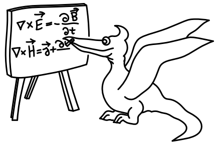

Seriál: Keplerovy zákony

Keď na začiatku 17. storočia Johannes Kepler sformuloval svoje zákony o obehoch planét okolo Slnka, dal svetu doposiaľ najlepší model Slnečnej sústavy. Popísal v ňom nielen to, po akých dráhach sa jednotlivé planéty pohybujú, ale aj ako rýchlo sa pohybujú v konkrétnom čase, teda v konkrétnej polohe voči Slnku. Kepler ale nepodal žiadne kvalitatívne vysvetlenie, prečo je to tak. Jeho zákony vychádzali čisto z napozorovaných dát. Príčinu tohto pohybu, gravitačnú silu, „objavil“ a fyzikálne popísal až o polstoročie neskôr Isaac Newton. Ten následne použitím rafinovanej starogréckej geometrie dokázal, že Keplerove zákony priamo plynú z jeho vlastných pohybových zákonov a zákona gravitácie.

Použitím silnejšieho matematického aparátu a niektorých výsledkov teoretickej mechaniky (ku ktorým sme sa už stihli dopracovať v tomto seriáli) sa dajú Keplerove zákony odvodiť pomerne rýchlym spôsobom, navyše dva z nich vo všeobecnejšom a užitočnejšom tvare. Pustime sa teda do toho!

Keplerove zákony

Na začiatok si pripomeňme závery z minulej časti seriálu, ktoré ste si mali možnosť overiť a dôkladne sa s nimi zoznámiť v minulej seriálovej úlohe. Majme teda lagrangián telesa pohybujúceho sa v rovine v sféricky symetrickom silovom poli s potenciálom $V(r)$.

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \right) - V(r)\,,$$

kde kvôli symetrii úlohy je rozumné použitie radiálne symetrických polárnych súradníc.

Ďalej sme z integrálov pohybu tohto lagrangiánu našli diferenciálnu rovnicu pre súradnicu r v závislosti na celkovej energii E a momente hybnosti telesa l.

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m} \left(E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2} \right)\,,$$

Riešenie takejto rovnice analyticky je možné, avšak len v prípade „jednoduchého“ potenciálu a len ako funkcia $t(r)$, ktorej invertovanie je náročné, prípadne nemožné. Dokážeme ale nájsť tvar trajektórie nášho telesa a to za použitia triku – takzvaného Binetovho vzorca. To, prečo $u(\varphi)$ vyhovujúce Binetovmu vzorcu rieši našu rovnicu, si môžte za bodovú odmenu rozmyslieť (viď zadanie seriálovej úlohy). Trik spočíva v tom, že vieme nájsť riešenie nie pre funkciu $r(\varphi)$, ale pre funkciu $u(\varphi)$, kde $u = r^{-1}$. Postup spočíva jednoducho v tom, že do Binetovho vzorca, ktorý je

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\varphi^2} + u = -\frac{m}{l^2} \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}u}\,,$$

dosadíme potenciál a dostaneme diferenciálnu rovnicu pre u, ktorú vyriešime a určíme funkciu $r(\varphi)$. V našom prípade sa jedná o štandardný potenciál gravitačného poľa $V(r) = -GMm/r$, kde G je gravitačná konštanta, M hmotnosť centrálneho telesa a m hmotnosť testovacieho telesa pohybujúceho sa v tomto potenciáli. Tento technický krok necháme na vás, niektorí z vás si precvičia počítanie diferenciálnych rovníc, iní prácu s Wolframom. Každý si snáď z toho niečo odnesie. Výsledkom je

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi)}\,,$$

kde e je integračná konštanta a p je prevrátená hodnota pravej strany Binetovho vzorca

$$p = \frac{l^2}{GMm^2}\,.$$

Tento výsledok má fundamentálny obsah, nakoľko sme dostali všeobecnú rovnicu pre kužeľosečky v polárnom tvare s počiatkom v ohnisku. Pre rôzne hodnoty parametra e (o ktorom ste už určite mnohokrát počuli, jedná sa o numerickú excentricitu) dostaneme rôzne typy kužeľosečiek. Rýchlo si vieme overiť aspoň jednu z nich. Ak je $e = 0$, potom je $r(\varphi) = \mathrm{konst}$, z čoho vyplýva, že sa jedná o množinu bodov s rovnakou vzdialenosťou od počiatku, čo je presne definícia kružnice.

Pre $e \in (0, 1)$ ide o elipsu. To si predstaviť úplne nevieme, ale dá sa vidieť, že v tomto prípade závisí r na φ. Extrémny prípad nastane, keď $e = 1$. Vtedy pre istý uhol φ dostaneme v menovateli nulu, a funkcia bude divergovať - rastie do nekonečna. To je presne prípad, kedy sa jedná o parabolu, tj. keď teleso, ktoré má v nekonečne nulovú rýchlosť, priletí k Slnku a znova odletí do „nekonečna“, kde „zastane“. Pre väčšie hodnoty excentricity sa bude jednať o hyperbolickú dráhu.

Týmto sa nám podarilo dokázať prvý Keplerov zákon tak, ako bol formulovaný: „Planéty sa pohybujú po elipsách, v ktorých ohnisku sa nachádza Slnko.“ Zároveň sme ale ukázali, že vieme sformulovať oveľa všeobecnejšie tvrdenie o pohyboch hmotných telies v centrálnom gravitačnom poli, a že prípad, ktorým sú planéty v našej Slnečnej sústave, je len jedna z možností, ako sa nebeské telesá môžu pohybovať. (Dobrým príkladom pohybu po napríklad hyperbolických dráhach sú kométy, ktoré sa k Slnku dostanú len raz, prípadne telesá mimo slnečnej sústavy, ktoré sa náhodou jednorázovo „zatúlajú k nám“).

Určite nepočujete prvýkrát, že druhý zákon je len geometrickou interpretáciou zákonu zachovania momentu hybnosti. Pripomeňme si pôvodnú Keplerovu formuláciu: „Spojnica Slnka a planéty opíše za rovnaké časové intervaly rovnako veľké plochy.“

Chceme vlastne ukázať, že plocha opísaná za nejaký čas (nazvime si túto veličinu plošná rýchlosť) je konštantná. Nech za nejaký krátky časový úsek $\mathrm{d}t$ opíše spojnica planéty a Slnka plochu $\mathrm{d}S$. Keď je tento čas krátky, planéta vo vzdialenosti r sa posunie o uhol $\mathrm{d}\varphi$, ktorý bude malý. Keďže bude uhol malý, môžeme predpokladať, že $\sin \mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}\varphi$ a $r(t) \approx r(t + \mathrm{d}t)$, preto plochu trojuholníka, ktorú za čas $\mathrm{d}t$ opíše spojnica planéty a Slnka vieme vyjadriť ako polovicu súčinu dĺžok dvoch jeho strán a sínusu uhla nimi zovretého

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{2} r^2 \mathrm{d}\varphi\,.$$

Po predelení výrazu časovým úsekom $\mathrm{d}t$ a za predpokladu, že daný časový úsek a následne aj uhol, o ktorý sa posunula planéta, a plocha, ktorú opísala spojnica, sú veľmi malé (formálne by sme počítali limitu, kde tieto premenné idú do nuly), môžeme zlomky $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ a $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$ vnímať ako časové derivácie S a φ. Dostali sme teda vzťah medzi plošnou rýchlosťou a uhlovou rýchlosťou.

Ďalej si stačí spomenúť, že jeden z integrálov pohybu nášho lagrangiánu bol vlastne zákon zachovania momentu hybnosti l v tvare

$$mr^2\dot{\varphi} = \mathrm{konst} = l\,.$$

Vyjadrením uhlovej rýchlosti z tohto vzťahu a dosadením do vzťahu pre plošnú rýchlosť dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{l}{2m} \,.$$

Vidíme, že plošná rýchlosť je konštantou, čím sme dokázali platnosť druhého Keplerovho zákona. Ak si spomenieme, aká je definícia momentu hybnosti, zistíme, že plošná rýchlosť vôbec nezávisí na hmotnosti planéty, ale len na jej polohe a rýchlosti.

Teraz sme už len na skok od odvodenia (dôkazu) tretieho Keplerovho zákona. Dostaneme ho jednoducho tak, že preintegrujeme rovnicu pre plošnú rýchlosť cez celú periódu obehu planéty

$$\mathrm{d}S = \frac{l}{2m}\mathrm{d}t \,,$$

$$S = \frac{l}{2m}T \,,$$

kde T je perióda obehu planéty okolo Slnka. Dosadíme za $S = \pi ab$, čo je vzorec pre výpočet plochy elipsy. Následne dosadíme známy vzťah pre malú poloos elipsy za znalosti excentricity

$$b = a\sqrt{1-e^2} \,.$$

Celú rovnicu umocníme, aby sme ju zbavili odmocnín, a dostaneme

$$T^2 = \frac{4\pi^2 m^2 a^4}{l^2}\left(1-e^2\right) \,.$$

Výraz je už skoro v tvare, ktorý možno poznáte z internetu alebo inej literatúry. Stačí len vhodne nahradiť niektoré konštanty. Ak výraz pre konštantu p skombinujeme so vzťahom

$$p = a\left(1-e^2\right) \,,$$

ktorý vieme vypozorovať z vlastností elipsy, dostaneme

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}a^3 \,.$$

Z čoho je zrejmé Keplerovo presne 400 rokov staré tvrdenie: „Pomer druhej mocniny periódy a tretej mocniny jej veľkej polosy je pre všetky planéty konštanta." Nám sa ale podarilo zistiť aj to, že táto konštanta je nejakým násobkom hmotnosti nášho Slnka, prípadne iného telesa (telies) v ktorého/ých gravitačnom poli sa pohybujeme. Táto verzia tretieho Keplerovho zákona sa dá použiť na výpočty, ktoré by bez neho boli omnoho náročnejšie a využíva nenáročný stredoškolský matematický aparát. Ukážeme si to na nasledujúcom príklade. Ak by sa zrazu Mesiac voči Zemi zastavil (prestal by okolo nej obiehať), ako dlho by trvalo, kým by Mesiac spadol na Zem, alebo, lepšie povedané, sa zrazil zo Zemou?

Príklad: Armageddon

Chceme teda určiť čas, za ktorý sa zrazia dva telesá o „porovnateľných" hmotnostiach (Zem je približne 81-krát ťažšia ako Mesiac). Riešenie absolventa matfyzu by vyzeralo asi tak, že by si zostavil diferenciálnu rovnicu, ktorá by tento pohyb popisovala, a následne by ju numericky vyriešil, pretože by zistil, že analyticky to nejde.

My sa ale pozrieme na iný postup, a to použitie tretieho Keplerovho zákona. Ak si predstavíme, že Mesiac a Zem by boli hmotné body a Mesiac by nepadal úplne priamo na Zem, ale mal by nejakú infinitezimálne malú počiatočnú rýchlosť kolmú na spojnicu zo Zemou, tak by sa pri svojom najväčšom priblížení telesá nezrazili, ale jedno by obiehalo okolo druhého po elipse, ktorá by mala veľmi podlhovastý tvar. (V tomto myšlienkovom experimente môžeme pohyb Zeme zanedbať a predpokladať, že je taká ťažká, že sa vôbec nebude hýbať). Pre takúto elipsu samozrejme bude platiť tretí Keplerov zákon. Pri nulovej počiatočnej rýchlosti sa bude Mesiac pohybovať po priamke. Jeho „perióda obehu“ je potom dvojnásobok času, za ktorý sa zrazí zo Zemou.

Ďalej je dôležité si uvedomiť, čo je „veľká poloos“ jeho trajektórie. Vieme, že veľká poloos je vlastne polovica najdlhšej tetivy, ktorú dokážeme v elipse zostrojiť. V našom prípade „elipsy extrémne sploštenej až na úsečku“ je dĺžkou najdlhšej tetivy práve dĺžka tejto úsečky. Veľká poloos je teda rovná jej polovici, to v našom prípade znamená polovici vzdialenosti Zem-Mesiac.

Posledné dôležité čo si treba uvedomiť je, čo budeme dosadzovať za hmotnosť M. Túto formu tretieho Keplerovho zákona sme formulovali pre potenciálové pole budené jedným veľmi hmotným telesom, ktorého rozmery sú vzhľadom na rozmery v úlohe zanedbatelné. V sústave Zem-Mesiac (jedná sa o jednorozmerný problém) je toto pole generované hmotnosťou Zeme a Mesiaca. Oba objekty sa budú pohybovať, akoby ich hmotnosť bola zanedbateľná a v ich ťažisku sedel hmotný bod s hmotnosťou rovnou súčtu ich hmotností.

Teraz ostáva len dosadiť hmotnosti Mesiaca a Zeme a vzdialenosť Zeme od Mesiaca (vezmeme strednú) a dostaneme, že Mesiacu by spadnúť na Zem trvalo približne 4,9 dňa. V príklade sme samozrejme počítali s nulovými rozmermi telies, v skutočnosti by sa ale samozrejme zrazili trochu skôr. Dá sa ale vidieť, že to, že trasa bola o približne 10 000 km kratšia, nám nevadí, nakoľko v posledných chvíľach pred zrážkou sa pohybovali telesá veľmi rýchlo a väčšinu času trvalo Mesiacu (ale trochu aj Zemi) prejsť prvé časti trajektórie.

Aj keď sa seriál ako celok blíži ku koncu, stále máme pred sebou dve dôležité kapitoly. Prvú z nich stihneme ešte dnes.

Problém dvoch telies

Doteraz sme riešili, čo sa deje, keď sa teleso hýbe v gravitačnom poli toho druhého, nehybného. Na záver sme si spočítali veľmi špecifický prípad dvoch telies, ktoré síce mali „porovnateľnú hmotnosť“, ale hýbali sa po jednej priamke s nulovou počiatočnou rýchlosťou. Zároveň sme k riešeniu použili kanón vo forme 3. Keplerovho zákona, ktorý z inak náročného príkladu spravil príklad stredoškolský. Teraz sa ale poďme pozrieť na to, ako popísať pohyb dvoch telies pre ľubovoľné počiatočné hodnoty rýchlostí a ľubovoľný pomer rýchlostí.

Celý trik riešenia problému dvoch telies tak, aby to bolo pre nás pohodlné, spočíva ako pri všetkých príkladoch v analytickej mechanike v správnom zavedení súradníc. Naším cieľom bude využiť najpoužívanejší postup matematiky, a síce previesť náš problém na už známy prípad. Máme vyriešené, ako sa správa jedno teleso popísané polohovým vektorom r v silovom poli so sféricky symetrickým potenciálom (závislým len na r a nie na priestorových uhloch).

Ťažisková sústava sa vyznačuje vlasnosťou, že celková hybnosť (v našom prípade oboch) telies v tejto sústave je nulová. Ak poznáme pohybové rovnice jedného z dvoch telies v ich ťažiskovej sústave a hmotnosť druhého telesa, vieme určiť pohybové rovnice druhého telesa. Toto je veľmi zaujímavá vlastnosť, a preto sa pozrieme, ako by vyzeral lagrangián dvoch hmotných bodov v ich ťažiskovej sústave.

Nech majú na začiatku body polohové vektory $\boldsymbol{r}_1$ a $\boldsymbol{r}_2$. Zavedieme si teda polohový vektor $\boldsymbol{r}$ ako vektor ich vzájomnej polohy (polohy druhého telesa voči prvému) a vektor $\boldsymbol{R}$ ako polohový vektor ich ťažiska

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 \,,$$
$$\boldsymbol{R} = \frac{m_1 \boldsymbol{r}_1 + m_2 \boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2}$$

kde prvý vzťah je zrejmý a druhý vyplýva z definície ťažiska, pričom usilovnému čitateľovi, ktorý to hneď nevidí, odporúčam si to overiť.

Lagrangián si vyjadríme najprv v premenných r_1 a r_2, pod ktorými rozumieme veľkosti vektorov $\boldsymbol{r}_1$ a $\boldsymbol{r}_2$. Postupovať stačí intuitívne, bude sa jednať o kinetickú energiu prvého hmotného bodu v súčte s kinetickou energiou druhého hmotného bodu a vzájomnou potenciálnou energiou týchto bodov, ktorá je z Newtonovho gravitačného zákona rovná

$$V(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = -\frac{G m_1 m_2}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|} \,.$$

Lagrangián bude potom vyzerať

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{\boldsymbol{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\boldsymbol{r}}_2^2 + \frac{G m_1 m_2}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|} \,.$$

Teraz si vyjadríme nové premenné ako funkcie tých starých. Po pár úpravách dostávame

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \boldsymbol{r} \,,$$
$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \boldsymbol{r} \,.$$

Po dosadení našich nových premenných, vzájomnej polohy objektov a polohového vektoru ťažiska dostávame lagrangián v tvare

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\boldsymbol{R}}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\boldsymbol{r}}^2 + \frac{G m_1 m_2}{|\boldsymbol{r}|} \,.$$

Na začiatku sme sa rozhodli použiť vyjadrenie v ťažiskovom systéme, lebo sme dúfali v nejaké zjednodušenie lagrangiánu. Naše želania sa opierali o to, že ťažisková sústava má isté špeciálne vlasnosti a preto by mohol lagrangián v nej vyzerať jednoduchšie. Jednou z týchto vlastností v tomto prípade bude rýchlosť ťažiska $\dot{\boldsymbol{R}}$ nulová a celý tento člen z lagrangiánu zmizne. Dostávame teda

$$L = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\boldsymbol{r}}^2 + \frac{G m_1 m_2}{|\boldsymbol{r}|} \,,$$

čo sa nápadne podobá na pohyb jedného hmotného bodu v centrálnom poli. Už vieme, že tento pohyb sa odohráva v jednej rovine. Preto polohový vektor $\boldsymbol{r}$ nahradíme jeho súradnicovou reprezentáciou v polárnych súradniciach. Zároveň zavedieme pre zjednodušenie zápisu premennú s názvom redukovaná hmotnosť

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \,,$$

ktorú môžeme chápať ako „hmotnosť voči ťažisku“ čo znie mierne zavádzajúco. Zo skúsenosti viem, že niektorým ľuďom príde táto interpretácia užitočná a iným nie (ak patríte medzi nich, tak nato hneď teraz zabudnite). Potom dostane lagrangián tvar

$$L = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + \frac{G\left(m_1 + m_2\right)\mu}{r}\,,$$

čo už je štandardný tvar lagrangiánu až na konštanty, ktorý vieme riešiť z časti o pohybu hmotnej častice v gravitačnom poli. Podarilo sa nám teda previesť problém dvoch telies na už predtým vyriešený problém, čím ho môžeme taktiež považovať za vyriešený.

Problémom dvoch telies sme zakončili hlavnú časť teoretickej mechaniky. Ak ste to vydržali až sem, ste dobrí. Ak ste to vydržali až sem a máte pocit, že tomu, čo ste doteraz a aj dnes čítali, celkom rozumiete, tak ste veľmi dobrí a vaše vedomosti vzhľadom na vaše oficiálne dosiahnuté vzdelanie sú vysoko nadpriemerné, štatisticky povedané neobvyklé. Toto vám tu teraz píšem, pretože si tú pochvalu zaslúžite a zároveň dúfam, že vás tým možno trochu motivujem neprestať v mimoškolských aktivitách, ktoré robíte.

Rovnako ako vždy v prípade otázok k seriálovým úlohám alebo textu seriálu nám neváhajte napísať mail, zároveň budeme radi za spätnú väzbu. Doteraz vždy prišla s riešením úlohy, tak v tom pokojne pokračujte ďalej touto cestou.

Zároveň vás chceme v závere znova trochu navnadiť k ďalšiemu pokračovaniu seriálu, v ktorom si všetko čo sme si doteraz povedali zopakujeme a zároveň si ukážeme takzvaný variačný princíp, čo je niečo, čo mnohí ľudia označujú za najelegantnejšiu formuláciu celej fyziky.

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.