Úloha IV.3 ... divně tvarovaná nádobka

6 bodů; průměr 3,78; řešilo 32 studentů

Máme válcovou skleničku, která má zboku u dna malou díru o ploše S. Tato nádoba je naplněná vodou, která samovolně přetéká do druhé nádoby, která je tentokrát již bez díry. Jaký tvar by musela mít druhá nádoba, aby v ní hladina rostla rovnoměrně? Předpokládejte, že má být válcově symetrická.

Bonus *Dna obou nádob jsou ve stejné výšce a nádoby jsou dírou spojené.*

Karel se díval, jak se nalévá sklenička na rautu.

Přepokládejme kvazistacionární proudění, abychom mohli sestrojit Bernoulliho rovnici pro proudnici od hladiny válcové nádoby v daném okamžiku až po výtokový otvor. Nechť ϱ je hustota vody, p_a atmosférický tlak, v výtoková rychlost vody z otvoru, h_1 výška hladiny ve válcové nádobě a $v_1 = -\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t} > 0$ je rychlost klesání hladiny. Bernoulliho rovnice pak má tvar

$$\frac{1}{2}\varrho v_1^2 + p_\mathrm{a} + h_1\varrho g = \frac{1}{2}\varrho v^2 + p_\mathrm{a}\,.$$

Po odečtení atmosférického tlaku p_a a vydělení rovnice hustotou pak dostaneme

$$\frac{1}{2}v_1^2 + h_1 g = \frac{1}{2}v^2\,. \tag{1}$$

Za předpokladu nestlačitelnosti vody plyne z rovnice kontinuity rovnost

$$S_1 v_1 = S v\,,$$

kde S_1, resp. S, je obsah příčného průřezu válcové nádoby, resp. jejího otvoru. Dosazením za v do rovnice (1) dostaneme

$$\frac{1}{2}v_1^2 + h_1 g = \frac{1}{2}\left(\frac{S_1}{S}\right)^2 v_1^2\,.$$

Odtud můžeme vyjádřit rychlost klesání hladiny

$$v_1 = \sqrt{\frac{2h_1 g}{\left(\frac{S_1}{S}\right)^2 - 1}}\,.$$

Dosazením $v_1 = -\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t}$ získáme diferenciální rovnici, kterou řešíme separací proměnných

$$-\frac{\mathrm{d}h_1}{\sqrt{h_1}} = \sqrt{\frac{2g}{\left(\frac{S_1}{S}\right)^2 - 1}}\mathrm{d}t\,.$$

Integrujeme od h_0 do h_1, tedy od počáteční výšky hladiny do její výšky v čase t

$$\int_{h_0}^{h_1} -\frac{\mathrm{d}h_1}{\sqrt{h_1}} = \int_0^t \sqrt{\frac{2g}{\left(\frac{S_1}{S}\right)^2 - 1}}\mathrm{d}t\,,$$

$$\left[-2\sqrt{h_1}\right]_{h0}^{h_1} = \left[\sqrt{\frac{2g}{\left(\frac{S_1}{S}\right)^2 - 1}}t\right]_0^t\,.$$

Dosazením integračních mezí dostáváme

$$-2\sqrt{h_1}+2\sqrt{h_0}=\sqrt{\frac{2g}{\left(\frac{S_1}{S}\right)^2-1}}t\,,$$

odkud vyjádříme

$$h_1=h_0-\sqrt{\frac{2h_0g}{\left(\frac{S_1}{S}\right)^2-1}}t+\frac{g}{\left(\frac{S_1}{S}\right)^2-1}\frac{t^2}{2}\,.$$

Derivací a drobnými algebraickými úpravami získáme vztah pro rychlost klesání hladiny v první nádobě

$$v_1=\sqrt{\frac{2h_0g}{\left(\frac{S_1}{S}\right)^2-1}}-\frac{g}{\left(\frac{S_1}{S}\right)^2-1}t\,.$$

Odtud můžeme dosadit do rovnice kontinuity ve tvaru $S_1v_1=S_2v_2$, kde v_2 je rychlost růstu hladiny ve druhé nádobě a S_2 je obsah jejího plošného průřezu. Ze zadání víme, že v_2 je konstantní, tedy $v_2=h_2/t$. Odtud si vyjádříme čas. Také platí $S_2=\pi r_2^2$, kde r_2 je hledaný poloměr druhé nádoby. Dostáváme pro něj

$$r_2=\sqrt{\frac{S_1}{\pi v_2}\left(\sqrt{\frac{2h_0g}{\left(\frac{S_1}{S}\right)^2-1}}-\frac{g}{\left(\frac{S_1}{S}\right)^2-1}\frac{h_2}{v_2}\right)}\,.$$

Tím máme analyticky zadaný tvar druhé nádoby, tedy závislost jejího poloměru na výšce ode dna. Závislost výšky na poloměru je

$$h_2=\frac{v_2}{g}\sqrt{\left(\frac{S_1}{S}\right)^2-1}\left(\sqrt{2h_0g}-\frac{\pi r_2^2v_2}{S_1}\sqrt{\left(\frac{S_1}{S}\right)^2-1}\right)\,.$$

Jedná se o rovnici paraboly s maximem v jejím vrcholu, jejíž osa leží na ose nádobky. Nádobka má tedy tvar části rotačního paraboloidu.

V případě, že $S\ll S_1$, můžeme v Bernoulliho rovnici (1) zanedbat první člen. Pro výtokovou rychost potom platí

$$v=\sqrt{2h_1g}$$

a pro rychlost klesání hladiny v první nádobě tak dostáváme

$$v_1=\frac{S}{S_1}\sqrt{2h_1g}\,.$$

Podobným postupem jako výše bychom se dostali k výsledku

$$r_2=\sqrt{\frac{S}{\pi v_2}\left(\sqrt{2h_0g}-\frac{Sg}{S_1}\frac{h_2}{v_2}\right)}\,.$$

Bonus

Bernoulliho rovnice pro hladiny válcové a divně tvarované nádoby má tvar

$$\frac{1}{2}\varrho v_1^2 + p_\mathrm{a} + h_1 \varrho g = \frac{1}{2}\varrho v_2^2 + p_\mathrm{a} + h_2 \varrho g\,,$$

kde všechny veličiny jsou definovány jako dříve. Jednoduchými úpravami ji dostaneme do tvaru

$$\frac{1}{2} v_1^2 + h_1 g = \frac{1}{2} v_2^2 + h_2 g\,. \tag{2}$$

Derivací podle času dostáváme

$$v_1 \frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} - v_1 g = v_2 g\,,$$

kde jsme první člen zderivovali podle pravidla pro derivaci složené funkce a o v_2 víme, že je konstantní. Nyní separujeme proměnné a obě strany rovnice integrujeme

$$\int \frac{v_1}{v_1 + v_2} \mathrm{d}v_1 = \int g \mathrm{d}t\,.$$

První integrál vyřešíme částečným dělením integrandu, neboli

$$\int \frac{v_1}{v_1+v_2}\mathrm{d}v_1 = \int \frac{v_1 + v_2 - v_2}{v_1 + v_2}\mathrm{d}v_1 = \int \left(1 - \frac{v_2}{v_1+v_2}\right)\mathrm{d}v_1 = v_1 - v_2 \ln\left(v_1 + v_2\right) + C_1\,.$$

Druhý integrál je triviální, celkově vychází

$$v_1 - v_2 \ln\left(v_1 + v_2\right) = gt + C\,, \tag{3}$$

kde C je již jediná integrační konstanta (zde jsme výhodněji použili neurčité integrály s integračními konstantami místo určitých integrálů), kterou určíme z počátečních podmínek. V čase $t = 0$ je výška hladiny válcové nádoby h_0 a klesá rychlostí v_0. Odtud dostáváme

$$v_0 - v_2 \ln\left(v_0 + v_2\right) = C\,. \tag{4}$$

Z rovnice (2) si vyjádříme rychlost

$$v_0 = \sqrt{{v_2}^2 - 2h_0 g}\,,$$

kterou dosadíme do (4), a tím získáme vztah pro hledanou integrační konstantu

$$C = \sqrt{{v_2}^2 - 2h_0 g} - v_2 \ln\left(\sqrt{{v_2}^2 - 2h_0 g} + v_2\right)\,.$$

Odtud můžeme dosadit do (3). Stejně tak dosadíme za $v_1 = \frac{\pi r_2^2}{S_1} v_2$ a za $t = \frac{h_2}{v_2}$. Celkově píšeme

$$\frac{\pi r_2^2}{S_1} v_2 - v_2 \ln\left(\frac{\pi r_2^2}{S_1} v_2 + v_2\right) = \frac{h_2 g}{v_2} + \sqrt{{v_2}^2 - 2h_0 g} - v_2 \ln\left(\sqrt{{v_2}^2 - 2h_0 g} + v_2\right)\,.$$

Nyní můžeme konečně vyjádřit

$$h_2 = \frac{{v_2}^2}{g}\left(\frac{\pi r_2^2}{S_1} - \sqrt{1 - \frac{2h_0 g}{v_2^2}} + \ln\left(\frac{\sqrt{1 - \frac{2h_0 g}{v_2^2}} + 1}{\frac{\pi r_2^2}{S_1} + 1}\right)\right)\,,$$

což je vztah závislosti výšky divně tvarované nádoby na poloměru r_2. Bezpochyby by byla zajímavější opačná závislost, tedy závislost poloměru na výšce. Ta bohužel analyticky vyjádřit nejde, protože rovnice je transcendentní vzhledem k proměnné r_2. Ještě dodejme, že při volbě počátečních podmínek jsme mohli zvolit kromě výšky h_0 např. i obsah dna divně tvarované nádoby nebo rychlost klesání hladiny ve válcové nádobě v čase $t = 0$. Dále si povšimněme, že při řešení bonusové úlohy již nemůžeme zanedbat první člen levé strany Bernoulliho rovnice.

Václav Mikeska
v.mikeska@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.