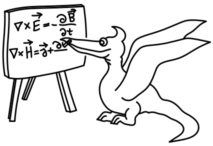

Seriál: Lagrangeovy rovnice I. druhu

Úvod

Na úvod vás vítam pri čítaní druhej časti seriálu FYKOSu. Začiatkom druhej série sa ešte raz vrátime k značeniu, kde si rýchlo ukážeme ako fungujú indexy, ktoré nám umožnia písať jednu rovnicu namiesto troch. Potom sa dostaneme k pojmu „väzba“, ktorý bol už párkrát spomenutý v predchádzajúcej časti. Zadefinujeme si ho a ukážeme si rôzne druhy väzieb a príklady na ne. Potom bude nasledovať jadro tejto časti seriálu, kde zavedieme Lagrangeove rovnice 1. druhu, ktorých použitie budeme demonštrovať aj na príklade z predchádzajúceho seriálu. Nakoniec mám pre vás pripravenú ukážku zaujímavého prepojenia medzi Lagrangeovými rovnicami a zákonom zachovania energie.

Značenie po druhýkrát

V mechanike (alebo vo všeobecnosti vo fyzike) vyzerá problém v nejakej súradnicovej sústave veľmi podobne. Napríklad pohybové rovnice hmotného bodu vo vákuu, na ktorý pôsobí nejaká vonkajšia sila F, vyzerajú

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x\,, \\ m\ddot{y} &= F_y\,, \\ m\ddot{z} &= F_z\,. \end{aligned}$$

Prípadne, ak je tento bod v homogénnom gravitačnom poli v zápornom smere osy z, a navyše naň pôsobí sila F, budú vyzerať takto

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x\,, \\ m\ddot{y} &= F_y\,, \\ m\ddot{z} &= F_z - mg\,. \end{aligned}$$

Častokrát chceme tento zápis zjednodušiť, lebo na vyjadrenie jednoduchej fyzikálnej skutočnosti sme použili veľa miesta a zabralo nám to veľa času. Máme v zásade dve možnosti. Prvá je, že použijeme vektorový zápis

$$m\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}\,,$$

respektíve

$$m\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_g\,,$$

kde $\boldsymbol{F}_g$ je vektor tiažovej sily, ktorého prvé dve zložky sú nulové a tretia je $-mg$.

Z rôznych dôvodov sa ale používa aj iný zápis, indexový. Má tú výhodu, že sa v ňom dajú po troche cviku jednoduchšie vidieť rovnice. Zároveň si človek nemusí dávať pozor na to, čo je vektor a čo nie je. (Čo je výhodou najmä ak sa majú nejaké dva vektory násobiť.) Totižto každý symbol v takto zapísanej rovnici chápeme ako skalár. Rovnica pre hmotný bod vo vákuu bez vonkajšieho gravitačného poľa by v tomto zápise vyzerala

$$m\ddot{x}_i = F_i\,.$$

V niektorých textoch sa môžete stretnúť s tým, že pozícia indexu hore a dole sa rozlišuje a znamená niečo iné. Pre naše potreby to ale rozlišovať nebudeme a budeme indexy písať vždy dole. V tomto prípade nie je ťažké prísť na to, čo presne znamená index i. Ak index i bude nadobúdať hodnoty od 1 do 3 (alebo ak chcete x, y, z), dostaneme postupne pre tri rôzne hodnoty indexu tri pohybové rovnice.

Hlavnú výhodu tohto formalizmu uvidíme vo chvíli, keď pomocou neho zapíšeme napríklad vektorový súčin. Vezmime si ako príklad moment hybnosti. Podľa definície je moment hybnosti

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}\,,$$

kde $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor a $\boldsymbol{p}$ je hybnosť. Po zložkách (ak x-ová zložka bude označená indexom 1 atď.) zapíšeme potom túto rovnicu

$$\begin{aligned} L_1 &= r_2 p_3 - r_3 p_2\,,\\ L_2 &= r_3 p_1 - r_1 p_3\,,\\ L_3 &= r_1 p_2 - r_2 p_1\,. \end{aligned}$$

Z čoho sa dá s trochou cviku uvidieť, ako by sa to zapísalo indexovo

$$L_i = r_j p_k - p_j r_k\,.$$

Odporúčam, aby ste si sami vyskúšali, že ak za (i,j,k) dosadíte postupne $(1,2,3)$, $(2,3,1)$ a $(3,2,1)$ dostanete pôvodné rovnice.

Tí, ktorí si to overili, snáď už vidia, ako funguje indexový zápis. My sa s ním stretneme v prípadoch jednoduchších, ako je vektorový súčin, tak sa vám snáď čím skôr dostane pod kožu a bude pre vás zjednodušením.

Väzby

V predchádzajúcom dieli seriálu ako aj v úvode tohto sme viackrát spomenuli pojem väzba. Väzbou budeme myslieť nejakú podmienku, ktorá, okrem pohybových rovníc, obmedzuje pohyb nejakého telesa (v našom prípade hmotného bodu). Väzbou môže byť napríklad nejaká plocha, po ktorej sa hmotný bod pohybuje. Takýto bod sa teda bude riadiť pohybovými rovnicami, okrem toho sa ale musí pri pohybe vždy nachádzať na danej ploche. Vo všeobecnosti vieme väzbu matematicky zapísať. Obvykle zapisujeme väzbu pomocou jednej rovnice. Vo všeobecnosti môže väzba vyzerať takto

$$U(x_i, \dot{x}_i, t) = 0\,.$$

Teda nejaká rovnica plochy, prípadne krivky závislá od rýchlosti hmotného bodu na nej a taktiež časovo premenná. (Všimnite si index i pri polohe a jej časovej derivácii. To značí, že rovnica väzby môže závisieť od všetkých zložiek polohy aj rýchlosti.) V našich prípadoch budeme ale uvažovať časovo nepremenné plochy alebo krivky nezávislé od rýchlosti hmotného bodu. Takéto plochy a krivky budeme zapisovať

$$U(x_i) = 0\,.$$

Typickým príkladom na väzbu môže byť napríklad auto pohybujúce sa po kruhovej pretekárskej dráhe. Ak je auto v porovnaní s veľkosťou dráhy zanedbateľne malé, môžeme sa baviť o hmotnom bode pohybujúcom sa po kružnici. Pohyb takéhoto auta ovplyvňujú vonkajšie vtisnuté sily (čo môže pôsobiť zavádzajúco, nakoľko sa v tomto prípade jedná o silu motora, ktorý pôsobí zvnútra auta) a zároveň aj väzbová sila, ktorá ho drží na pretekárskej dráhe v tvare kruhu. Nás momentálne zaujíma, ako napísať podmienku pre súradnice auta, teda väzbovú rovnicu pre pohyb auta. Bude sa evidentne jednať o rovnicu kružnice. Pre účely príkladu je irelevantné, aké bude mať stred kružnice súradnice. Ak predpokladáme, že jej polomer je r, je rovnica tejto kružnice v tvare, ktorý odpovedá nami uvedenému tvaru väzby

$$x_1^2 + x_2^2 - r^2 = 0\,.$$

Ukážeme si ešte jeden veľmi častý príklad. Majme rovinu naklonenú pod uhlom α, po ktorej sa pohybuje hmotný bod. Zo základnej intuície je vidieť, že úlohu môžeme riešiť ako dvojrozmerný problém. Ďalej môžeme bez ujmy na všeobecnosti položiť začiatok súradnicovej sústavy do bodu $(0,0)$ tak, aby prechádzal cez našu naklonenú rovinu, po ktorej sa pohybuje hmotný bod, a zároveň aby rovina zvierala s osou x uhol α. Rovina je teraz popísateľná ako lineárna funkcia premennej x, so smernicou rovnou $\mathrm{tg}\,(\alpha)$. Väzbová podmienka bude teda

$$y - \mathrm{tg}\,(\alpha)\,x = 0\,.$$

Na ďalšie precvičenie tvorenia väzieb môžete využiť napríklad prepočítanie si príkladov k seriálu, kde budete musieť napísať väzbovú rovnicu pre sústavu dvoch hmotných bodov.

Lagrangeove rovnice prvého druhu

Kombináciou Newtonových pohybových rovníc pre hmotný bod podrobený väzbe s rovnicou tejto väzby dokážeme dostať sústavu pohybových rovníc, ktorých riešenie budú pohybové rovnice pre hmotný bod. Ako ale zostaviť zo znalosti Newtonových rovníc a väzbovej (väzbových) rovníc nami hľadanú sústavu? To si ukážeme v tejto časti.

Majme trojicu pohybových rovníc

$$m\ddot{x}_i = F_i + R_i\,.$$

Ľavá strana značí druhú časovú deriváciu postupne troch zložiek vektorovej funkcie polohy a pravá strana značí súčet zložky sily $\boldsymbol{F}$, ktorá zodpovedá všetkým vtisnutým silám (napr. gravitačnej, elektromagnetickej, etc.), a zložky sily $\boldsymbol{R}$ zodpovedajúcej väzbovej sile. Nás bude práve zaujímať, ako vyzerajú zložky sily $\boldsymbol{R}$.

Pre začiatok nás bude zaujímať smer tejto sily. Táto sila je sila, ktorou na hmotný bod pôsobí plocha/priamka po ktorej sa pohybuje. V každom bode si vieme teda túto silu rozložiť na zložku kolmú a zložku dotyčnicovú k rovine. Vo všeobecnosti musíme rátať s oboma zložkami, ale obyčajne rátame v príkladoch so zjednodušením, že trecia sila medzi väzbovou plochou a hmotným bodom je nulová. (Častokrát je to aj preto, lebo väzba nie je nič fyzické, ale vystihuje len vlastnosti nejakého fyzikálneho pôsobenia.) Trecia sila je vždy rovnobežná s rovinou pohybu. Ale keďže predpokladáme, že trecia sila je nulová, má sila $\boldsymbol{R}$ vždy len normálovú (kolmú) zložku.

Z predchádzajúcej úvahy teda vieme, že smer väzbovej sily je kolmý na väzbovú plochu (prípadne krivku). Našťastie nám teraz poslúži matematika, vďaka ktorej je známe, že ak máme zadanú nejakú väzbu (je jedno či v dvoch, troch alebo pokojne aj viacerých rozmeroch), tak po aplikovaní operátora *gradient* dostaneme vektor, ktorý je normálou – kolmicou k danej krivke/rovine v danom bode.

Jediné, čo o gradiente budeme potrebovať vedieť, je to, že sa jedná o operátor (niečo ako „nositeľ matematickej operácie“), ktorý skalárnej funkcii priradí vektorovú funkciu. Tá hovorí o tom, v ktorom smere daná skalárna funkcia rastie najviac.[1] Napríklad gradient teploty je smer, pri pohybe v ktorom sa teplota mení najviac. Gradient výšky terénu pri pohybe v horách je smer, v ktorom je z daného miesta najstrmšie do kopca. Ako sme ale uviedli, gradient je zároveň aj normálovým vektorom. Gradient funckie $f(x_i)$ sa počíta a značí

$$(\nabla f)_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}\,.$$

Každá priestorová zložka gradientu nejakej funkcie je teda derivácia danej funkcie podľa zodpovedajúcej priestorovej súradnice.

Teraz musíme doriešiť otázku veľkosti sily. Prenásobíme gradient väzby funkciou λ tak, aby mal veľkosť práve takú, akú má normálová zložka sily. λ môže byť samozrejme funkciou polohy a sama o sebe nemá žiadny fyzikálny význam. Keďže máme ale tri neznáme funkcie pre súradnice, tri pohybové rovnice a jednu rovnicu väzby, teda dokopy štyri rovnice, potrebujeme ešte jednu neznámu funkciu, aby bola sústava jednoznačne riešiteľná. Práve funkcia λ je našou štvrtou neznámou funkciou.

Keď už vieme, ako by mala väzbová sila vyzerať, môžeme do rovnice

$$m\ddot{x}_i = F_i + R_i$$

dosadiť za R_i gradient väzby prenásobený neznámou skalárnou funkciou λ, čím dostaneme sústavu rovníc

$$m\ddot{x}_i = F_i + \lambda\frac{\partial f}{\partial x_i}\,.$$

Túto sústavu rovníc spolu s väzbovou rovnicou budeme označovať Lagrangeove rovnice prvého druhu. Počet neznámych je teraz rovnaký ako počet rovníc, teda sústava je riešiteľná. Ak nie analyticky, tak aspoň numericky. Riešenie týchto rovníc ale nie je nič priamočiare, čo by ste spravili bez zaváhania a na ničom sa nezasekli. Existuje ale návod, ktorý funguje pre riešenie tejto sústavy rovníc. Na príklade guličky kĺzajúcej sa po guli z predchádzajúcej série si ukážeme, ako sa takéto rovnice riešia.

Gulička na guli

Sformulujme si teda odznova zadanie. Na vrchole gule sa nachádza gulička veľmi malých rozmerov (môžeme ju teda považovať za hmotný bod). Po udelení ľubovoľne malého impulzu sa gulička začne zošmykovať smerom nadol bez trenia (gulička sa teda nekotúľa). Otázka znie, v akej výške nad povrchom, na ktorom je veľká guľa umiestnená, sa malá gulička od veľkej gule oddelí.

Znova nám základná fyzikálna intuícia povie, že nezávisí na tom, po ktorom „poludníku“ sa gulička bude pohybovať, čo nám umožní úlohu riešiť v dvoch rozmeroch, teda ako bod zošmykujúci sa po kruhu. Naša väzba bude teda kružnica. Môžeme si všimnúť, že nastane čas, keď sa gulička od gule oddelí. Čo môžeme povedať o väzbovej sile v tomto okamihu? Keďže sa jedná o bod, kedy sa gulička od svojej väzby oddelí, zrejme na ňu väzbová sila v tom okamihu prestane pôsobiť. Tento poznatok si zapamätáme, pretože sa nám bude hodiť.

Nech má guľa polomer r. Teraz vieme jednoducho zostaviť rovnicu väzby

$$f = x^2 + y^2 - r^2 = 0\,.$$

[1] Na našej matematickej úrovni sa budeme tváriť, že operátor gradient aplikujeme *vždy* len na skalárnu funkciu a následne dostaneme vektorovú funkciu.

Následne spočítame postupne obe parciálne derivácie tejto rovnice a zostavíme Lagrangeove rovnice prvého druhu. Musíme ale pamätať aj na to, že v smere osy y pôsobí na guličku aj gravitačná sila. Ak má gulička hmotnosť m, budú rovnice vyzerať takto

$$m\ddot{x} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 2x\lambda\,,$$
$$m\ddot{y} = -mg + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = -mg + 2y\lambda\,.$$

Teraz prichádza časť, keď musíme použiť prvý trik. Je užitočné si ho zapamätať, lebo sa používa vždy pri podobných príkladoch. Trikom je použiť druhú časovú deriváciu rovnice väzby. V tomto okamihu odporúčam všetkým „Studentom Pilným“, aby si to, ako aj ďalšie kroky, sami skúsili niekde na papieri vedľa. Ja uvediem pre vašu kontrolu prvú deriváciu

$$\dot{f} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0\,,$$

ako aj pre nás potrebnú druhú deriváciu

$$\ddot{f} = 2\dot{x}^2 + 2x\ddot{x} + 2\dot{y}^2 + 2y\ddot{y} = 0\,.$$

Do tejto dvakrát zderivovanej rovnice väzby dosadíme za $\ddot{x}$ a $\ddot{y}$ vyjadrenie týchto veličín z Lagrangeovych rovníc. Ďalej za súčet kvadrátov prvých derivácií súradníc dosadíme kvadrát rýchlosti

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2\,.$$

Potom s využitím väzbovej podmienky $x^2 + y^2 = r^2$ vyjadríme z rovnic vyššie väzbovú silu

$$\lambda = \frac{m\left(gy - v^2\right)}{2r^2}\,.$$

Druhý trik, ktorý použijeme, je zákon zachovania mechanickej energie. Teda súčet kinetickej a polohovej energie guličky položíme rovný počiatočnej energii.

$$mgr = \frac{1}{2}mv^2 + mgy\,.$$

Z tohto vyjadríme v^2, dosadením do predchádzajúcej rovnice pre λ dostávame

$$\lambda = \frac{mg\left(3y - 2r\right)}{2r^2}\,.$$

Následne vidíme, že väzbová sila bude nulová a gulička sa oddelí vo výške (nad stredom gule)

$$y = \frac{2}{3}r\,.$$

Čo je presne ten istý výsledok, ktorý by ste dostali pri použití klasického rozkladu síl.

Zákon zachovania energie

Na záver som si ešte pripravil pre čitateľov seriálu malú ukážku, ako tento matematický konštrukt väzieb vystihuje, ba dokonca až implikuje tak fundamentálnu fyzikálnu skutočnosť, akou je zákon zachovania energie. Ukážeme si to v dvoch rozmeroch, postup v trojrozmernom priestore je úplne analogický.

Vezmime Lagrangeove rovnice prvého druhu pre jeden hmotný bod v gravitačnom poli podrobený väzbe U.

$$m\ddot{x} = \lambda \frac{\partial U}{\partial x}\,,$$
$$m\ddot{y} = -mg + \lambda \frac{\partial U}{\partial y}\,.$$

Znova si pomôžeme tak, že použijeme trik. A to taký, že prenásobíme prvú rovnicu $\dot{x}$ a druhú $\dot{y}$. Následne rovnice sčítame, čím dostaneme rovnicu

$$m\left(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}\right) = -mg\dot{y} + \lambda \left(\frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y}\right)\,.$$

Ďalej spravíme trik, ktorý spočíva v tom, že celú ľavú stranu zapíšeme ako časovú deriváciu nejakej inej funkcie (schválne si skúste spočítať deriváciu podľa času, tak ako je to v rovnici (1) na ľavej strane, a uvidíte, že dostanete to, čo máme na ľavej strane v predchádzajúcej rovnici). Pravý člen pravej strany zapíšeme ako úplnú časovú deriváciu U prenásobenú λ, pre funkciu dvoch premenných $f(x(t), y(t))$ totiž platí

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\,.$$

Člen $-mg\dot{y}$ sa tiež ľahko zapíše ako časová derivácia, dostaneme teda

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(mgy\right) + \lambda\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}\,. \tag{1}$$

My ale vieme, že rovnica väzby je $U = 0$. Potom derivácia takejto väzby musí mať tiež hodnotu nula. Ak na zvyšné dva členy aplikujeme obrátene pravidlo pre deriváciu súčtu funkcií, dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + mgy\right) = 0\,.$$

Po preintegrovaní rovnice podľa času

$$\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + mgy = \mathrm{konst}\,,$$
$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = \mathrm{konst}\,.$$

Čo je samozrejme zákon zachovania energie ako ho poznáme.

Dúfam, že táto séria seriálu vám po minulej opakovacej sérii dala niečo nové, čo jedného dňa vyhodnotíte ako užitočné. Ak si prerátate príklady k seriálu, mali by ste si vďaka nim upevniť dnes nadobudnuté vedomosti. Chcel by som vás ale poprosiť, aby ste do vypracovaných úloh napísali spätnú väzbu na seriál, a to najmä v prípade, ak niečo nebolo vysvetlené dostatočne, prípadne sa vám zdá byť niečo nesprávne.