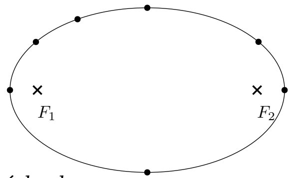
Úloha III.2 ... zrychleníčko, zrychlení

3 body; průměr 2,20; řešilo 46 studentů

Na obrázku vidíte náčrt elipsy s ohnisky F_1 a F_2 a několika vyznačenými body na ní. Uvažujte, že elipsa znázorňuje trajektorii nějakého hmotného bodu. Znázorněte do obrázku zrychlení, která působí na hmotný bod v jednotlivých vyznačených bodech dráhy pro dvě situace (jde o směry a vzájemné poměry zrychlení (které je větší/menší) v různých bodech v rámci jednoho náčrtu).



a) V ohnisku F_1 je umístěno hmotné těleso, kolem kterého hmotný bod obíhá. Uvažujeme, že platí 2. Keplerův zákon.

b) Těleso má konstantní velikost rychlosti, pouze se pohybuje po elipse.

Karel na konferenci slyšel, že s takovými úlohami mají problémy i vysokoškoláci.

a)
Ako prvé si musíme uvedomiť, čo za druh zrýchlenia pôsobí v prípade klasickej Keplerovej úlohy Slnko-jedna planéta. Vezmeme si na počiatku teleso v nejakej vzdialenosti od Slnka a udelíme mu rýchlosť, menšiu ako je kruhová rýchlosť v tejto vzdialenosti smerom kolmo od spojnice teleso-Slnko. Zo základov nebeskej mechaniky vieme, že teleso sa bude pohybovať po elipse, ktorej afélium (najvzdialenejší bod dráhy od Slnka) bude práve v bode, odkiaľ sme teleso vypustili. Jediná sila, ktorá bude v takomto prípade pôsobiť na nami vypustené teleso, bude príťažlivá gravitačná sila medzi telesom a Slnkom. Pre ľubovoľnú silu pôsobiacu na teleso s konštantnou hmotnosťou platí, že táto sila uvádza teleso do pohybu so zrýchlením, ktoré je rovné

$$a = \frac{F}{m}\,,$$

kde F je sila pôsobiaca na teleso a m je hmotnosť daného telesa. Môžeme si všimnúť, že z tohto vzťahu si vieme prirodzene definovať hmotnosť ako schopnosť telesa klásť odpor voči pôsobeniu vonkajších síl. Sila pôsobiaca na toto teleso je v našom prípade rovná Newtonovskej gravitačnej sile

$$F_g = -\frac{GMm}{r^3}\boldsymbol{r}\,,$$

kde G je gravitačná konštanta, M je hmotnosť cetrálneho telesa (v našom prípade Slnka) a $\boldsymbol{r}$ je polohovy vektor voči Slnku. Ďalej je vhodné spraviť si transformáciu kartézskych súradníc s počiatkom v strede elipsy, na kartézske súradnice so stredom v Slnku. Potom $y$ová súradnica Slnka je totožná s y súradnicou stredu elipsy, avšak $x$ovú súradnicu musíme posunúť o

$$f = \sqrt{a^2 - b^2}\,,$$

kde a, b sú hlavné a vedľajšie polosi elipsy. Potom nové súradnice budú:

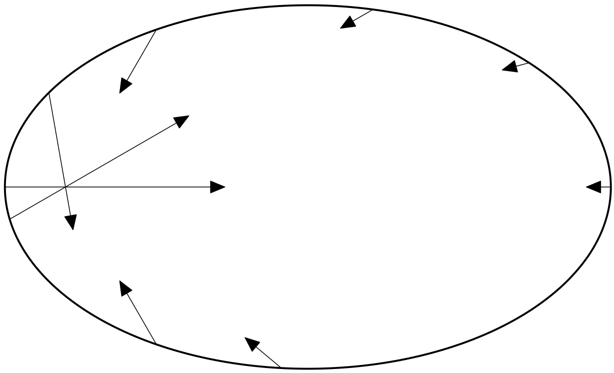
$$x' = x + f\,,$$
$$y' = y\,.$$

Ak do vzorca pre zrýchlenie dosadíme náš vzorec pre silu a doň dosadíme za $\boldsymbol{r}$ polohu bodu v nových súradniciach, tak výsledný vzťah pre veľkosť zrýchlenia pre ľubovoľný bod ležiaci na elipse bude

$$a_d = \frac{GM}{x'^2 + y'^2} = \frac{GM}{\left(x + \sqrt{a^2 - b^2}\right)^2 + y^2}\,.$$

Po dosadení do tohto vzorca vieme určiť presnú veľkosť. Avšak naším cieľom je toto zrýchlenie zakresliť. Keďže smer zrýchlenia je od daného bodu na elipse smerom k Slnku, v našom prípade smeruje vektor zrýchlenia z daného bodu na elipse, do ohniska F_1.

Ak si vhodne zvolíme mierku obrázku tak s týmito informáciami je jednoduché vkresliť vektory zrýchlenia do obrázku. Vyzerať by to mohlo asi ako na Obrázku 1.



Obr. 1: Výsledok prípadu a).

b)

Predpokladajme teraz že teleso sa znova hýbe po tej istej elipse, a to napriek prítomnosti akejkoľvek gravitačnej alebo inej sily. Môžeme si predstaviť napríklad vesmírnu loď ktorá niekde v priestore jazdí dookola po elipse, spaľujúc pritom palivo na to, aby si udržala požadovanú dráhu. Vieme že zrýchlenie pôsobiace na teleso si vieme vždy rozdeliť na normálovú zložku, ktorá spôsobuje zakrivenie dráhy, a na tangenciálnu zložku, ktorá spôsobuje zmenu rýchlosti telesa. Keďže teleso si po celý čas udržiava rovnakú rýchlosť, je tangenciálna zložka zrýchlenia nulová, a smer zrýchlenia je teda totožný s normálou k dotyčnici v danom bode.

Úlohu si rozdelíme na dve časti. Najprv budeme hľadať, ako vyzerá smerový vektor zrýchlenia, t.j. normála k danej krivke. Potom si zrátame, akú veľkosť má zrýchlenie v závislosti na poloha. Kedže sa jedná o geometrickú úlohu, nemusíme nájsť explicitný predpis pre priamku, na ktorej leží normálový vektor v danom bode. Stačí nám vedieť, že daná priamka bude prechádzať cez nami zvolený bod, a bude rovnobežná s vektorom gradientu elipsy (ako implicitnej funkcie), ktorý zo svojej prirodzenej definície je vnímaný ako vektorový operátor určujúci normálu k nejakej krivke či ploche. Bez znalostí vyššej matematiky, skrátka vezmeme pravítko s ryskou a nájdeme kolmicu na dotyčnicu v nejakom bode. Poznámka pre prípadných záujemcov, matematicky-analyticky by sme to spočítali takto:

Elipsa je popísaná implicitne krivkou

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Gradientom tejto krivky, a teda nami hľadaným vektorom je

$$\left[\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}\right]\,.$$

Na základe týchto informácií vieme ľubovoľnému bodu priradiť smer zrýchlenia.

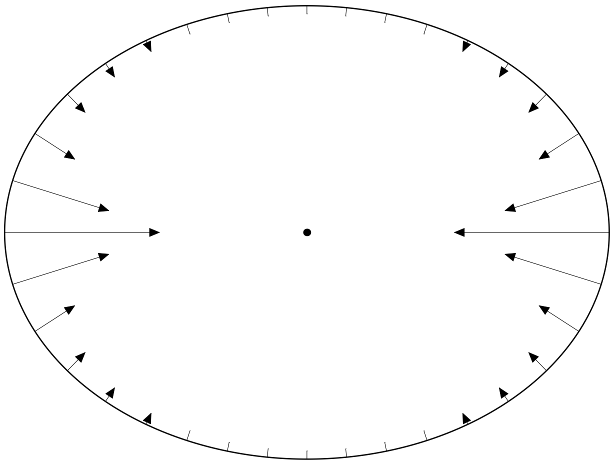
Veľkosť dostredivého zrýchlenia ("šípka" vektora bude teda smerovať vždy smerom dovnútra elipsy) je potom daná vzťahom

$$a_d = \frac{v^2}{R}\,,$$

kde rýchlosť v je po celý čas konštantná a polomer krivosti elipsy R v nejakom bode, je daný vzťahom

$$R = a^2 b^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)^{\frac{3}{2}}\,,$$

kde x a y sú súradnice daného bodu. Dosadením vzťahu pre polomer krivosti v nejakom bode do vzťahu pre veľkosť dostredivého zrýchlenia máme vzorec, z ktorého vieme dopočítať veľkosť zrýchlenia v ľubovoľnom bode na elipse, pri daných počiatočných podmienkach. Po zakreslení do obrázku s použitím takto odvodených informácií by mal vyzerať ako Obrázek 2.



Obr. 2: Výsledok prípadu b).

Jakub Jambrich
`jakubj@fykos.cz`