

Úloha II.3 ... pozorovací

6 bodů; průměr 5,19; řešilo 54 studentů

Jakou část povrchu kulové planety není možné vidět ze stacionární oběžné dráhy planety (taková dráha, že se obíhající objekt nachází stále nad stejným bodem na planetě), která má hustotu ρ a periodu rotace T ?

Filip procházel nevidené úlohy z Náboja.

Vo vzťažnej sústave spojennej s rotujúcou planétou sa satelit na stacionárnej dráhe nepohybuje, preto naň pôsobí nulová výsledná sila F . Táto sila sa skladá z dvoch zložiek - gravitačnej sily F_g a odstredivej sily F_{od} , ktoré pôsobia navzájom opačným smerom:

$$0 = F = F_{od} - F_g = m\omega^2 r - \frac{GmM}{r^2}, \quad (1)$$

kde m je hmotnosť satelitu, ω je uhlová rýchlosť rotácie planéty, r je vzdialenosť satelitu od stredu planéty, M je hmotnosť planéty a G je gravitačná konštanta.

Pre uhlovú rýchlosť platí

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

z čoho po dosadení do (1) a úprave máme

$$\frac{T^2 GM}{4\pi^2} = r^3.$$

Hmotnosť planéty určíme z jej hustoty ρ a polomeru R

$$M = \rho \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Po dosadení a úprave dostávame vyjadrenie vzdialenosti satelitu od stredu planéty v jednotkách jej polomeru ako

$$\sqrt[3]{\frac{T^2 G \rho}{3\pi}} = \frac{r}{R}. \quad (2)$$

Zvyšok úlohy je už len geometria. Pozorovateľ na satelite totiž vidí časť povrchu planéty, ktorá je ohraničená kružnicou k , tvorenou bodmi dotyku dotýčnic vedených zo satelitu ku guľovému povrchu planéty. Zaujíma nás teda povrch guľového vrchlíka S (ktorý pozorovateľ vidí), pre ktorý platí¹

$$S = 2\pi R^2 (1 - \cos \alpha),$$

kde α je uhol satelit – stred planéty – bod na kružnici k .

Ramená tohto uhla majú dĺžky r , resp. R a v bode dotyku je pravý uhol, preto

$$\cos \alpha = \frac{R}{r}.$$

Po dosadení do (2) dostávame

$$S = 2\pi R^2 \left(1 - \sqrt[3]{\frac{3\pi}{T^2 G \rho}} \right).$$

¹Dá sa to odvodiť integrovaním. Známej je tiež vzorec $S = 2\pi R h$, kde $h = R - R \cos \alpha$ je výška vrchlíka. Všimnite si, že napr. $\alpha = \pi$ dá celý povrch gule $4\pi R^2$.

Zaujíma nás ale, akú časť k celého povrchu planéty pozorovateľ nevidí:

$$k = 1 - \frac{S}{4\pi R^2} = \frac{\left(1 + \sqrt[3]{\frac{3\pi}{T^2 G \varrho}}\right)}{2}.$$

Pre zaujímavosť, v prípade Zeme, ktorá má strednú hustotu $\varrho = 5,515 \cdot 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ a rotačnú dobu $T = 86,4 \cdot 10^3 \text{ s}$, pozorovateľ nevidí $k = 0,575$ jej povrchu.

Josef Lipták
liptak.j@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.