

Úloha II.E ... sypká

12 bodů; průměr 10,45; řešilo 47 studentů

Změřte sypný úhel alespoň 2 látek běžně používaných v kuchyni (např. mouka, cukr, sůl apod.).

Michal se málem sesypal.

Teória

Ako je dobre známe, nasypaná látka vytvorí kužel s uhlom sklonu stien (voči vodorovnej rovine) α – to je hľadaný sypný uhol. Na stenu kužela sa môžeme pozrieť ako na naklonenú rovinu s koeficientom trenia μ ; z rovnováhy medzi tiažovou a trecou silou pre vrchnú vrstvu látky dostávame známy vzťah

$$\mu = \operatorname{tg} \alpha .$$

Nejde o úplne realistický model, lebo zrnká môžu držať aj v strmšom kuželi, ak sa na seba vhodne „naskladajú“, teda ak zapadnú do dier medzi inými zrnami tak, že nedržia iba kvôli treniu. Dalo by sa teda čakať, že látka s drsnejšími alebo väčšími zrnami bude mať sypný uhol väčší.

Postup pri experimente

Sypný uhol budeme merať pre nasledujúce látky: hladká múka, hrubá múka, (kryštalový) cukor, soľ, mak.

Danú látku N krát ($N = 10$) nasypeme na rovný tanier z č. o najmenšej výšky a jemne zatrasíme. Výsledný kužel zboku odfoťíme, na strany kužela na fotke nakreslíme priamky a nájdeme uhly, ktoré zvierajú s vodorovnou osou. Zo všetkých $2N$ hodnôt pre ľavé a pravé strany kuželov vypočítame priemerný uhol $\bar{\alpha}$ a jeho štandardnú odchýlku (štatistickú) podľa vzťahu

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{2N} (\alpha_i - \bar{\alpha})^2}{2N(2N - 1)}} .$$

Odhadneme systematickú chybu jedného merania $\Delta\alpha$, z ktorej vypočítame štandardnú odchýlku (systematickú)

$$\sigma_B = \sqrt{\frac{1}{2N} \Delta\alpha} ;$$

celkovú štandardnú odchýlku potom vypočítame podľa vzťahu

$$\sigma = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2} .$$

Výsledky merania

V tabuľke 1 je uvedený nameraný uhol α pre jednotlivé látky spolu s priemerom. Na obr. 1 až 5 sú fotky kôpok použitých pri experimentoch.

Chybu určenia uhla α odhadneme na $0,5^\circ$. Potom je systematická odchýlka priemeru rovná $\sigma_B \doteq 0,1^\circ$; vidíme, že je oproti štatistickej zanedbateľná, celková odchýlka teda bude približne rovná štatistickej.

Tab. 1: Nameraný sklon stien nasypaného kužela.

i	hl. múka		hr. múka		cukor		sol		mak	
	$\alpha_1[^\circ]$	$\alpha_p[^\circ]$	$\alpha_1[^\circ]$	$\alpha_p[^\circ]$	$\alpha_1[^\circ]$	$\alpha_p[^\circ]$	$\alpha_1[^\circ]$	$\alpha_p[^\circ]$	$\alpha_1[^\circ]$	$\alpha_p[^\circ]$
1	34,5	45,0	40,1	37,5	41,2	41,7	42,2	45,3	40,9	38,2
2	47,8	43,5	38,7	35,2	43,3	37,3	44,1	41,5	40,8	40,1
3	48,6	41,7	37,8	39,6	41,8	39,6	42,7	41,0	38,4	38,1
4	41,1	48,4	39,9	38,3	46,7	39,2	40,2	40,0	38,6	39,2
5	49,1	48,8	38,8	38,0	35,4	44,0	41,2	36,5	40,3	38,4
6	46,0	43,5	43,9	39,0	42,9	41,3	36,6	40,8	37,2	38,8
7	56,4	54,1	37,6	38,4	41,1	39,7	40,4	37,7	38,9	36,5
8	57,5	52,2	37,5	38,0	41,9	40,3	39,9	41,4	37,6	36,1
9	49,8	47,5	38,0	37,0	38,9	41,8	47,3	35,0	42,6	37,5
10	50,0	49,5	38,4	40,8	40,6	40,3	39,7	39,6	37,7	38,4
$\bar{\alpha}$	48°		38,6°		41,0°		40,7°		38,7°	
σ_A	1°		0,4°		0,6°		0,7°		0,4°	

Diskusia

Nameraný uhol α môže byť väčší ako skutočný kvôli naskladaniu zrníek. Kužel nasypanej látky by mal byť ale stabilný aj pri ľubovoľnom menšom uhle, čo sa prejaví hlavne v prípade, že sypeme z väčšej výšky a padajúce zrnká majú dostatočnú kinetickú energiu na to, aby sa zosypali nižšie.

Ďalej experiment ovplyvňuje to, že nevznikne dokonalý kužel – nedá sa sypať presne z jedného bodu, pri podstave a vrchole bude kužel viac zaoblený kvôli padajúcim zrnkám a všeobecne bude nepravidelný tam, kde sa zrnká viac naskladajú na seba. Určiť presne povrch kužela je tiež problém kvôli rozmerom zrníek.

Prípadný sklon fotografie eliminujeme tým, že sčítavame uhly pre pravú a ľavú stenu kužela. Na meranie ale vplýva to, že pri fotení z konečnej diaľky alebo nedokonale z boku neodfotíme presne prierez kužela.

Pri hladkej múke sa objavuje ten problém, že ľahko tvorí hrudky, ktoré sa vedľa nakopit do dost veľkej výšky. Tento efekt, na menšej škále, efektívne vytvára väčšie a nepravidelné zrná, aj keď samotné častice múky sú veľmi malé a pravdepodobne guľové. To spôsobuje, že je sypný uhol vcelku vysoký a ťažko sa meria (steny kužela sú dosť nepravidelné). U ostatných meraných látok to nepozorujeme, napr. pri práškovom cukre áno. Pravdepodobne sú hrudkovité len veľmi jemné látky.

Vidíme tiež, že pre mak a hrubú múku je sypný uhol veľmi podobný – v rámci odchýlky merania rovnaký – a pre cukor a sol je tiež dosť podobný. Podobnosť medzi týmito dvojicami je v tvare zrn (mak a hrubá múka majú vcelku guľový tvar, cukor a sol sú kryštalické); na druhej strane veľkosť zrn nemá na použitých látkach pozorovateľný vplyv.

Ďalším nežiaducim efektom je vlhkosť, ktorá by mala zvýšiť sypný uhol, je ale ťažké odhadnúť o koľko. Použitá sol bola dosť navlhnutá, ostatné látky boli suché.

Tab. 2: Sypný uhol jednotlivých látok.

látka	sypný uhol
hladká múka	$(48 \pm 1)^\circ$
hrubá múka	$(38,6 \pm 0,4)^\circ$
cukor	$(41,0 \pm 0,6)^\circ$
soľ	$(40,7 \pm 0,7)^\circ$
mak	$(38,7 \pm 0,4)^\circ$

Záver

Nameraný sypný uhol pre jednotlivé látky je uvedený v tabuľke 2.



Obr. 1: Kôпка hladkej múky.

Použité látky s podobným tvarom zŕn sa správajú podobne, veľkosť zŕn nie je veľmi podstatná. Veľmi jemné látky, ktoré vytvárajú hrudky, budú mať zasa veľký sypný uhol.

Treba podotknúť, že žiadne závery o správaní sypného uhla podľa vlastnosti látky nevieme vyvodiť s istotou – použitých látok je príliš málo.

Jakub Šafin
xellos@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.



Obr. 2: Kôpka hrubej múky.



Obr. 3: Kôpka cukru.



Obr. 4: Kôpka soli.



Obr. 5: Kôpka maku.