu na $t_\mathrm{k} = 26\,^\circ\mathrm{C}$, a pak vyjdeme vstříc novým zážitkům dolů ze schodů? Láhev začne praskat. Co má větší vliv? To, že se mění atmosférický tlak, jak scházíme 10 pater v budově, nebo to, že je na schodech, dejme tomu, $t_\mathrm{s} = 15\,^\circ\mathrm{C}$? *Karel šel na Matfyzu v Troji ze schodů.*

Vyřešme problém nejdříve pro případ prázdné láhve (bez vody) s objemem V_0, kdy sejdeme všechna poschodí a tlak i teplota v láhvi se vyrovnají s tlakem a teplotou okolí t_s, resp. odpovídající termodynamickou teplotou T_s (z původní teploty t_k, resp. T_k). Sejdeme-li deset poschodí, změní se atmosférický tlak z hodnoty $p_0 \doteq 101\,\mathrm{kPa}$ na hodnotu p_{10}. Rozdíl tlaků je dán tíhou odpovídajícího sloupce vzduchu, tj. $p_{10} - p_0 = h\varrho g$, kde $h = 10 \cdot 3\,\mathrm{m} = 30\,\mathrm{m}$ je výškový rozdíl (počítáme se standardní výškou podlaží 3 m), $\varrho \doteq 1{,}3\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ je hustota vzduchu a g je tíhové zrychlení. Výpočtem zjistíme, že změna tlaku je číselně rovna $p_0 - p_{10} \doteq 380\,\mathrm{Pa}$. Objem láhve se zmenší na hodnotu V_s. Pro počáteční a koncové podmínky platí stavová rovnice

$$\frac{p_0 V_0}{T_\mathrm{k}} = \frac{p_{10} V_\mathrm{s}}{T_\mathrm{s}}\,.$$

Odtud získáme výsledný objem

$$V_\mathrm{s} = V_0 \frac{p_0 T_\mathrm{s}}{p_{10} T_\mathrm{k}}\,.$$

Číselně je $V_\mathrm{s} \doteq 1{,}439\,\mathrm{l}$. Objem láhve se tedy zmenšil asi o $V_0 - V_\mathrm{s} \doteq 61\,\mathrm{ml}$, tj. asi o $4\,\%$.

Hrubá láhev – změna tlaku

Uvažujme hrubou láhev, která má větší schopnost odolávat změnám vnějšího tlaku. To znamená, že tlak v láhvi se nezmění okamžitě na hodnotu okolního atmosférického tlaku, ale až po překročení určité hranice prasknutím. Prasknutím láhve myslíme změnu objemu láhve za krátký okamžik, která je doprovázena charakteristickým zvukem.

Rozeberme případ prasknutí láhve pod vlivem změny okolního tlaku. Proveďme výpočet např. pro případ, kdy nám láhev praskne, až když sejdeme deset poschodí. Předpokládejme, že jsme schody seběhli dostatečně rychle, a proto se nestihl vzduch v lahvi zchladit. Prasknutí láhve pak můžeme považovat za přibližně adiabatický děj, protože probíhá velmi rychle a za tento krátký okamžik nedojde k tepelné výměně mezi vzduchem a PET láhví. Pro adiabatický děj platí Poissonův zákon

$$p_0 V_0^\kappa = p_{10} V_1^\kappa\,,$$

kde V_0 je objem vzduchu na začátku, V_1 je objem vzduchu po adiabatické kompresi a $\kappa = 7/5$ je Poissonova konstanta pro plyn skládající se z dvouatomových molekul. Dále zde platí stavová rovnice

$$\frac{p_0 V_0}{T_\mathrm{k}} = \frac{p_{10} V_1}{T_1}\,,$$

kde T_1 je výsledná teplota po adiabatické kompresi, která se změnila z původní hodnoty T_k. Použitím dvou výše uvedených rovnic vypočteme výsledný objem V_1 a teplotu T_1.

$$V_1 = V_0 \left(\frac{p_0}{p_{10}}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \doteq 1{,}496\,\mathrm{l}\,.$$

Objem se nám změní asi o 4 ml, tedy o 0,27 %. Výsledná teplota po adiabatické kompresi je

$$T_1 = T_\mathrm{k} \left(\frac{p_{10}}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \doteq 299{,}5\,\mathrm{K}\,.$$

Tomu odpovídá teplota $t_1 = 26{,}3\,^\circ\mathrm{C}$. Teplota se tedy zvýšila o $0{,}3\,^\circ\mathrm{C}$, což je v porovnání se změnou o $11\,^\circ\mathrm{C}$ v druhém případě velmi málo.

Hrubá láhev – změna teploty

Nyní vyšetřeme druhý případ, kdy teplota vzduchu v láhvi klesne z hodnoty t_k na t_s, resp. z hodnoty T_k na T_s. Opět předpokládejme, že dojde k jednomu prasknutí, a to až po vyrovnání teplot. Po dobu ochlazování dochází k izochorickému ději – objem láhve se nemění. Tlak vzduchu se změní z hodnoty p_0 na hodnotu p_1. Pro stavové veličiny platí Charlesův zákon

$$\frac{p_0}{T_\mathrm{k}} = \frac{p_1}{T_\mathrm{s}}\,.$$

Odtud zjistíme tlak v láhvi před prasknutím z rovnice

$$p_1 = p_0 \frac{T_\mathrm{s}}{T_\mathrm{k}}\,.$$

Číselně je $p_1 \doteq 97\,290\,\mathrm{Pa}$ a jeho rozdíl s okolním tlakem je $p_0 - p_1 \doteq 3{,}71\,\mathrm{kPa}$. Poté dojde podle předpokladu k prasknutí. Jedná se o adiabatickou kompresi, kdy se teplota zvýší z hodnoty t_s na t_2, resp. z hodnoty T_s na T_2, tlak se zvýší z hodnoty p_1 na p_0 a objem se zmenší z hodnoty V_0 na V_2. Stavová rovnice a Poissonův zákon budou v tomto případě vypadat následovně

$$\frac{p_1 V_0}{T_\mathrm{s}} = \frac{p_0 V_2}{T_2}\,,$$
$$p_1 V_0^\kappa = p_0 V_2^\kappa\,.$$

Odtud získáme výsledný objem

$$V_2 = V_0 \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1}{\kappa}}$$

a výslednou teplotu

$$T_2 = T_\mathrm{s} \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\,.$$

Ještě zde potřebujeme dosadit vztah pro tlak p_1 z rovnice (). Po úpravě dostaneme

$$V_2 = V_0 \left(\frac{T_\mathrm{s}}{T_\mathrm{k}}\right)^{\frac{1}{\kappa}}\,,$$

$$T_2 = T_\mathrm{s} \left(\frac{T_\mathrm{k}}{T_\mathrm{s}}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\,.$$

Číselně je $V_2 \doteq 1{,}460\,\mathrm{l}$. Objem vzduchu v láhvi se tedy změnil o $V_2 - V_0 \doteq 40\,\mathrm{ml}$, což je 2,7 %. Teplota je číselně $T_2 \doteq 291\,\mathrm{K}$, resp. $t_2 \doteq 18\,^\circ\mathrm{C}$, liší se tedy asi o $3\,^\circ\mathrm{C}$ vzhledem k teplotě okolního vzduchu. Opět může dojít k jeho ochlazení a k následnému prasknutí.

Shrnutí pro hrubou láhev

Shrnmě, co jsme vyšetřením vlivu okolních podmínek na láhev zjistili. Míru daného vlivu na PET láhev můžeme porovnávat jak rozdílem odpovídajících tlaků, tak rozdílem odpovídajících teplot. Sejdeme-li deset poschodí, změní se okolní tlak působící na láhev asi o 380 Pa. Naopak necháme-li vzduch v lahvi jen postupně chladnout, změní se jeho tlak až o 3 710 Pa. Dále sejdeme-li deset pater, změní se teplota vzduchu během adiabatického prasknutí jen asi o 0,3 °C, zatímco během izochorického chladnutí v druhém případě se teplota vzduchu změní asi o $t_2 - t_\mathrm{s} = 8\,°\mathrm{C}$. Dále můžeme porovnat změnu objemu vzduchu po prasknutí. Výškový rozdíl 10 pater způsobil změnu asi 4 ml, vlivem teploty se objem zmenšil až o 40 ml.

Z našich výsledků vidíme, že v případě vlivu daném změnou okolního tlaku a teploty má zásadní vliv na prasknutí láhve pravě změna teploty. Pro kompletnost řešení je třeba dodat, že láhev může na změnu okolního tlaku reagovat prasknutím prakicky okamžitě. Naproti tomu k tepelné výměně mezi okolním vzduchem a PET láhví a mezi samotnou PET láhví a vzduchem v ní uzavřeném dochází déle. Je to způsobeno rychlostí vedení tepla a tepelnou kapacitou láhve se vzduchem.

Tady se dostáváme k problému, kdy v láhvi bude trocha vody. Tento problém jenom prodiskutujme slovně bez výpočtu. Kromě toho, že více vody způsobí méně vzduchu v láhvi, také zapříčiní poměrně velké zvýšení tepelné kapacity soustavy PET láhve s tekutinami vody a vzduchu. To znamená, že na danou změnu teploty soustavy je zapotřebí dodat více tepla – stejnou změnu teploty docílíme za jinak stejných podmínek až za delší čas. V našem případě se to může projevit tak, že sejdeme-li schody rychle, změní se odpovídajícím způsobem okolní tlak, ale teplota soustavy se při dostatečném množství vody změní jen velmi málo.

Lze též uvažovat relativně tenkostěnnou láhev, která přímo nepraská a tlak vzduchu v ní je vždy roven okolnímu tlaku.

Tenkostěnná láhev – teplota

V případě, kdy láhev podrobíme pouze změně teploty, můžeme uvažovat izobarický děj s tlakem p_0, pro který platí Gay-Lussacův zákon v podobě

$$\frac{V_0}{T_\mathrm{k}} = \frac{V_\mathrm{s}}{T_\mathrm{s}}\,,$$

kde V_s je výsledný objem, který je roven

$$V_\mathrm{s} = V_0 \frac{T_\mathrm{s}}{T_\mathrm{k}} \doteq 1{,}445\,\mathrm{l}\,.$$

Objem se zmenšil o $V_0 - V_\mathrm{s} \doteq 0{,}55\,\mathrm{ml}$, tedy asi o 3,7 %.

Tenkostěnná láhev – tlak

Nyní nás zajímá, jaký vliv má na tenkostěnnou láhev samotná změna okolního atmosférického tlaku. Předpokládáme, že teplotu vzduchu v láhvi udržujeme stále na teplotě $t_\mathrm{k} = 26\,°\mathrm{C}$. Pak lze tento případ modelovat izotermickým dějem, pro který platí Boyleův-Mariottův zákon

$$p_0 V_0 = p_{10} V_3\,.$$

Výsledný objem je $V_3 = V_0 \frac{p_0}{p_{10}} \doteq 1{,}494\,\mathrm{l}$. Objem láhve se v tomto případě změnil o $V_0 - V_3 \doteq 6\,\mathrm{ml}$, tj. asi o 0,4 %.

Závěr

Pro hrubou láhev vychází změna objemu 0,27 %, resp. 2,7 %, při změně tlaku, resp. teploty. Pro tenkostěnnou láhev jsou tyto hodnoty podobné, 0,4 %, resp. 3,7 %, při změně tlaku, resp. teploty. To znamená, že i pro tenkostěnnou láhev má zásadnější vliv na praskání změna teploty než změna tlaku.

Václav Mikeska
v.mikeska@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.