

## Úvodem

Milé řešitelky, milí řešitelé,

již polovina 32. ročníku je za námi, což znamená, že ti nejlepší z vás mohou v nejbližší době očekávat ve svých schránkách pozvánky na jarní soustředění.

Avšak ti z vás, kteří objevili FYKOS teprve teď nebo se vám moc nedařilo, nezapomínejte! Již řešením této série si můžete zajistit místo na podzimním soustředění, které bude určitě skvělé!

Ve čtvrté sérii se budeme zabývat zejména mechanikou, ale také si vyzkoušíme, jak moc dokáže papír stínit zvuk. V seriálu si povíme něco o Taylorově rozvoji a úlohách, které díky němu dokážeme řešit.

Únor je nabitý nejrůznějšími akcemi, za zmínku jistě stojí Fyziklání 2019, které se uskuteční v pátek 15. 2. v Top Hotelu Praha. Pozor, registrace se uzavírá již 6. 2.! Pokud se vám nechce jezdit do Prahy jen „na otočku“, máme pro vás v rámci Fyziklání připravený doprovodný program, který začíná 14. 2. Jedním Dnem s Fyzikou na MFF UK v Praze. V sobotu a v neděli po Fyziklání můžete navštívit řadu zajímavých míst a pracovišť nejen v rámci MFF UK.

Závěrem bychom vám rádi jménem všech organizátorů popřáli šťastný vstup do roku 2019, ať se vám daří nejen ve škole, ale i v osobním životě. Budeme se těšit na viděnou!

vaši **Organizátoři**



## Zadání IV. série

*Termín uploadu: 12. 2. 2019 23.59*

*Termín odeslání: 11. 2. 2019*

### Úloha IV.1 ... kostka se vzduchem

3 body

Mějme dutou kostku s hranou délky  $a = 20$  cm naplněnou vzduchem s teplotou  $t_0 = 20$  °C, což je zároveň teplota okolí kostky. Vzduch uvnitř kostky ochladíme na  $t_1 = 5$  °C. Jaká síla bude působit na každou stěnu kostky? Kostka při ochlazení vzduchu v ní nemění svůj objem. Tlak v okolí kostky je  $p_0 = 101,3$  kPa.

### Úloha IV.2 ... utrhne se

3 body

Máme (nehmotný) provázek délky  $l$  a na jeho konci kuličku (hmotný bod) s hmotností  $m$ . Víme, že maximální tíha, co unese, je síla  $F = mg$ , kde  $g$  je místní tíhové zrychlení, ale už nic víc. Provázek upevníme a kuličku budeme držet ve stejné výšce, jako je místo upevnění, ve vzdálenosti délky provázku od druhého konce provázku, ale tak, abychom ho nenapínali. Kuličku uvolníme a ta se začne vlivem tíhového zrychlení pohybovat. Pod jakým úhlem provázku vůči svislé rovině se provázek přetrhne?

### Úloha IV.3 ... levitující

6 bodů

Matěj má rád levitující věci, a tak si pořídil nekonečnou nevodivou nabitou vodorovnou rovinu s plošnou nábojovou hustotou  $\sigma$ . Poté nad ní umístil míček o hmotnosti  $m$  nabitý nábojem  $q$ .

Vypočítejte, pro jaké hodnoty  $\sigma$  může míček vůbec nad deskou levitovat. V jaké výšce  $h$  se pak může vznášet? Uvažujte konstantní tíhové zrychlení  $g$ .

#### Úloha IV.4 ... trampolína

7 bodů

Dva hmotné body skákaly na trampolíně do výšky  $h_0 = 2$  m. Ve chvíli, kdy oba byly v nejnižším možném místě trajektorie (výchylka  $y = 160$  cm), jeden z nich záhadně zmizel. Do jaké nejvyšší výšky byl druhý vymrštěn? Kruhová trampolína má obvod  $o = 10$  m a pruží díky  $N = 42$  pružinám s tuhostí  $k = 1720$  N·m<sup>-1</sup>. Trampolínu modelujeme  $N$  pružinami rozmístěnými rovnoměrně a spojenými ve středu. Hmotnost zmizelého hmotného bodu je  $M = 400$  kg.

#### Úloha IV.5 ... frisbee

9 bodů

Tenký homogenní disk obíhá na vodorovné podložce po kružnici s poloměrem  $R$ . Velikost rychlosti těžiště disku je  $v$ . Určete úhel  $\alpha$  mezi rovinou disku a svislým směrem. Tření mezi diskem a podložkou je dostatečné. Poloměr disku je řádově menší než  $R$ .

#### Úloha IV.P ... V-1 ve vesmíru

10 bodů

Mezihvězdný prostor není prázdný, nýbrž obsahuje nepatrné množství hmoty. Uvažujte jen vodík, potřebnou hustotu si vyhledejte. Mohla by existovat kosmická loď, jež by „nasávala“ vodík před sebou a využívala energii z něj? Jak rychlá a velká by musela být, aby udržela termojadernou fúzi jen z přijatého vodíku? Jaké jiné překážky realizace je rozumné uvažovat?

#### Úloha IV.E ... papírová izolační

12 bodů

Změrte, jak moc dokáže papír stínit zvuk. K měření stačí použít např. mobilní telefon jako generátor zvuku a mikrofon v počítači jako detektor (Audacity). Použijte papíry různých druhů a tvarů.

#### Úloha IV.S ... lagrangeovská

10 bodů

V závěre seriálu ste si určite všimli Lagrangian a diferenciálnu rovnicu, ktoré akoby „spadli z neba“. To nie je vôbec náhoda, veľkou časťou tejto seriálovej úlohy bude tieto dve rovnice odvodiť.

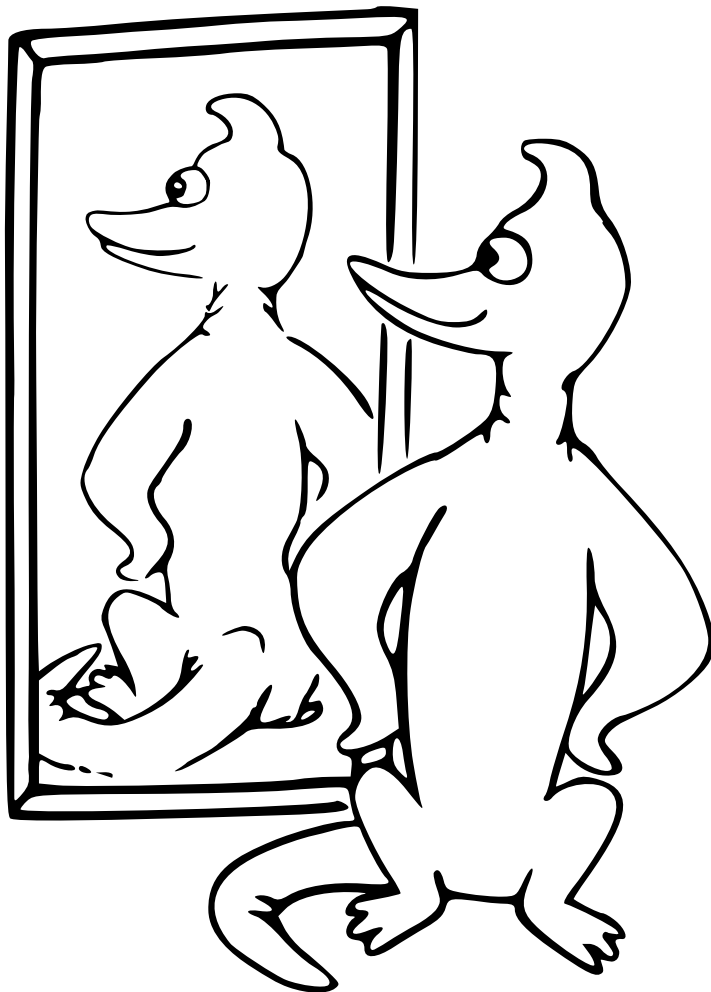
1. Ukážte, že ak máme pohyb častice v ľubovoľnom centrálnom poli, teda v poli, kde potenciál závisí len na vzdialenosti, bude sa častica zaručene pohybovať len v rovine.

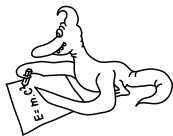
*Návod* Zostavte Lagrangeove rovnice II. druhu pre túto situáciu, použite pri tom vhodné zovšeobecnené súradnice. Následne bez ujmy na všeobecnosti položte súradnicu  $\theta = \pi/2$  a počiatočnú rýchlosť v smere tejto súradnice nulovú. Zamyslite sa a vysvetlite, prečo je takáto voľba v poriadku a nestratíme pri nej žiadne riešenie.

2. Zostavte Lagrangian pre hmotný bod pohybujúci sa v rovine v centrálnom poli. Mali by ste dostať ten istý, ako je uvedený v závěre seriálu. Pre tento Lagrangian následne nájdite všetky intergály pohybu a pomocou nich nájdite diferenciálnu rovnicu prvého rádu pre premennú  $r$ . Pre vašu kontrolu, mala by vám vyjsť rovnako ako na konci seriálu.

3. Zamyslite sa, ako určiť uhlovú vzdialenosť medzi dvoma bodmi na sfére, ak máte zadané ich sférické súradnice. Ukážte to napríklad pre hviezdy Betelgeuze a Sírius, ktorých súradnice si nájdite.

*Pomôcka* Táto úloha sa dá jednoducho vyriešiť aj bez znalosti sférickej trigonometrie.





## Řešení III. série

## Úloha III.1 ... zlevněné banány

3 body; průměr 2,84; řešilo 49 studentů

Mikuláš v obchodě vložil několik banánů do igelitového sáčku. Před jejich zvážení ho napadlo, že kdyby pytlík naplnil místo vzduchu heliem, budou banány stát o něco méně. Helium Mikuláš koupil ve slevě za jednu korunu na litr při standardním tlaku. Jaká musí být cena banánů, aby se mu tento „podvod“ vyplatil?

*Bonus* Naleznete plyn, u kterého se vyplatí plnit jím sáček při ceně banánů 30 korun na kilogram. Nezapomeňte citovat zdroje ceny daného plynu.

*Nad čím přemýšlíte vy, když v obchodě vážíte banány? (Mikuláš)*

Keď vrecúško s banánmi naplníme héliom, bude naň pôsobiť vztlaková sila, ktorá je podľa Archimedovho zákona rovná  $F_{vz} = \rho V g$ , pričom sa počíta s hustotou tekutiny  $\rho$ , v ktorej je objekt ponorený, a objemom ponorenej časti objektu  $V$ . Zároveň pôsobí tiažová sila na hélium samotné, ktorá ho „ťahá dole“, preto platí

$$\Delta m_B g = (\rho_{vzd} - \rho_{He}) V g,$$

kde  $\Delta m_B$  je zmena váhy banánov,  $\rho_{vzd}$  a  $\rho_{He}$  sú hustoty vzduchu a hélia a  $V$  je objem vo vrecúšku, ktorý sme vyplnili héliom. Tento objem vieme vypočítať ako podiel hmotnosti použitého hélia a hustoty hélia

$$V = \frac{m_{He}}{\rho_{He}},$$

čiže po vykrátení  $g$  a dosadení  $V$  máme vzťah

$$\Delta m_B = \left( \frac{\rho_{vzd}}{\rho_{He}} - 1 \right) m_{He}.$$

Keďže Mikuláš chce, aby sa mu podvod oplatil, cena použitého hélia musí byť minimálne rovná ušetrené cene banánov

$$m_{He} C_{He} \leq \Delta m_B C_B,$$

kde  $C_{He}$ ,  $C_B$  sú ceny za kilogram hélia, resp. banánov. Po dosadení za  $\Delta m_B$  dostávame vzťah pre cenu banánov

$$C_B \geq \frac{C_{He}}{\frac{\rho_{vzd}}{\rho_{He}} - 1}.$$

Cenu hélia v jednotkách CZK·kg<sup>-1</sup> vypočítame z hustoty hélia a zadanej ceny hélia  $c_{He}$  v jednotkách CZK·ℓ<sup>-1</sup> ako

$$C_{He} = \frac{c_{He}}{\rho_{He}}.$$

Dosadíme do finálneho vzťahu pre cenu banánov a dostaneme

$$C_B \geq \frac{c_{He}}{\rho_{vzd} - \rho_{He}} = 900 \text{ CZK} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

Hraničná cena banánov, pri ktorej sa Mikulášovi tento podvod vyplatí je  $900 \text{ CZK}\cdot\text{kg}^{-1}$ . Táto hranica je nezávislá na množstve použitého hélia, čiže ak by sme použili viac hélia ako máme, vrecúško by sa začalo vznášať. Zbytočne by sme mrhali héliom a pani predavačke by sa to mohlo zdať podozrivé.

### Bonus

Z predchádzajúcich výpočtov vieme, že musí platiť

$$\frac{C_B}{C_P} \left( \frac{\rho_{\text{vzd}}}{\rho_P} - 1 \right) \geq 1,$$

pričom  $C_P$  je cena plynu za kilogram a  $\rho_P$  je hustota plynu. Potrebujeme nájsť taký plyn, pre ktorý sa podvod oplatí pri cene banánov  $30 \text{ CZK}\cdot\text{kg}^{-1}$ . Nájdeme si ceny<sup>1</sup> a hustoty<sup>2</sup> rôznych technických plynov a zistíme, či je niektorý z nich vyhovujúci. Samozrejme, zaujímajú nás len plyny s nižšou hustotou ako vzduch  $\rho_{\text{vzd}} = 1,2759 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ , ktoré sú bezpečné na použitie v danej situácii. Získané údaje, z ktorých sme prepočítali cenu na jeden kilogram v  $\text{CZK}\cdot\text{kg}^{-1}$  a potom dosadili do vyššie uvedených vzťahov, umiestnime do prehľadnej tabuľky 1.

Tab. 1: Tabuľka plynov

plyn	$\frac{\rho_P}{\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}}$	$\frac{C_P}{\text{CZK}\cdot\text{kg}^{-1}}$	$\frac{C_B}{C_P} \left( \frac{\rho_{\text{vzd}}}{\rho_P} - 1 \right)$
vodík	0,088 95	6 428	0,06
hélium	0,1762	5100	0,04
zemný plyn	0,7	8	3,2
acetylén	1,147	560	0,006
dusík	1,234	334	0,003

Plyn, pri ktorom sa to oplatí, je – podľa nami nájdených údajov o cenách plynov – zemný plyn, hlavne kvôli jeho nízkej cene.

**Katarína Častulíková**

katka.castulikova@fykos.cz@fykos.cz

## Úloha III.2 ... efektívni kafe

3 body; průměr 2,51; řešilo 47 studentů

Jsou dvě hodiny v noci a Jáchym si jde uvařit kafe. Na plotýnku, kterou tvoří litinový válec o poloměru  $r$  a výšce  $h$ , položí konvici s tepelnou kapacitou  $C_k$ . Konvice obsahuje vodu o objemu  $V$ , která má počáteční teplotu  $T_v$ . Zbytek soustavy má počáteční teplotu  $T_s$ . Jaká je celková účinnost (tj. poměr energie přijaté vodou ku dodané energii) ohřevu vody z její počáteční teploty na teplotu  $T = 100^\circ\text{C}$ ? Neznámé hodnoty si dohleďte v tabulkách, nebo je odhadněte. Předpokládejte, že děj proběhne tak rychle, že všechny tepelné ztráty můžeme zanedbat. Pro úplnost zadání nechtě  $T_s, T_v < T$ .

Jáchymovi došel energy drink.

<sup>1</sup>Ceny plynů převzaty z <https://www.kurzy.cz/plyn/srovnani-cen> a <https://www.messer.sk/cennik>

<sup>2</sup>Hustoty převzaty z <http://www.converter.cz/tabulky/hustota-plynu.htm>

Nechť je hustota litiny  $\rho_l$ , její měrná tepelná kapacita je  $c_l$ . Celková kapacita soustavy tak je

$$C_s = C_k + \pi r^2 h \rho_l c_l.$$

Při ohřívání vody musíme nutně ohřát i plotýnku s konvicí, k čemuž jim musíme dodat teplo

$$Q_s = C_s (T - T_s) = (C_k + \pi r^2 h \rho_l c_l) (T - T_s).$$

Obdobně pro vodu máme  $\rho_v$  a  $c_v$  a musíme jí dodat teplo

$$Q_v = V \rho_v c_v (T - T_v).$$

Účinností rozumíme poměr energie, která se využije na ohřev vody, a celkové dodané energie, tedy

$$\eta = \frac{Q_v}{Q_v + Q_s} = \frac{V \rho_v c_v (T - T_v)}{V \rho_v c_v (T - T_v) + (C_k + \pi r^2 h \rho_l c_l) (T - T_s)}.$$

Nyní už jen zbývá dosadit realistické hodnoty. Naše plotýnka má poloměr  $r = 10$  cm a výšku  $h = 2$  cm. Konvice váží 500 g a je z oceli, její tepelná kapacita tedy je  $C_k = 230 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$ . Na kafe potřebujeme  $V = 250$  ml vody. Můžeme předpokládat, že začátku má vše včetně vody teplotu  $T_v = T_s = 20^\circ\text{C}$ . Měrnou tepelnou kapacitu vody  $c_v = 4180 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$  a litiny  $c_l = 545 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$ , stejně tak jejich hustoty  $\rho_v = 1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  a  $\rho_l = 7200 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  jsme našli v tabulkách.

Dosažením hodnot do vzorce výše dostáváme odhad pro účinnost ohřevu vody  $\eta \doteq 0,28$ . Tato nadočekávaná vysoká hodnota je způsobena velkou tepelnou kapacitou vody v porovnání s kovy.

**Jáchym Bártík**

tuaki@fykos.cz@fykos.cz

### Úloha III.3 ... teplíčko v Dysonově sféře 6 bodů; průměr 5,36; řešilo 44 studentů

*Jaký poloměr by musela mít Dysonova sféra, aby obklopila hvězdu se zářivým výkonem Slunce tak, že na vnějším povrchu této sféry by byla teplota  $t = 25^\circ\text{C}$ ? Neuvažujte přítomnost atmosféry v Dysonově sféře. Dysonova sféra by měla být relativně tenká dutá struktura kulového tvaru obklopující danou hvězdu.*

*Karel má rád Dysonovy sféry.*

Ze zadání plyne, že teplota Dysonovy sféry se ustálila na konstantní teplotě  $t = 25^\circ\text{C}$ . K vyřešení úlohy nám tedy stačí analyzovat tok energie Dysonovou sférou. Předpokládáme, že Dysonova sféra je schopná pohltit veškerou energii přicházející ze Slunce. Tato energie je přenášena v podobě elektromagnetického záření. Ze zadání víme, že daná hvězda má zářivý výkon Slunce<sup>3</sup>  $L = 3,83 \cdot 10^{26} \text{ W}$ . Tento výkon je rovnoměrně vyzářen do všech směrů. Množství energie, které dopadne za jednotku času na jednotkovou plochu Dysonovy sféry je

$$\frac{L}{S} = \frac{L}{4\pi r^2},$$

kde  $S$  je plocha Dysonovy sféry a  $r$  je její poloměr. Rozdíl vnitřního a vnějšího poloměru zanedbáváme. Dysonova sféra se navenek jeví jako absolutně černé těleso, protože veškerou energii z hvězdy pohltí a navenek vyzařuje pouze tepelné záření. Podle Stefanova-Boltzmannova

<sup>3</sup>Viz např. <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/sunfact.html>.

zákona je celková intenzita  $M$  tepelného záření černého tělesa, což je celková energie vyzářená za jednotku času jednotkovou plochou zdroje záření, rovna

$$M = \sigma T^4,$$

kde  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$  je Stefanova-Boltzmannova konstanta a  $T = 298 \text{ K}$  je termodynamická teplota Dysonovy sféry.

Zářivý výkon hvězdy a výkon tepelného záření Dysonovy sféry jsou jediné zdroje záření, které musíme započítat. Přestože princip fungování Dysonovy sféry je schován v pomyslné černé skřínce, stačí nám vědět, že Dysonova sféra je schopna pohltit *veškerou* energii ze Slunce. Na druhou stranu, aby byl náš výpočet korektní, musí tepelné záření vnější plochy Dysonovy sféry navždy opustit tuto soustavu, což jsme mlčky předpokládali. Náš předpoklad byl v pořádku, neboť koule je konvexní těleso a energie vyzářovaná malou ploškou  $\Delta S$  na jejím povrchu, sféře, uniká do prázdného poloprostoru. To nám zaručuje, že Dysonova sféra neozařuje sama sebe vnějším povrchem.

Nyní konečně dejme do rovnosti energií z hvězdy, která dopadne za jednotku času na jednotkovou plochu Dysonovy sféry, a intenzitu  $M$  tepelného záření Dysonovy sféry,

$$\frac{L}{4\pi r^2} = \sigma T^4.$$

Odtud získáme hledaný poloměr  $r$  Dysonovy sféry,

$$r = \frac{1}{2T^2} \sqrt{\frac{L}{\pi\sigma}}.$$

Po číselném dosazení dostáváme, že hledaný poloměr Dysonovy sféry pro zadané podmínky je  $r = 2,61 \cdot 10^{11} \text{ m} = 1,74 \text{ au}$ .

**Václav Mikeska**

v.mikeska@fykos.cz@fykos.cz

### Úloha III.4 ... destrukce smyčky

8 bodů; průměr 6,00; řešilo 25 studentů

*Představme si měděnou smyčku o poloměru  $r$ , která je určena rovinou, na níž je kolmé magnetické pole s magnetickou indukcí  $B$ . Maximální povolené tahové napětí ve smyčce je  $\sigma_p$ . Nyní začneme měnit magnetický tok ve smyčce z původní hodnoty  $\Phi_0$  podle vztahu  $\Phi(t) = \Phi_0 + \alpha t$ , kde  $\alpha$  je kladná konstanta. Určete, za jak dlouho dosáhneme ve smyčce maximálního tahového napětí.*

*Nápověda* Napětovou sílu ve smyčce můžeme spočítat jako  $T = |BIr|$ .

*Vítek vzpomíná na AP Physics.*

Zamysleme se nad tím, co se v úloze děje. V okamžiku, kdy začneme měnit magnetický tok procházející smyčkou, se v ní začne indukovat napětí a tedy i proud. Tuto skutečnost nám popisuje Lenzův zákon, který říká, že indukovaný elektrický proud v uzavřeném obvodu má takový směr, že svým magnetickým polem působí proti změně magnetického indukčního toku, která je jeho příčinou. Systém se snaží jakoby vrátit do původního stavu, a proto má Lenzovská indukce směr opačný původnímu  $B$ . Řečí matematiky

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -\alpha.$$

Indukovaný proud ve smyčce pak určíme snadno pomocí Ohmova zákona. Označíme-li odpor smyčky jako  $R$ , pak

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{\alpha A}{\rho 2\pi r},$$

kde  $A$  je průřez smyčky a  $\rho$  rezistivita materiálu. Je zřejmé, že  $T$  závisí na  $B$ , a to závisí na čase. Pro moment  $t_0$ , kdy dosáhneme maximálního tahového napětí, musí platit následující podmínka

$$\sigma_p = \frac{T(t_0)}{A} = \frac{B(t_0)Ir}{A} = \frac{B(t_0)\alpha}{2\rho\pi}.$$

Dále musíme určit  $B(t_0)$ , z definice<sup>4</sup> získáme

$$B(t_0) = \frac{\Phi(t_0)}{\pi r^2} = \frac{\Phi_0 + \alpha t_0}{\pi r^2}.$$

Nyní stačí dosadit za  $B(t_0)$  do vztahu pro tahové napětí, to pak přejde na

$$\sigma_p = \frac{(\Phi_0 + \alpha t_0)\alpha}{2\rho\pi^2 r^2}.$$

Cílem úlohy bylo zjistit, za jaký čas se toto stane. Proto ze vztahu výše vyjádříme  $t_0$ , finální výraz pak je

$$t_0 = \frac{2\pi^2 \rho r^2 \sigma_p}{\alpha^2} - \frac{\Phi_0}{\alpha}.$$

V řešení jsme mlčky zanedbali vlastní magnetické pole indukovaného proudu. Z průřezu  $A$  bychom si mohli dopočítat vlastní poloměr vodiče a odhadnout velikost intenzity vlastního magnetického pole, nicméně typická smyčka má vlastní poloměr mnohem menší než poloměr  $R$  a tudíž můžeme tuto skutečnost zanedbat. Při řešení jsme taktéž zanedbali vlastní změnu rozměrů smyčky.

### Pro zájemce

Tyto řádky jsou věnované řešitelům, kteří by rádi věděli, jak si odvodit nápovědu v zadání. Jak již víme z textu výše, v uzavřené smyčce se začne indukovat proud. Proto začne na vodič působit síla ve směru do středu smyčky (viz. obrázek) podle Ampérova zákona síla dána jako

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B},$$

kde  $d\mathbf{l}$  je malý element smyčky. Ten si můžeme vyjádřit pomocí malého úseku  $d\Theta$  jako  $r d\Theta$ . Protože jsou na sebe vektory v rovnici kolmé, tak se vztah zjednoduší na

$$dF = IBr d\Theta.$$

Z obrázku nyní můžeme vyjádřit tahovou sílu ve smyčce v závislosti na malém úhlu  $d\Theta$ . Horizontální složky se vyruší (jsou rovny  $T \cos d\Theta/2$ ) a výsledná síla dovnitř smyčky (působící proti  $dF$ ) je dána součtem dvou vertikálních složek, získáme tedy

$$dT = 2T \sin \frac{d\Theta}{2} \approx T d\Theta,$$

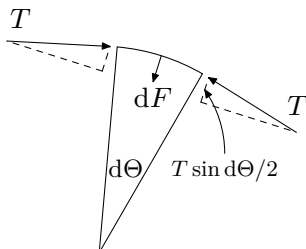
<sup>4</sup>Magnetický indukční tok vytvářený magnetickou indukcí  $\mathbf{B}$  na libovolně orientované ploše  $S$  je definován jako  $\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ . Pro homogenní pole a rovinou plochu platí  $\Phi = BS \cos \alpha$  (úhel  $\alpha$  svírá normálový vektor plochy s vektorem magnetické indukce). V našem případě jsou na sebe vektory kolmé.



kde jsme použili aproximaci pro malé hodnoty argumentu funkce sinus. Z podmínky rovnováhy pak máme

$$IBr d\Theta = T d\Theta \quad \Rightarrow \quad T = IBr.$$

A máme dokázáno. Tento princip je ve fyzice velmi častý a doporučuji ho řádně prostudovat.<sup>5</sup>



Obr. 1: Obrázek k nápovědě.

**Vít Beran**

vit.beran@fykos.cz@fykos.cz

### Úloha III.5 ... bodová

8 bodů; průměr 5,32; řešilo 22 studentů

Uvažujme hmotný bod umístěný v jednodimenzionálním prostoru. Jeho počáteční pozice i rychlost je nulová. Bod se dokáže pohybovat s libovolným zrychlením z intervalu  $[-a, a]$ . Nazvěme  $M(t)$  množinu všech možných stavů  $(x, v)$  takových, že bod se v čase  $t$  může nacházet na pozici  $x$  s rychlostí  $v$ . Sestrojme graf závislosti  $v$  na  $x$  v čase  $t$ . Množina  $M(t)$  v tomto grafu vytvoří plochu  $S(t)$ . Analyticky popište křivky ohraničující  $S(t)$ .

*Bonus* Najděte funkční závislost obsahu  $S(t)$ .

*Jáchym* chtěl jistou triviální úlohu řešit jako speciální případ této.

Nejdříve podotkneme, že pokud je možné nějakého bodu  $(x, v)$  dosáhnout v čase  $t$ , zřejmě je možné ho dosáhnout i v jakémkoli větším čase tím, že se před začátkem pohybu budeme odpovídající časový rozdíl pohybovat s nulovým zrychlením. Z toho vyplývá, že množina  $M$  se v čase pouze zvětšuje.

Zvolme nějaký konkrétní čas  $t$ . Nyní si představme, že se po celou dobu od počátku do času  $t$  pohybujeme pouze se zrychlením  $a$ . Není těžké spočítat, že dosáhneme rychlosti  $v_{\max} = at$  a polohy

$$x_{\max} = \frac{1}{2}at^2.$$

Toto je zřejmě největší rychlost a zároveň největší vzdálenost, které můžeme v daném čase dosáhnout, takže musí být součástí okraje množiny. Obráceně, nejdále v záporném směru se můžeme dostat do bodu ve vzdálenosti  $x_{\min} = -x_{\max}$  s rychlostí  $v_{\min} = -v_{\max}$ .

Dále zkusme najít, jakou největší rychlost můžeme mít na souřadnici  $x$ . Pro každý bod od  $x_{\min}$  do  $x_{\max}$  tak najdeme horní hranici množiny pro rychlost bodu. Situace je zřejmě

<sup>5</sup>Dalším typickým příkladem na něj je např. capstan equation.

symetrická vůči současné změně znaménka u rychlosti a polohy, takže dolní hranici rychlosti najdeme pouhým bodovým zrcadlením výsledku vzhledem k počátku.

Abychom při pohybu z klidu dosáhli nějaké rychlosti, musíme zrychlovat a při tom nutně urazíme nějakou vzdálenost. Můžeme si rozmyslet, že pokud bychom se pohybovali s menším než maximálním zrychlením, jakékoli rychlosti bychom dosáhli na větší vzdálenosti než v případě pohybu s maximálním zrychlením. Jinak řečeno, chceme-li na co nejkratší vzdálenosti dosáhnout co největší rychlosti, musíme se pohybovat s maximálním zrychlením.

Snadno spočítáme, že pro zrychlení z nuly na  $v$  musíme urazit vzdálenost

$$\Delta x = \frac{v^2}{2a}.$$

Jakou maximální rychlost tak můžeme mít například v počátku, tedy v bodě  $x = 0$ ? Jednoduše musíme nejdříve zrychlovat na opačnou stranu, čímž se dostaneme do záporných hodnot osy  $x$ . Potom můžeme začít zrychlovat v kladném směru, čímž se postupně vrátíme zpět do počátku, tentokrát už s kladnou rychlostí  $v$ .

Nyní zase vyvstává otázka, jak se v co nejkratším čase dostat co nejdále od počátku, abychom se pak mohli vrátit s co největší rychlostí? Odpověď je stejně prostá, jako celý zbytek úlohy – pohybem nejdříve s maximálním záporným zrychlením a hned poté s maximálním kladným zrychlením.

Pojďme konečně úvahy výše přepsat do rovnic. Pro daný čas  $t$  si zvolíme bod  $x$  a maximální rychlost, kterou v něm můžeme mít, označíme  $v$ . Po čas  $t_1$  budeme mít zrychlení  $-a$  a po další čas  $t_1$  zrychlení  $a$ . Tím dosáhneme bodu  $(y, 0)$ . Odtud se budeme pohybovat se zrychlením  $a$  po dobu  $t_2$  a konečně dorazíme do bodu  $(x, v)$ . Dostáváme rovnice

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}at_1^2 + \left(-at_1^2 + \frac{1}{2}at_1^2\right) = -at_1^2, \\ x - y &= \frac{1}{2}at_2^2, \\ v &= at_2, \\ t &= 2t_1 + t_2. \end{aligned}$$

Známe  $a$ ,  $t$  a  $x$ , neznáme  $v$ ,  $t_1$ ,  $t_2$  a  $y$ . Čtyři rovnice pro čtyři neznáme jsou přesně tolik co potřebujeme, abychom si z nich vyjádřili  $v$ . Nicméně zjistíme, že se neobejdeme bez odmocnin. Nám ale stačí najít vztah pro hraniční body v čase  $t$ , teda zbavit sa pomocných neznámých  $t_1$ ,  $t_2$  a  $y$ . Dostat můžeme například rovnici

$$x = \frac{1}{4a} (v^2 + 2vat - a^2t^2).$$

Což je samozřejmě parabola. Její osa je rovnoběžná s osou  $x$ , kterou parabola protíná v bodě  $(x_1, 0)$ , kde

$$x_1 = -\frac{1}{4}at^2,$$

což je nejvzdálenější bod v záporném směru, kam se můžeme dostat s nulovou konečnou rychlostí. Odtud vede hranice až do bodu  $(x_{\max}, v_{\max})$ , který jsme určili dříve. Parabola samozřejmě pokračuje i dál, tam však nemá fyzikální smysl (příslušný čas  $t_1$  by vyšel záporný). Nicméně stále ještě jsme nenalezli druhou hranici množiny od bodu  $(x_{\max}, v_{\max})$  zpět na osu  $x$ .

Pokud se budeme pohybovat polovinu času  $t$  se zrychlením  $a$  a druhou polovinu se zrychlením  $-a$ , skončíme opět na ose  $x$ , tedy s nulovou rychlostí, na souřadnici

$$x_2 = \frac{1}{2}a \left(\frac{t}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}at^2 - \frac{1}{2}a \left(\frac{t}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{4}at^2.$$

Bod  $(x_2, 0)$  tak zřejmě představuje největší vzdálenost, kam se můžeme od počátku na ose  $x$  dostat. Hranice množiny musí vést z bodu  $(x_{\max}, v_{\max})$  do bodu  $(x_2, 0)$ .

Nyní stojíme před podobným problémem jako v první části řešení – snažíme se najít nejmenší rychlost, kterou můžeme mít pro dané  $x$  mezi  $x_2$  a  $x_{\max}$ . Jednodušší však bude opačný postup – zkusme pro danou rychlost mezi 0 a  $v_{\max}$  najít největší  $x$ , do kterého se můžeme v čase  $t$  dostat.

Jistě je pravda, že maximálního  $x$  dosáhneme tehdy, pokud se v každém bodě trajektorie budeme pohybovat s největší rychlostí, s jakou to bude právě možné. Začneme tedy zrychlovat se zrychlením  $a$ , a to až do času  $\tau$ . V čase  $\tau$  naopak začneme brzdít se zrychlením  $-a$ , takže v čase  $t$  budeme mít rychlost  $v$ . První část dráhy se pohybujeme s maximálním zrychlením a tedy i maximální možnou rychlostí. Naopak ve druhé části brzdíme nejvíce jak to jde, a tedy kdybychom měli ještě o něco větší rychlost, už bychom to do času  $t$  nedokázali ubrzdít na rychlost  $v$ .

Jednoduchou úvahou jsme ukázali, že tento způsob pohybu nám pro danou koncovou rychlost  $v$  zajistí největší možnou uraženou vzdálenost. Opět dostáváme sadu rovnic

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}a\tau^2 + \left(a\tau(t - \tau) - \frac{1}{2}a(t - \tau)^2\right), \\ v &= a\tau - a(t - \tau) = a(2\tau - t). \end{aligned}$$

Nyní máme jen dvě neznámé, a sice  $x$  a  $\tau$ . Můžeme si tak vyjádřit

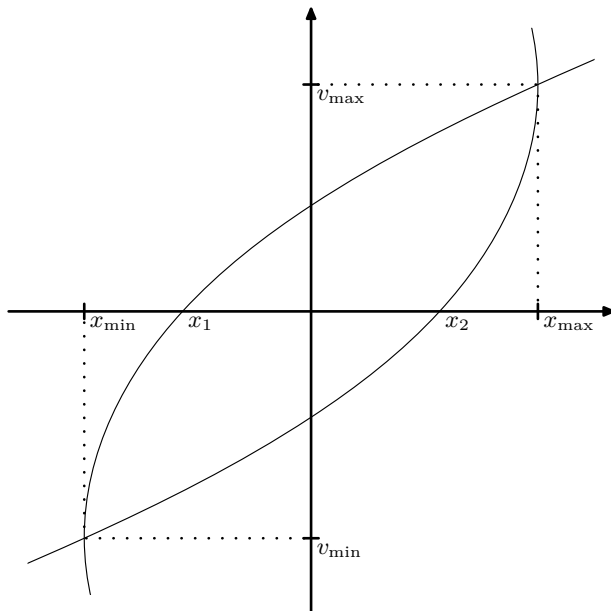
$$x = \frac{1}{4a} (a^2t^2 + 2vat - v^2).$$

Pokud nám tento výsledek přijde povědomý, tak zcela oprávněně. Jedná se o parabolu, která nám vyšla již v první části, bodově převrácenou podle počátku. Jak jsme zmínili výše, ze symetrie situace vyplývá, že tato parabola tvoří dolní hranici množiny od bodu  $x_{\min}$  do bodu  $x_2$ , zatímco první parabola vytváří dolní hranici od bodu  $x_{\min}$  do bodu  $x_1$ .

Abychom shrnuli předchozí úvahy, množina všech bodů, ve kterých se můžeme v čase  $t$  nacházet, je ohraničená dvěma parabolami, bodově symetrickými vůči počátku. Jejich analytický předpis je

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{4a} (v^2 + 2vat - a^2t^2), \\ x &= \frac{1}{4a} (a^2t^2 + 2vat - v^2). \end{aligned}$$

Pro úplnost dodejme, že pro každý bod uvnitř ohraničeného prostoru můžeme najít takový čas  $\tau$ , že  $\tau < t$  a zároveň daný bod leží na jedné z hraničních parabol pro čas  $\tau$ . To je podle vůbec první poznámky tohoto řešení důkazem, že celá plocha nemá žádné vnitřní hranice kolem oblastí, které by do hledané množiny nepatřily, ale zároveň by byly uvnitř vnějších hranic.

Obr. 2: Hranice výsledné množiny  $M$  v nějakém čase  $t$ .**Bonus**

Pokud jste to dočetli až sem, tak jistě tušíte, že bonus je již jen triviální záležitostí. Stačí vhodně zvolit podle čeho integrovat, abychom si zbytečně nepřidělávali práci. Definujme první parabolu jako  $x = f_1(v)$  a druhou jako  $x = f_2(v)$ . Potom pro obsah plochy  $S$  zřejmě platí

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^{v_{\max}} (f_2(v) - f_1(v)) \, dv = \frac{1}{a} \int_0^{v_{\max}} (a^2 t^2 - v^2) \, dv = \\ &= \frac{1}{a} \left[ a^2 t^2 v - \frac{v^3}{3} \right]_0^{v_{\max}} = \frac{2}{3} a^2 t^3. \end{aligned}$$

**Jáchym Bártík**

tuaki@fykos.cz@fykos.cz

**Úloha III.P ... osobní powerbanka**

10 bodů; průměr 4,15; řešilo 27 studentů

Poslední procenta baterky v mobilu dochází, powerbanku máte vybitou nebo jste si ji pro jistotu nechali doma a 230 také není nikde v dohledu. Nebylo by skvělé mít neustále při sobě vlastní zdroj elektrické energie?

- Navrhněte několik různých zařízení, která by dokázala vyrábět elektrickou energii pouze ze zdrojů vašeho těla.
- Diskutujte jejich maximální výkon a účinnost. Co všechno byste s jejich pomocí dokázali zásobovat elektřinou?

- Diskutujte jejich dopad na vaše zdraví a fyzickou kondici. Které orgány by vám v důsledku jejich přetěžování selhaly nejdříve?

Jako jedno z možných zařízení uvažujte soustavu drobných turbín umístěných v krevním řečišti. Všechny argumenty podpořte co nejpřesnějšími výpočty.

*Jáchym měl pocit, že mu chybí nějaká energie.*

Lidské tělo získává energii z přeměny chemických látek v potravinách na jiné. Tuto energii opět uchovává ve formě chemických vazeb. Největší část energie (kolem 80 %) se nakonec přemění na teplo a zbytek se spotřebuje při vypařování vody.<sup>6</sup> Stálo by za to toto teplo využít a přeměnit ho na elektrickou energii. Dále se nabízí použít vhodně umístěné turbíny (například v krevním řečišti nebo v dýchací trubici). energii můžeme získat i spaláním methanu a vodíku, produkováných ve střevch. Jednu metodu již dlouhou dobu využíváme a tou je mechanická energie neboli práce svalů – určitě jste si již někdy točili klikou nabíjející svítilnu. Některé z těchto nápadů si detailněji rozebereme.

Nejdříve se podíváme na některá zařízení, která bychom chtěli napájet. Pro výpočet energie uložené v akumulátoru mobilního telefonu zvolme kapacitu  $K = 2 \text{ Ah}$  a napětí  $U = 4,5 \text{ V}$ . Potom pro uloženou energii platí  $E = KU = 32,4 \text{ kJ}$ . Kapacity baterií chytrých hodin se pohybují kolem  $K = 300 \text{ mAh}$  s napětím  $U = 3,8 \text{ V}$ , takže uchovávají energii  $E = 4,1 \text{ kJ}$ . Nakonec se podíváme na velmi praktický přístroj, který se již vědci snaží napájet lidským tělem – kardiostimulátor, jehož průměrný příkon je  $30 \mu\text{W}$ .<sup>7</sup>

### *Turbínka v krevním řečišti*

Abychom mohli získávat energii z krevního oběhu, potřebujeme do něj nainstalovat nějaký systém turbín. Z praxe víme, že s rozměry turbíny roste i její účinnost. Proto zvolme co nejméně turbín hned vedle srdce, kde jsou tepny a žíly nejširší. Otázkou je z jaké strany. Jestli do místa, kde krev ze srdce proudí (aorta a výstup plicního oběhu), či naopak tam, odkud krev proudí do srdce (horní a dolní dutá žíla, vstup plicního oběhu). K této otázce se vrátíme později.

Práce  $W$ , potřebná na protlačení objemu  $V$ , je součinem síly a dráhy, na které daná síla působí. Je-li na počátku této dráhy tlak v kapalině  $p_1$  a na konci tlak  $p_2$ , výsledná síla bude

$$F = S(p_1 - p_2) ,$$

kde  $S$  je obsah plochy průřezu trubice. Proudí-li kapalina rychlostí  $v$ , pro výkon bude platit

$$P = Fv = Q(p_1 - p_2) ,$$

kde  $Q$  je objemový průtok kapaliny v trubici. U zdravého člověka zhruba odpovídá hodnotě<sup>8</sup>  $Q = 0,071 \cdot \text{tep}^{-1} = 0,0841 \cdot \text{s}^{-1}$ .

Tlak na začátku turbíny  $p_1$  bude přibližně roven diastolickému tlaku, který pro zdravého člověka uvažujeme  $90 \text{ mmHg}$ . Pokud budeme tok krve takto brzdit, bude se srdce pravděpodobně snažit tuto ztrátu dohnat tím, že zvýší svůj výkon. Problémem je, že tato změna je velmi individuální (v závislosti na zdraví daného člověka) a nelze ji příliš dobře předpovídat. Navíc by tím docházelo k nadměrnému zatěžování srdce. Pokud bychom však počítali pouze malé rozdíly tlaků (při malém odporu turbíny), mohli bychom tuto skutečnost zanedbat. Pro větší

<sup>6</sup><https://opentextbc.ca/anatomyandphysiology/chapter/24-6-energy-and-heat-balance/>

<sup>7</sup>[https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-50209-5\\_11](https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-50209-5_11)

<sup>8</sup><https://hypertextbook.com/facts/2001/VitaliyShchupak.shtml>

rozdíly však můžeme vždy udělat dolní odhad předpokladem  $p_1 = konst.$  Tlak  $p_2$  umíme nastavit změnou odporu turbínky. Hledáme tedy co nejmenší diastolický tlak, kdy ještě nedochází k žádným dalším zdravotním potížím.

Takto způsobená porucha se odborně nazývá „Isolated diastolic hypotension“<sup>9</sup> a nastává při poklesu tlaku pod 60 mmHg, kdy člověk začne pociťovat únavu a může mít závratě. Ty jsou způsobeny špatným prokrvením mozku, čemuž lze předejít tím, že dáme turbínku na místa vstupu krve do srdce. Jediné nebezpečí tedy spočívá v nadměrném zatěžování srdce a v problémech s tím spojených, jako je například zvýšené opotřebávání srdce. Ty se u lidí postižených touto vadou projevují až ve vyšším věku.

Jaká bude účinnost takové turbínky? Námi uvažované žíly mají průměr kolem 1 až 2 cm, což jsou pro výrobu přijatelné rozměry. Účinnost však při takových rozměrech bude hrál velkou roli, jelikož s klesajícími rozměry a výkonem výrazně klesá. Pozorováním závislosti účinnosti malých turbín na jejich výkonu<sup>10</sup> můžeme optimisticky odhadnout účinnost vodní turbíny daných rozměrů na 10 %. Jelikož má krev přibližně stejnou hustotu jako voda ( $1060 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ), nemusíme tento odhad z důvodu použití jiné kapaliny měnit.

Dosažením hodnot do vztahu výše dostáváme

$$P = \eta Q (p_{90} - p_{60}) = 0,02 \text{ W}.$$

Námi stanovenou baterii telefonu bychom tímto způsobem nabili za asi tři týdny.

Pokud bychom postupně zvyšovali odpor turbínky (třeba v rámci měsíců až let), mohlo by si srdce na vyšší potřebný tlak zvyknout a posílit se. Každopádně by tak docházelo k jeho rychlejšímu opotřebením.

Některá zdravotní rizika již byla zmíněna. Co jsme však doposud nezmínili je problém s nízkou účinností turbíny. Zbýlých 90 % (účinnosti jsme uvažovali jako 10 %) se totiž ve výsledku přemění na teplo. Toto teplo je však velmi rychle odváděno krví a pokud by nevznikalo těsně u stěn žil, které by mohlo poškozovat, nemělo by být nebezpečné. V poslední řadě je třeba zmínit možnou poruchu turbín, při které by mohlo dojít k ucpaní žil a následně vysoce pravděpodobné smrti. Dalším velmi vysokým rizikem je vznik trombu kvůli turbulencím, jež vedou ke krevním sraženinám a následně srdeční zástavě. V praxi bylo dosaženo  $800 \mu\text{W}$  elektřiny pomocí podobného konceptu,<sup>11</sup> což je řádově menší hodnota než námi vypočítaná. To může být způsobeno špatným odhadem účinnosti nebo tím, že jsme výkon turbíny tlačili až na samotnou hranici dlouhodobé přežitelnosti člověka. Tu však lze redukovat snížením odporu turbínky, čímž nastavíme nižší tlak, který pro srdce nebude přílišnou zátěží.

Mnohem slibnější koncept než turbíny využívá nanotrubiček<sup>12</sup> a v budoucnu by jím bylo možné napájet různé senzory uvnitř krevního řečiště, například pro diabetiky nebo nanoboty.

## Síla fuku

Na podobném konceptu by mohla fungovat turbínka umístěná v hrtnu, kde však neproudí krev, ale vzduch. Potom můžeme použít výše zmíněný vzorec, upravený pro danou situaci.

<sup>9</sup><https://www.uab.edu/mix/stories/diastolic-blood-pressure-how-low-is-too-low>

<sup>10</sup>[https://ac.els-cdn.com/S187661021735124X/1-s2.0-S187661021735124X-main.pdf?\\_tid=b471dfa5-178d-4e57-92ee-a334313ce1c4&acdnat=1534083170\\_d5a9d5ddb0cd4230c8e48af14375ae92](https://ac.els-cdn.com/S187661021735124X/1-s2.0-S187661021735124X-main.pdf?_tid=b471dfa5-178d-4e57-92ee-a334313ce1c4&acdnat=1534083170_d5a9d5ddb0cd4230c8e48af14375ae92)

<sup>11</sup><http://blogs.discovermagazine.com/80beats/2011/05/17/tiny-turbine-inside-arteries-could-power-pacemakers-and-cause-blood-clots>

<sup>12</sup><https://newsroom.wiley.com/press-release/angewandte-chemie-international-edition/how-draw-electricity-bloodstream-one-dimension>

Tedy výkon foukací turbíny bude

$$P = \eta Q (p_{\text{fuk}} - p_{\text{atm}}) .$$

Účinnost turbíny  $\eta$  bude snížena díky tomu, že jí proudí vzduch místo krve. Na druhou stranu bude zvýšena tím, že bude moct být větší. Vzhledem k tomu, jak hrubé odhady zde děláme, můžeme jí považovat za stejnou jako v případě krve. Objem vydechovaného vzduchu a příslušný čas, který výdech trvá, lze snadno dohledat.<sup>13</sup> Pro normální nádechy můžeme odhadnout  $V = 0,5$  l. Jelikož se nadechujeme přibližně šestnáctkrát za minutu, turbínkou protéká  $Q = 0,13 \text{ dm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$  vzduchu. Při dýchání naše plíce obvykle vytvářejí přetlak 2 – 3 kPa vůči okolnímu prostředí. Maximální dosažitelný přetlak je přibližně<sup>14</sup> 15 kPa. Odhadněme, že přetlak 3 kPa oproti standardním 2 – 3 kPa by nebyl příliš obtížný na udýchání. Pak dostáváme výkon  $P = 40 \text{ mW}$ . Pro maximální použitelný přetlak 12 kPa (tedy navíc oproti normálnímu přetlaku, nutnému k dýchání), máme  $P = 160 \text{ mW}$ . Pomocí systému potrubí a klapky bychom mohli dosáhnout toho, že by vzduch turbínou proudil stále stejným směrem. Tím bychom docílili dvakrát většího výkonu.

Pro nižší přetlak uveďme pro srovnání, že nabití mobilního telefonu by trvalo téměř 230 h, chytré hodinky bychom nabili za 30 h. Spotřebu kardiostimulátoru pokrýváme přibližně tisíckrát.

### Odpadní teplo

Teplo, jež vyzařují naše těla, má z velké části formu infračerveného záření. Pro generování elektrické energie uvnitř fotovoltaických článků je však nutné dosáhnout určité minimální energie dopadajícího záření. Typická solární křemíková buňka vyžaduje alespoň 1,1 eV, takže funkčnost je shora omezena vlnovou délkou dopadajícího záření přibližně 1200 nm.<sup>15</sup> Zdola je pak omezena<sup>16</sup> hodnotou 300 nm, viz graf 3.

Uvažujme absolutně černého člověka, jehož teplota je 37 °C. Celková intenzita záření bude

$$I = \pi \int_{300 \text{ nm}}^{1200 \text{ nm}} dI(\lambda) ,$$

kde  $dI(\lambda)$  je spektrální intenzita záření, kterou můžeme spočítat z Planckova vyzařovacího zákona. Nás však zajímá elektrický výkon na jednotku plochy, čili musíme započítat ještě účinnost solárních panelů. Potom dostaneme

$$P_S = \int_{300 \text{ nm}}^{1200 \text{ nm}} \eta(\lambda) dI(\lambda) .$$

Numerickou integrací nám vyšlo  $P_S = 45 \text{ mW} \cdot \text{m}^{-2}$ . Stanovme plochu lidského těla<sup>17</sup> na 2 m<sup>2</sup>. Výkon získaný pomocí fotovoltaických článků z lidského těla tedy činí  $P = 90 \text{ mW}$ , čímž můžeme náš telefon nabít za dobu přibližně 4 dní. Prakticky by bylo možné články implementovat

<sup>13</sup><https://www.mada.org.il/en/about/engineer/challenge/respiratory-system>

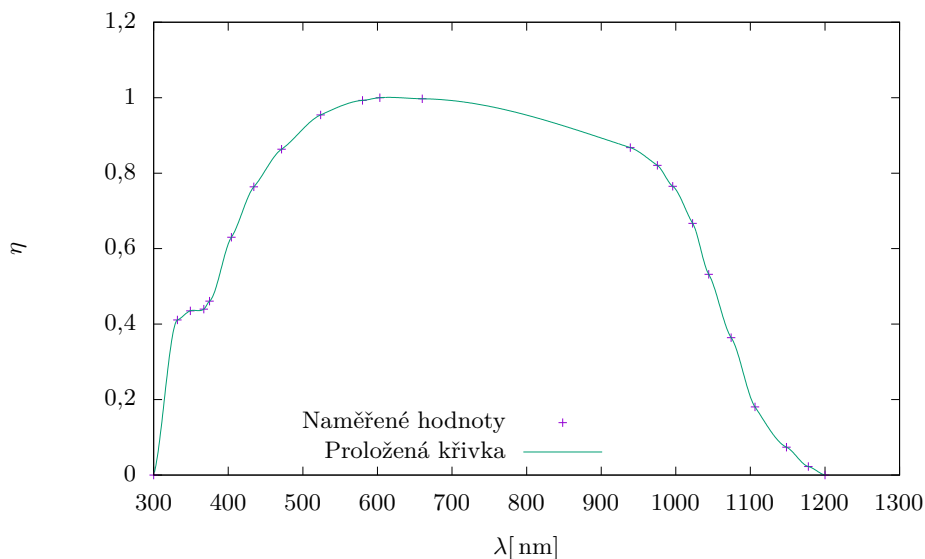
<sup>14</sup>[http://flutopedia.com/refs\\_bpress.htm](http://flutopedia.com/refs_bpress.htm)

<sup>15</sup><https://sciencing.com/effect-wavelength-photovoltaic-cells-6957.html>

<sup>16</sup>[https://www.researchgate.net/figure/Relative-quantum-efficiency-versus-wavelength-at-several-discrete-temperatures-for-a\\_fig1\\_283165648](https://www.researchgate.net/figure/Relative-quantum-efficiency-versus-wavelength-at-several-discrete-temperatures-for-a_fig1_283165648)

<sup>17</sup><https://www.calculator.net/body-surface-area-calculator.html?csex=m&bodyweight=85&bodyweightunit=kilogram&bodyheightfeet=&bodyheightinch=&bodyheight=180&x=96&y=23>

do oblečení, čímž bychom získali mnohem více energie ze slunečního záření než z člověka samotného. Dalším nedostatkem fotovoltaických panelů, jež nebyl zmíněn, je, že při malých tocích energie nemusí vůbec dojít k sepnutí nabíjecí části a získaná energie je tak nulová.



Obr. 3: Účinnost fotovoltaických článků v závislosti na vlnové délce dopadajícího záření.

### Větrný pohon

Obecně se udává, že člověk za den vyprodukuje okolo  $1,4 \text{ dm}^3$  plynu v podobě větrů,<sup>18</sup> jejichž složení je<sup>19</sup>

- Dusík: 20 – 90 %
- Vodík: 0 – 50 %
- Oxid uhličitý: 10 – 30 %
- Kyslík: 0 – 10 %
- Methan: 0 – 10 %

Z toho jsou hořlavé vodík a methan. Produkce methanu není v lidském těle nijak velká, avšak spálením i jen malého množství můžeme získat hodně energie;<sup>20</sup> přesněji  $810 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ . Co se vodíku týká, jeho spálením lze získat až  $120 \text{ kJ} \cdot \text{g}^{-1}$  neboli  $240 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ . Ten by také bylo možné použít v palivovém článku, což je velmi perspektivní technologie s vyšší účinností než obyčejné spalování.

<sup>18</sup><https://www.telegraph.co.uk/men/the-filter/qi/10305094/QI-gas-facts-how-much-gas-does-the-average-human-produce.html>

<sup>19</sup><https://www.thoughtco.com/chemical-composition-of-farts-608409>

<sup>20</sup>[https://www.wou.edu/las/physci/GS361/Energy\\_From\\_Fossil\\_Fuels.htm](https://www.wou.edu/las/physci/GS361/Energy_From_Fossil_Fuels.htm)



Za normálních podmínek je molární objem  $22,4 \text{ dm}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$ . Za den tak dokážeme vyrobit energii maximálně

$$W_p = 12,6 \text{ kJ}.$$

Na využití této energie bychom potřebovali nějaký druh spalovacího motoru, jejichž účinnost se většinou pohybuje v intervalu  $10 - 50 \%$ .<sup>21</sup> Uvažme tedy  $\eta = 10 \%$ , jelikož i při velmi dobrém konceptu spalovacího motoru nesmíme zapomínat na to, že spalujeme pouze malé množství plynu. Účinnost spalovacích motorů totiž roste se zvyšující se teplotou. Takto by bylo možné získat energii přibližně  $W = 1,3 \text{ kJ}$ . To stačí na nabití přibližně  $4 \%$  baterie námi uvažovaného telefonu.

### Seebeckův efekt

K tomuto jevu<sup>22</sup> dochází při spojení dvou kovů či polovodičů s různými hodnotami Seebeckova koeficientu<sup>23</sup> a s rozdílnou teplotou. Mezi oběma částmi vznikne napětí a tedy i elektrický proud. Napětí lze jednoduše počítat jako

$$U = \Delta\alpha\Delta T,$$

kde  $\Delta\alpha$  je rozdíl Seebeckových koeficientů použitých materiálů a  $\Delta T$  je rozdíl teplot.

Chceme vybrat dva materiály s co největším rozdílem Seebeckova koeficientu. V případě polovodičů je největší rozdíl mezi selenem a  $\text{Pb}_{15}\text{Ge}_{37}\text{Se}_{58}$ , jež činí  $\Delta\alpha_p = 2890 \mu\text{V}\cdot\text{K}^{-1}$ . Při pokojové teplotě  $21 \text{ }^\circ\text{C}$  je teplotní rozdíl vůči teplotě lidského těla  $\Delta T = 16 \text{ K}$ , což odpovídá napětí přibližně  $U = 46 \text{ mV}$ . Jak je vysvětleno v článku<sup>23</sup> o seebeckově koeficientu, nelze z polovodičů sestavit fungující drátový systém a proto se používají spíše pro opačný Peltierův článek.<sup>24</sup> Pro Seebeckův je nutné použít kovy. Zvolme antimon a bismut, kde  $\Delta\alpha = 119 \mu\text{V}\cdot\text{K}^{-1}$ , tedy  $U = 1,9 \text{ mV}$ .

Podívejme se na nějaké reálné koncepty. Například v roce 2014 byl publikován článek,<sup>25</sup> podle kterého bylo dosaženo výkonu na plochu přibližně  $1,5 \text{ mW}\cdot\text{m}^{-2}$ . Jedním metrem čtverečním bychom pokryli zhruba polovinu lidského těla. V úvodu bylo zmíněno, že na nabití mobilního telefonu potřebujeme  $32,4 \text{ kJ}$  energie, což by v tomto případě trvalo zhruba 250 dní. Pro napájení kardiostimulátoru by nám stačila plocha  $200 \text{ cm}^2$ .

Tato metoda je velmi bezpečná. Co se týče zatížení organismu, lidské tělo je v zimě připraveno zvýšit svůj tepelný výkon z přibližně  $100 \text{ W}$  na zhruba  $150 \text{ W}$  a ochlazování v řádech miliwattů, dokonce ani wattů, mu nezpůsobí žádné obtíže, takže omrzlin se bát nemusíme. Problém by samozřejmě nastal už při trochu větší zimě, jelikož kovové desky nelze považovat za příliš dobře izolující oblečení.

Pro napájení současných mobilních telefonů se všechny tyto koncepty ukázaly velmi nepraktické. Pokud však uvážíme podobnou elektroniku s menším příkonem, například energie získaná z větrného pohonu či krevní turbíny by pokryla polovinu elektrické spotřeby chytrých hodinek. Navíc všechny tyto možnosti byly dostatečně na napájení kardiostimulátoru, což je v dnešní době asi hlavní důvod zkoumání těchto přístrojů. Jako nejpraktičtější se jeví využití Seebeckova

<sup>21</sup>[https://cs.wikipedia.org/wiki/Spalovací\\_motor](https://cs.wikipedia.org/wiki/Spalovací_motor)

<sup>22</sup><http://vlab.amrita.edu/?sub=3&brch=194&sim=351&cnt=1>

<sup>23</sup><https://www.electronics-cooling.com/2006/11/the-seebeck-coefficient/>

<sup>24</sup><https://www.sciencedirect.com/topics/chemistry/peltier-effect>

<sup>25</sup><http://iopscience.iop.org/article/10.1088/0964-1726/23/10/105002>

efektu či větrného pohonu, jelikož tato zařízení by bylo možné kdykoli sundat. Navíc nemají vedlejší efekty, jako je například možná smrt v případě turbíny v krevním řečišti.

*Jan Střeleček*

strela@fykos.cz@fykos.cz

### Úloha III.E ... indexovaný kondenzátor 12 bodů; průměr 8,97; řešilo 31 studentů

Poštou vám přišel elektrolytický kondenzátor a rezistor. Změřte kapacitu kondenzátoru a odpor rezistoru, neměřte je však přímo. Součin kapacity kondenzátoru a odporu rezistoru je přibližně  $RC \approx 20$  s.

*Varování* Elektrolytický kondenzátor má kladnou a zápornou elektrodu, při zapojení opačně ho můžete zničit. Maximální dovolené napětí je 10 V.

*Dodo* právě v praktikku měřil rezonanci.

#### Odpor rezistoru

Najskôr si zistíme odpor rezistoru. Máme ale zakázané merať ho priamo, nezostáva nám teda nič iné, než použiť Ohmov zákon. Pripojíme rezistor ku zdroju, odmeriame napätie na jeho koncoch a prúd, ktorý ním preteká, a dosadíme do známeho vzťahu.

Pri napätí treba pripojiť multimeter k tým dvom bodom obvodu, medzi ktorými chceme vedieť napätie, a teda paralelne k rezistoru. Keďže batéria uvádza 4,5 V nastavíme na multimetri rozsah 20 V (pretože 2 V by bolo zjavne málo a nič medzi tým nemáme k dispozícii).

Pri meraní prúdu zas treba, aby tento prúd multimetrom priamo pretekal, a teda ho zapojíme sériovo. Ak sa bojíte, že prepálite multimetru poistky, tak ho najprv nastavte na najväčší rozsah prúdu a postupne uberajte (zvyšujte presnosť), dokým sa dá.

My sme pri meraní použili vzorku 5 rezistorov, pričom sa dalo čakať, že možno medzi nimi budú nejaké drobné rozdiely, ale ukázalo sa, že pri všetkých rezistoroch sme dostali napätie  $U = 4,84$  V a prúd  $I = 96$   $\mu$ A. Čo z toho vyplýva? Štatistická chyba odporov rezistorov vo výrobe je zanedbateľná v porovnaní s nepresnosťou merania. Tá je v prípade nášho multimetra  $\pm(1\% + 2\text{digit})$  pri meraní prúdu a  $\pm(0,5\% + 2\text{digit})$  pri meraní napätia. Čiže  $\Delta I = 3$   $\mu$ A a  $\Delta U = 0,04$  V. Pri delení dvoch veličín sa sčítajú štvorce ich relatívnych chýb. Takže odpor rezistoru je

$$R = \frac{U}{I} \left( 1 \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta I}{I}\right)^2 + \left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2} \right) = (50,4 \pm 1,6) \text{ k}\Omega.$$

#### Trochu teórie

Kapacita kondenzátoru  $C$  udáva pomer medzi nábojom  $Q$  v ňom uloženým a napätím  $U$  na jeho svorkách, teda  $C = Q/U$ . Podobne, odpor rezistoru  $R$  vyjadruje pomer napätia a prúdu, ktorý ním preteká,  $R = U/I$ . Čo je to prúd? Usporiadáný pohyb nabitých častíc. Jeho veľkosť udáva, aký náboj prešiel vodičom za jednotku času, čiže  $I = Q/t$ .

Čo sa teda stane, keď spojíme konce nabitého kondenzátoru rezistorom? Na svorkách rezistoru bude rovnaké napätie ako na kondenzátore a teda ním začne tiecť prúd veľkosti

$$I = \frac{U}{R} = \frac{Q}{RC}.$$

Tento prúd tvoria elektróny bežiacie zo záporne nabitej elektródy kondenzátora na tú druhú (resp. hypotetické kladné náboje bežiacie presne opačným smerom). Čiže náboj a s ním teda aj napätie na kondenzátore bude postupne klesať. Tým pádom bude klesať aj prúd, čiže dostávame diferenciálnu rovnicu

$$-\frac{dQ}{dt} = \frac{Q}{RC},$$

kde sme len za prúd z predchádzajúceho vzťahu dosadili zmenu náboja za čas. Mínus je tam preto, lebo náboj na kondenzátore týmto procesom klesá.

Táto rovnica sa dá riešiť jednoducho separáciou premenných, ktorej výsledkom je

$$Q(t) = Q(0)e^{-\frac{t}{RC}}.$$

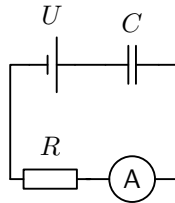
Lenže náboj merať nevieme (minimálne bežne multimeter takú možnosť neponúka). Zato vieme merať prúd a napätie, čiže máme dve možnosti: buď vydeliť obe strany kapacitou, alebo obe strany zderivovať podľa času. Tým dostaneme časový vývoj napätia na kondenzátore, resp. prúdu tečúceho vodičom

$$U(t) = U(0)e^{-\frac{t}{RC}},$$

$$I(t) = I(0)e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (1)$$

Vidíme, že oba vzťahy sú analogické, takže je vlastne jedno, ktorý z nich použijeme. Ukážeme si samozrejme oba.

Zostáva otázka, ako vlastne zapojiť obvod. Schémy zapojenia sa nachádzajú na obrázkoch 4 a 5.

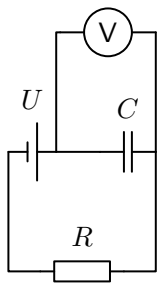


Obr. 4: Zapojenie pri meraní prúdu

### Meranie prúdu

V tomto prípade rovno za kondenzátor zapojíme multimeter. Z predchádzajúceho merania už vieme aký prúd máme očakávať. Multimeter teda momentálne ukazuje, ako rýchlo sa kondenzátor nabíja. Tento prúd tiež exponenciálne klesá, takže je dôležité určiť si hodnotu prúdu, pri ktorej nabíjanie ukončíme. Nie je až tak dôležité akú, ale hlavne musí byť pri každom meraní rovnaká. My sme sa rozhodli, že nabíjanie ukončíme pri  $3\ \mu\text{A}$ . Takto trvalo nabíjanie niečo cez 2 minúty.

Keď donabíjame, treba spraviť súčasne dve veci - odpojiť baterku (stačí jeden kábel) a spustiť stopky. Potom už len sledujeme stopky a každých 5 sekúnd pozrieme na multimeter a poznačíme si hodnotu prúdu. Meranie sme vykonali pre päť kondenzátorov tak, že sme tento postup zopakovali pre každý z nich, ale ako vidno z tabuľky 2, štatistická chyba je opäť rozumne malá.



Obr. 5: Zapojenie pri meraní napätia

Tab. 2: Namerané časové priebehy prúdu

$t$ s	$I$ $\mu\text{A}$	$\bar{I}$ $\mu\text{A}$
5	78	78,6
10	65	64,6
15	54	53,6
20	44	44,2
25	36	36,6
30	30	30,2
35	25	25,0
40	20	20,8
45	17	17,0
50	14	14,4
55	11	11,8
60	9	9,8

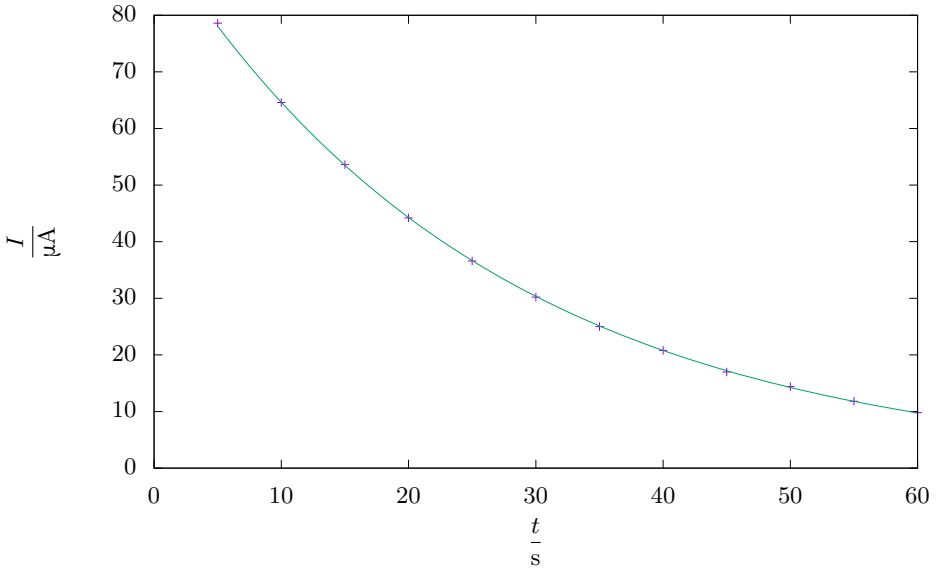
Takže sme zmerali vývoj prúdu v čase. Otázka znie, ako z toho určiť kapacitu. Najjednoduchší spôsob je použiť nejaký software, ktorý nám naše dáta fitne exponenciálou.<sup>26</sup>

Okrem toho, že sa môžeme na grafe 6 pokochať, ako všetky body ležia na danej krivke, sa dozvieme aj to, aký má táto krivka predpis. V našom prípade dostávame  $f(x) = 94,3 \cdot \exp(-0,0378x)$ . Čo keď porovnáme s (1) zisťujeme, že

$$\begin{aligned}
 -\frac{t}{RC} &= -0,0378, \\
 RC &= 26,5 \text{ s}, \\
 C &= 525 \mu\text{F}.
 \end{aligned}$$

Zároveň si môžeme všimnúť, že  $I(0) = 94,3 \mu\text{A}$ , čo je o pár mikroampérov menej, než prúd, ktorý sme namerali v prvej časti. Náhoda? Samozrejme, že nie. K tejto skutočnosti sa na záver vrátíme.

<sup>26</sup>RStudio, gnuplot, ...



Obr. 6: Závislosť prúdu v obvode na čase pri vybíjaní kondenzátora

Ak ale nechceme fitovať namerané dáta pomocou nejakého „black boxu“, môžeme to spraviť aj sami pomocou linearizácie. Keď zlogaritmujeme obe strany (1) dostávame, že

$$\ln I(t) = \ln I(0) - \frac{t}{RC},$$

čiže ak si nakreslíme graf závislosti logaritmu prúdu (keďže do argumentu logaritmu by malo ísť bezrozmerné číslo, budeme logaritmovať  $I/I_n$ , kde sme si zvolili  $I_n = 1 \mu\text{A}$ ) na čase, mal by byť lineárny, so smernicou  $-(RC)^{-1}$ , vid' graf 7.

Smernicu určíme z krajných bodov

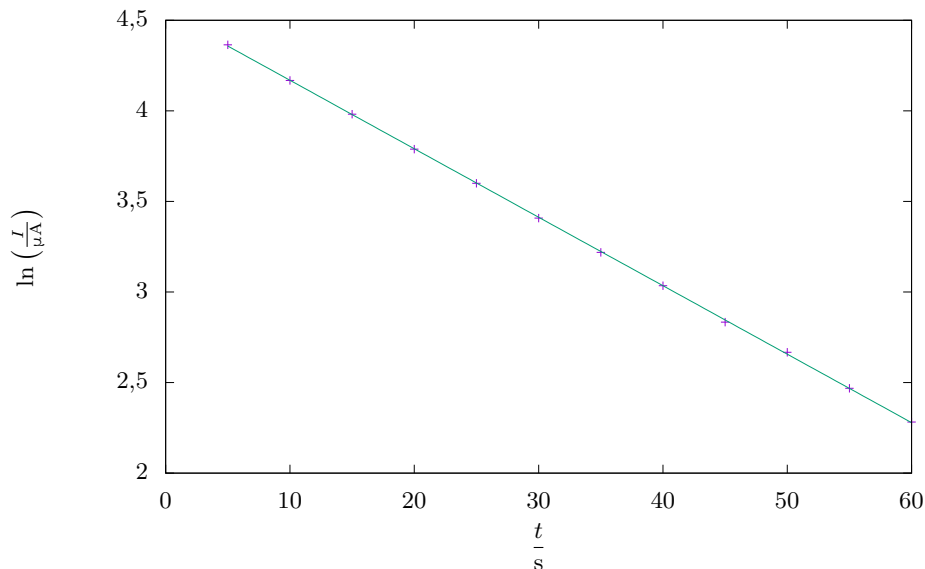
$$k = \frac{\Delta f(t)}{\Delta t} = -0,0379 \text{ s}^{-1}.$$

Z toho vyplýva, že  $C = 524 \mu\text{F}$ , čo je vlastne to isté, ako pri použití „black boxu“. Presnejšie by ale bolo vykonať lineárnu regresiu.

Ďalej by bolo vhodné určiť chybu. Štvorec relatívnej chyby kapacity je súčet štvorcov relatívnych chýb odporu (tú sme určili v prvej časti) a relatívnej chyby, s ktorou sme určili smernicu.

Keď si za oba prúdy, ktoré používame na určenie smernice dosadíme  $I + u_I$ , kde pod  $u_I$  myslíme absolútnu chybu daného prúdu, po chvíli hrania sa s logaritmi a limitami sa dá dôjsť k záveru, že absolútna chyba smernice je

$$u_k = \frac{1}{u_t} \left( \frac{u_{I_1}}{I_1} + \frac{u_{I_2}}{I_2} \right),$$



Obr. 7: Linearizovaná závislost

čiže súčet relatívnych chýb prúdov deleno časový rozdiel. Ako absolútnu chybu prúdu opäť použijeme dva krát najmenší dielik plus percento nameranej hodnoty a dostávame, že relatívna chyba smernice je  $\delta_s = 0,004$ . To spolu s relatívnou chybou odporu dáva  $u_C = 0,03$ . Po vynásobení kapacitou, dostaneme  $C = (520 \pm 20) \mu\text{F}$ .

### Meranie napätia

Tentokrát treba zapojiť multimeter ku kondenzátoru paralelne. Rozhodli sme sa nabíjať, dokým nebolo napätie 4,83 V, čo trvalo asi sekundu.

Dalo by sa samozrejme postupovať úplne rovnako ako minule a v pevne stanovených časoch merať hodnotu napätia. Pre zmenu to ale spravíme naopak. A síce, zmeriame časový rozdiel medzi dvoma pevne stanovenými hodnotami napätia. Tie sme si stanovili ako  $U_1 = 4 \text{ V}$  a  $U_2 = 2 \text{ V}$ . Dôležitý je hlavne ich pomer. Dosadením do (1) zisťujeme, že ak čas, ktorý uplynie medzi tým, kým klesne napätie z  $U_1$  na  $U_2$ , označíme  $\Delta t$ , môžeme  $C$  vyjadriť ako

$$C = \frac{\Delta t}{R \ln 2}.$$

Spravili sme 5 meraní (opäť jedno pre každý kondenzátor) a určili priemer a smerodajnú odchýlku  $\Delta t = (16,9 \pm 0,4) \text{ s}$ .

Po dosadení do vzťahu vyššie dostávame  $C = (480 \pm 20) \mu\text{F}$ .

## Diskusia

Průžky na rezistory mají postupne farby: zelená, hnedá, čierna, červená, hnedá. Na internete sa dá nájsť veľa rôznych možností ako ich dekódovať<sup>27</sup> Zisťujeme, že výrobca udáva, že rezistor by mal mať odpor  $R_v = (51,0 \pm 0,5) \text{ k}\Omega$ . Tento interval je celý vnútri intervalu, ktorý sme určili našim meraním, čiže hodnotu odporu sme určili správne.

Výsledky kapacity získané meraním prúdu a meraním napätia sa dosť výrazne líšia. Môže nás napadnúť, či to nemôže byť spôsobené inou použitou metódou. Tak sme skúsili aplikovať metódu merania napätia aj na meranie prúdov. Prúd klesol na polovicu (z  $80 \mu\text{A}$  na  $40 \mu\text{A}$ ) v priemere za 18,2s, čo zodpovedá kapacite  $C = 520 \mu\text{F}$  (čiže takej istej ako sme pri meraní prúdu určili pôvodne), takže je problém niekde inde.

Hodnota kapacity, ktorú udáva výrobca je  $C = 470 \mu\text{F}$ . Tá spadá do intervalu chyby pri meraní napätia, avšak nie pri meraní prúdu. To nám teda dáva nápovedu, ktoré z meraní je vlastne zle.

A kde konkrétne je tá chyba? Vráťme sa späť k odvodeniu vzťahu (1). Tam sme si povedali, že  $R$  je odpor, ktorý stojí medzi svorkami rezistoru. Pri meraní sme predpokladali, že tento odpor je  $R = (50,4 \pm 1,6) \text{ k}\Omega$ , čo však nebola tak úplne pravda. Sérioivo s našim rezistorom bol totiž zapojený multimeter! Bol zapojený ako ampérmeter, takže jeho vnútorný odpor bol veľmi malý (preto sme namerali skoro správnu hodnotu), ale stále bol dosť veľký na to, aby nezanedbateľne ovplyvnil meranie.

Keď sa ale pozrieme na meranie napätia, vidíme, že aj tam mohol multimeter ovplyvniť meranie. Tentokrát presne opačným spôsobom. Keďže bol zapojený ako voltmeter paralelne s našim rezistorom, skutočný odpor, cez ktorý sa kondenzátor vybíjal bol menší, než sme počítali, čiže by sme mali pre zmenu dostať hodnotu kapacity nižšiu ako reálna hodnota. Ale ostatné chyby v tomto prípade prevážili nad nedokonalosťou voltmetru.

S použitím ďalšieho multimetru by sme mohli odmerať vnútorný odpor v jednotlivých prípadoch a použiť ho na korekciu výsledkov. Do hry však vstupujú aj prechodové odpory v miestach zapojení jednotlivých súčiastiek, či vnútorný odpor samotného kondenzátora. Určiť presne kapacitu kondenzátora týmito metódami je teda pomerne komplikované, najlepšie je totižto použiť striedavý prúd a zmerať indukčanciu kondenzátora, alebo určiť priamo rezonančnú frekvenciu kmitov príslušného RC zapojenia.

## Záver

Hodnotu odporu rezistoru sme určili ako  $R = (50,4 \pm 1,6) \text{ k}\Omega$ , čo sa zhoduje s hodnotou zadanou výrobcom  $R_v = (51,0 \pm 0,5) \text{ k}\Omega$ . Meraním vývoja prúdu v čase sme dostali kapacitu  $C = (520 \pm 20) \mu\text{F}$ . Meraním vývoja napätia v čase sme dostali kapacitu  $C = (480 \pm 20) \mu\text{F}$ . Výrobca udáva  $C = 470 \mu\text{F}$ , čo znamená, že meraním napätia sme dostali správny výsledok, zatiaľ čo meraním prúdu sme dostali výrazne chybný výsledok, dôvodom bol nenulový vnútorný odpor ampérmetra.

*Šimon Pajger*

legolas@fykos.cz@fykos.cz

<sup>27</sup><https://tinyurl.com/o74f2tk>

## Úloha III.S ... zobecněná

10 bodů; průměr 6,33; řešilo 18 studentů

1. Mějme vodorovnou desku, ve které je malá dírka. Přes tuto díрку je provlečený provázek o délce  $l$ , na jehož spodním konci je zavěšeno závaží o hmotnosti  $M$ . Toto závaží lze považovat za hmotný bod. Na druhém konci provázku na rovné desce je druhý hmotný bod (kulička) o hmotnosti  $m$ . Provázek mezi nimi je napnutý díky závaží o hmotnosti  $M$ . Celou soustavu držíme v klidu tak, že část provázku pod deskou je ve svislém směru. Poté druhému hmotnému bodu, kuličce, udělíme rychlost  $v$  ve vodorovném směru kolmém na provázek ve chvíli, kdy soustavu uvolníme. V tomto příkladu neuvažujte žádné tření. Zvolte vhodné souřadnice a sestavte Lagrangeovu funkci pro tuto soustavu.
2. Mějme železnou tyč ohnutou do tvaru paraboly tak, že pokud v kartézské soustavě působí tíhové zrychlení v záporném směru osy  $y$ , pak tyč má stejný tvar jako funkce  $y = x^2$ . Po tyči se může volně pohybovat hmotný bod o hmotnosti  $M$ , ke kterému je pevnou nehmotnou tyčkou o délce  $l$  připevněno závaží o hmotnosti  $m$ . Takto jsme vytvořili kyvadlo se závěsem klouzajícím podél ohnuté tyče. Konstrukce dovoluje pohyb celé soustavy pouze v rovině paraboly. Určete vhodné zobecněné souřadnice a najděte Lagrangeovu funkci této soustavy.
3. Mějme přímkou nakloněnou pod úhlem  $\alpha$  vzhledem k vodorovné rovině, po které se pohybuje bez tření hmotný bod o hmotnosti  $m$ . Najděte vhodné zobecněné souřadnice této soustavy a sestavte Lagrangeovu funkci. Poté sestavte i Lagrangeovy rovnice, dvakrát je zintegrujte, a tak najděte řešení. Zkontrolujte si, zda vaše řešení vychází stejně, jako řešení, které byste získali středoškolskou metodou výpočtu. Při integraci nezapomeňte na integrační konstanty a vysvětlete jejich význam. Jaké budou jejich hodnoty, pokud se bod spustí z klidu z výšky  $h$ ?

1. Na začiatok je dôležité určiť, koľko stupňov voľnosti má daná úloha, teda koľko zovšeobecnovaných súradníc budeme potrebovať na jej popis. Všimneme si, že guľička, pohybujúca sa po doske, má dva stupne voľnosti. Môže rotovať okolo dierky, cez ktorú je prevlečená niť, zároveň sa môže pohybovať v smere priamo ďalej alebo bližšie od dierky, nakoľko špagát sa cez dierku tiež pohybuje bez trenia.

Potom je tu závažie, ktoré tiež môžeme reprezentovať ako hmotný bod. Ten má ale len jeden stupeň voľnosti. Môže sa hýbať hore a dole, inak povedané, ak zvolíme osy  $x$ ,  $y$  ležiace v rovine, tak sa závažie môže hýbať iba pozdĺž osi  $z$  (merané smerom nahor). Ďalej ale máme v tejto úlohe ešte jednu väzbu, tou je povrázok, ktorý spája hmotné body, a jeho dĺžka je nemenná. Súradnica  $r$ , ktorá udáva vzdialenosť guľičky od dierky, a súradnica  $z$ , ktorá udáva výšku závažia, budú zviazané pomocou vzťahu

$$l = r - z.$$

Na konštruovanie Lagrangeovej funkcie nám teda ostávajú už len dve nezávislé súradnice, a to  $z$  a súradnica vyjadrujúca uhol, ktorý zvierá špagát medzi dierkou a guľičkou s osou  $x$  (voľba osi  $x$  je ľubovoľná vďaka symetrii problému).

Teraz nasleduje druhý krok konštrukcie Lagrangeových rovníc, vyjadrenie kartézskych



súradníc pomocou zovšeobecných súradníc<sup>28</sup>

$$x_m = (l + z) \cos \varphi,$$

$$y_m = (l + z) \sin \varphi,$$

$$z_M = z.$$

Časovým derivovaním jednotlivých súradníc nájdeme vzťahy pre jednotlivé zložky rýchlosti v zovšeobecných súradniciach. Následne určíme vzťah pre kinetickú energiu  $T$

$$T = \frac{1}{2}m (\dot{z}^2 + (l + z)^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}M\dot{z}^2.$$

Následne určíme potenciál. V tomto prípade sa jedná o potenciálnu energiu závažia (gulička má počas celého pohybu rovnakú potenciálnu energiu, nemusíme ju preto uvažovať)

$$V = Mgz.$$

Lagrangeova funkcia pre tento problém bude potom vyzerat

$$L = \frac{1}{2}m (\dot{z}^2 + (l + z)^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}M\dot{z}^2 - Mgz.$$

2. Znova si najprv určíme zovšeobecné súradnice. Keďže úlohu riešime ako rovinný problém a vieme, že trajektória bodu  $M$  je zadaná ako explicitná funkcia (konkrétne  $y = ax^2$ , kde  $a$  je nejaká konštanta, aby nám sedeli jednotky), budú jeho obe súradnice vyjadrené pomocou jedinej súradnice  $x$ . Čo sa týka zovšeobecných súradníc pre druhý bod správjúci sa ako kyvadlo, môžeme použiť súradnice, ktoré sme si ukázali v seriáli. Musíme však ale pamätať, že jeho kartézske súradnice budú nielen súradnice kývajúceho sa kyvadla, ale je nutné k nim pripočítat aj súradnice závesu kyvadla o hmotnosti  $M$ . Vzťah medzi kartézskymi a zovšeobecnými súradnicami je teda

$$x_M = x,$$

$$y_M = ax^2,$$

$$x_m = x + l \sin \varphi,$$

$$y_m = ax^2 - l \cos \varphi.$$

Časovým derivovaním a dosadením do vzťahu pre kinetickú energiu dostaneme

$$T = \frac{1}{2}(M + m) \dot{x}^2 (1 + 4a^2 x^2) + \frac{1}{2}m (2l (\cos \varphi + 2ax \sin \varphi) \dot{\varphi} + l^2 \dot{\varphi}^2).$$

Potenciál bude potom súčet potenciálnych energií oboch telies, teda

$$V = Mga x^2 + mg (ax^2 - l \cos \varphi).$$

Lagrangeova funkcia bude jednoducho

$$L = \frac{1}{2}(M + m) \dot{x}^2 (1 + 4a^2 x^2) + \frac{1}{2}m (2l (\cos \varphi + 2ax \sin \varphi) \dot{\varphi} + l^2 \dot{\varphi}^2) - Mga x^2 - mg (ax^2 - l \cos \varphi).$$

<sup>28</sup>Tento ako aj nasledujúce kroky nebudem zvlášť komentovať, nakoľko sa jedná o mechanické počítanie. Budem len uvádzať, čo robíme a ako vyzerá výsledok. Prečo to robíme (keby niekto nevedel), je uvedené v seriáli.

3. Z hlediska toho, ako zvolit' zovšeobecnené súradnice, je tento problém triviálny. Hmotný bod totižto kopíruje svojou trajektóriou lineárnu funkciu zo sklonom  $\alpha$ . Prevod medzi kartézskymi a zovšeobecnenými súradnicami bude preto

$$\begin{aligned}x_m &= x, \\y_m &= x \operatorname{tg} \alpha.\end{aligned}$$

Čo nám dáva analogickým spôsobom ako v prvých dvoch úlohách vzťah pre kinetickú energiu

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha).$$

A takisto aj pre potenciálnu energiu

$$V = mgx \operatorname{tg} \alpha.$$

Lagrangeova funkcia bude potom samozrejme

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) - mgx \operatorname{tg} \alpha.$$

Napriek tomu, že sme to v seriáli explicitne nepreriešili na príklade, bolo v ňom odvodené, ako majú Lagrangeove rovnice vyzerat', čo nám dáva návod, ako ich zostavit', keď máme Lagrangeovu funkciu. V našom prípade najprv parciálne derivujeme  $L$  podľa  $\dot{x}$  a výsledok následne podľa času. Od toho ešte odčítame deriváciu  $L$  podľa  $x$  a celé to položíme rovné nule. Lagrangeova rovnica (bude samozrejme len jedna) má teda tvar

$$m\ddot{x} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + mg \operatorname{tg} \alpha = 0.$$

Rovnicu upravíme

$$\ddot{x} = -\frac{g \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = -g \sin \alpha \cos \alpha.$$

Tento vzťah stačí dvakrát preintegrovať, čím dostanem

$$x = -\frac{1}{2} g t^2 \sin \alpha \cos \alpha + C_1 t + C_2,$$

kde  $C_1$  má význam počiatočnej rýchlosti a  $C_2$  má význam počiatočnej polohy. Ak počiatočná rýchlosť bola nulová a počiatočná výška nad zemou  $h$ , pričom sme počiatok súradnicovej sústavy položili do bodu, kde sa pretína naklonená rovina s podložkou, potom v kartézskych súradniciach pre  $t = 0$  z rovnice pre  $y$  máme

$$\begin{aligned}h &= x \operatorname{tg} \alpha, \\x &= \frac{h}{\operatorname{tg} \alpha}.\end{aligned}$$

Kompletné riešenie tejto úlohy je

$$x = -\frac{1}{2} g t^2 \sin \alpha \cos \alpha + \frac{h}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Teraz to v rychlosti skontrolujeme so stredoškolským riešením. Rozložíme tiažovú silu v smere rovnobežnom a kolmom so šikmou rovinou. Vidíme, že na teleso pôsobí len sínusová zložka gravitačného zrýchlenia

$$a = g \sin \alpha ,$$

z čoho je dráha prejdená z pokoja za čas  $t$  pri tomto konštantnom zrýchlení

$$a = \frac{1}{2}gt^2 \sin \alpha .$$

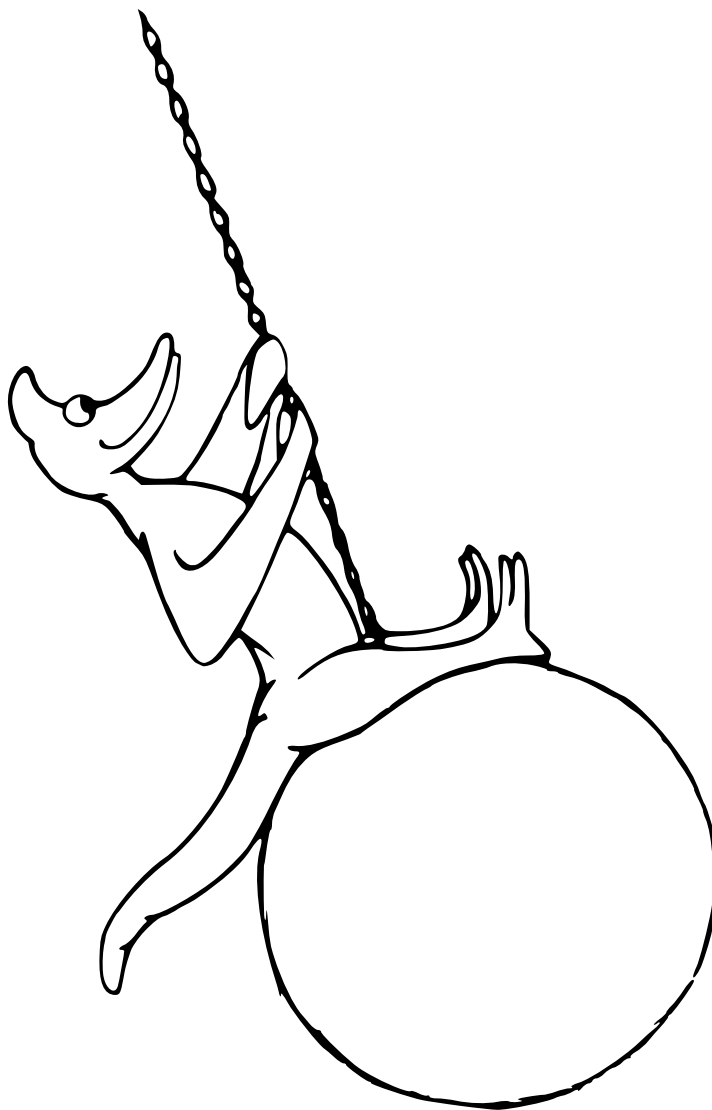
Aby sme to ale mohli porovnať s našim výsledkom vypočítaným cez Lagrangeove rovnice, musíme to trochu upraviť. Našou zvolenou zovšeobecnou súradnicou bola  $x$ -ová súradnica telesa. Chceme teda vedieť posun telesa v  $x$ -ovom smere. Ten získame tak, že získanú dráhu prenásobíme kosínusom uhlu  $\alpha$ . Teleso sa zároveň pohybuje v opačnom smere ako je smer osy  $x$ , preto bude tento člen záporný. Nazáver musíme ešte pripočítať  $x$ -ovú súradnicu východzieho bodu. Východzí bod je charakterizovaný výškou ( $y$ -novou súradnicou)  $h$ . Musí preto platiť

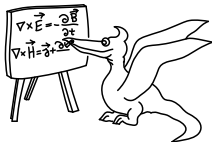
$$h = x_0 \operatorname{tg} \alpha .$$

Z toho jednoducho vyjadríme počiatočnú súradnicu  $x_0$  a dosadíme do stredoškolsky získaného tvaru rovnice, čím dostaneme rovnaký výraz, ako pri výpočte skrz Lagrangeove rovnice.

***Jakub Jambrich***

`jakubj@fykos.cz@fykos.cz`





## Seriál: Integrály pohybu

V tejto časti seriálu dokončíme príklad, ktorý sme minule začali – výpočet matematického kyvadla. K tomu ale budeme potrebovať vedieť, čo je to Taylorov rozvoj. Ďalej si ukážeme, ako sa dajú s pomocou Taylorovho rozvoja vyriešiť úlohy, ktoré analyticky riešiteľné nie sú. Potom sa pozrieme na to, aké nenumerné metódy riešenia Lagrangeových rovníc existujú, a začneme sa venovať použitiu teoretickej mechaniky v nebeskej mechanike, čo bola historicky hlavná motivácia, kvôli ktorej bol Lagrangeov formalizmus vyvíjaný.

### Taylorov rozvoj

Toto bude trochu matematická vsuvka do seriálu, kde sa čitateľom, čo vedia derivovať, pokúsím intuitívne vysvetliť, čo to je Taylorov rozvoj. Tiež ukážem, ako sa počíta, ale najmä uvediem základné vzťahy pre Taylorov rozvoj, ktoré sa v teoretickej mechanike zídu pri počítaní príkladov.

Asi najintuitívnejší spôsob, ako chápať a predstavovať si funkcie, je predstaviť si ich graf. Z grafu človek jasne vidí, ako sa funkcia správa, kde klesá alebo stúpa, ako veľmi klesá alebo stúpa, aké má korene a podobne. Mnohé funkcie sú ale veľmi náročné na analýzu a výpočet ich presných hodnôt, prípadne sa veľmi náročne integrujú (čo nám znemožňuje, či výrazne sťažuje riešenie diferenciálnych rovníc, ktoré obsahujú takéto funkcie). Na druhej strane, existuje trieda funkcií, ktoré sa dajú veľmi triviálne integrovať a derivovať – polynómy (mnohočleny). S týmito funkciami ste sa už všetci stretli na konci základnej alebo začiatku strednej školy. Vlastnosti a rôzne manipulácie s lineárnymi a kvadratickými funkciami sú vám teda určite veľmi dobre známe a netreba vás presviedčať, že vypočítať hodnotu ľubovoľného polynómu v danom bode bez kalkulačky vie s ľubovoľnou presnosťou každý z vás. Keby som vám dal ale za úlohu zrátať na papieri  $\sin(0,82)$ , nikto (kto nepozná Taylorov rozvoj) by to nijako nedokázal.

Možno ste sa niekedy hrali s nejakým programom na vykresľovanie grafov funkcií a všimli si, že mnohé funkcie majú podobný tvar. Exponenciála je napríklad funkcia, ktorá veľmi rýchlo rastie. Aj  $x^2$ ,  $x^3$  alebo iné vyššie stupne polynómov rýchlo rastú. Ak si napríklad exponenciálu v takomto programe (napríklad Wolfram Alpha) vykreslíte a vo vedľajšom okne sa budete hrať so sčítaním polynómov rôznych stupňov, s trochou šikovnosti a investovaného času sa dostanete k polynómu, ktorého graf sa bude veľmi podobáť na graf exponenciály (aspoň vo vykreslenej oblasti, pre veľké  $x$  exponenciála začne rásť oveľa rýchlejšie ako akýkoľvek polynóm).

Tento fakt si ľudia všimli už oveľa skôr. Na takejto podobnosti správne zvolených polynómov a danej funkcie je postavený Taylorov rozvoj. V skratke sa jedná o to, že ľubovoľnú (dostatočne slušnú) funkciu vieme na nejakom intervale ľubovoľne dobre aproximovať určitým polynómom. Táto vlastnosť je veľmi užitočná, pretože častokrát nás funkcie zaujímajú len na nejakých krátkych intervaloch. Napríklad sínus. Sínus má periódu, takže pre ľubovoľne veľké číslo ho vieme spočítať, ak dokážeme spočítať sínus všetkých čísel na intervale o dĺžke periódy sínu  $2\pi$  (napr.  $(-\pi, \pi)$ ). Sínus by nám teda teoreticky stačilo dobre aproximovať len na tomto krátkom intervale. V prípade sínusu, ktorý chceme aproximovať v okolí nuly, môžeme použiť polynóm

pozostávajúci napríklad z piatich členov

$$\sin(x) \sim x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}.$$

Nie je ťažké si všimnúť vzor v správaní tohto polynómu. Ak by sme chceli aproximovať túto funkciu na celom intervale presne, mohli by sme pokračovať v pridávaní členov polynómu až do nekonečna. Ukazuje sa, že takýto nekonečný polynóm sa naozaj bude rovnať funkcii sínus dokonca na celom jej definičnom obore, teda všetkých reálnych číslach. V "modernej matematike" je práve takýto nekonečný polynóm (rad, súčet postupnosti) definíciou funkcie sínus (spolu s inými definíciami, ktoré sú tejto ekvivalentné). Sínus vieme potom zapísať pomocou nekonečného *Taylorovho radu* nasledovne

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Pre usilovného čitateľa zadávam úlohu rozmyslieť si, najlepšie rozpísať na papier, že prvých 5 členov radu je naozaj rovnakých ako sú členy v polynóme aproximujúcom sínus uvedenom skôr. Ďalej môžem taktiež odporučiť usilovnému čitateľovi, aby si vyčíslil hore uvedený polynóm v bode  $\pi$  a zároveň si vyčíslil v bode  $\pi$  aj sínus. Budete mať lepšiu predstavu, ako dobre Taylorov rad aproximuje sínus.

Usilovní čitatelia mi určite môžu potvrdiť, že výsledok bol v oboch prípadoch veľmi podobný. Pre sínus to bola nula, pre polynóm to neprezradím, ale prezradím, že koreň tohto polynómu je  $\sim 3,1487$ , čo sa k číslu  $\pi$  blíži veľmi pôsobivo.

Častokrát nie je jednoduché zistiť Taylorov rad trikom alebo pozorovaním (aj v tých málo prípadoch, keď sa to dá, to chce veľmi veľkú skúsenosť a veľa napočítaných príkladov). Existuje ale metóda, ako vieme postupne dopočítavať jeden za druhým členy Taylorovho radu. Uvedieme rovno jeho vzorec a jedným dychom dodávame, že si môžete všimnúť, že daný rad je zvolený tak, aby mal všetky derivácie v danom bode rovnaké ako pôvodná funkcia.

Zoberme ľubovoľnú funkciu  $f(x)$  v bode ( $x = a$ ), ktorá má v tomto bode všetky derivácie a všetky sú konečné (dôvod je jasný zo samotného vzťahu - ak by derivácie neexistovali, nemal by zmysel). Na intervale obsahujúcom bod  $a$  je potom Taylorov rad tejto funkcie

$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a) \frac{(x-a)^n}{n!},$$

kde  $f^{(n)}(a)$  je  $n$ -tá derivácia našej funkcie v bode  $a$ .

Každú normálnu (tzv. analytickú) funkciu  $f$  vieme potom zapísať ako  $f(x) = T_f(x)$ . Existujú aj funkcie, pre ktoré to neplatí, ale s nimi sa nestretáme. Overté si, prosím, že ak tento vzorec aplikujeme na sínus v bode  $a = 0$ , dostaneme postupne polynóm, ktorý sme uviedli ako aproximáciu sínu. Použijeme tento vzorec ešte pre odvodenie Taylorovho radu pre exponenciálu  $e^x$  v bode  $a = 0$ . Derivácia eponenciály je exponenciála. Exponenciála v bode 0 je rovná jednej. Taylorov rad exponenciály bude teda vyzeráť nasledovne

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Ako cvičenie odporúčam odvodiť si zo vzorčeka Taylorov rad pre  $\cos(x)$  a  $\ln(1+x)$  so stredom v bode  $a = 0$ .

*Matematické kyvadlo – In medias res*

V minulej časti sme si ukazovali, ako postupne nájsť zovšeobecnené súradnice, z nich čisto mechanicky zostaviť Lagrangeovu funkciu a z nej postupným derivovaním zostaviť Lagrangeove rovnice. To sme si ale neukázali na našom príklade matematického kyvadla. Dokončíme to teraz. Pre pripomenutie, Lagrangeova funkcia kyvadla mala tvar

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl \cos(\varphi)$$

a Lagrangeove rovnice zostavujeme nasledovne

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

Dosadíme za  $L$  Lagrangeovu funkciu matematického kyvadla a po prederivovaní dostaneme

$$ml^2\ddot{\varphi} + mgl \sin(\varphi) = 0.$$

Vidíme, že sa jedná o obyčajnú diferenciálnu rovnicu druhého rádu, pretože najvyššia derivácia našej hľadanej funkcie  $\varphi(t)$  je druhá derivácia. Čo je ale oveľa väčší problém, rovnica je zároveň aj *nelineárna*, a to práve jej druhý člen, ktorý je tvorený sínusom nami hľadanej funkcie. Štandardne sa nedajú podobné diferenciálne rovnice riešiť analyticky, tj. pomocou známych dobre definovaných funkcií. Riešiť ich môžeme napríklad numericky s presnosťou, akú uznáme za vhodnú. Inou možnosťou je riešiť rovnicu analyticky tak, že pred tým, ako sa pustíme do riešenia, danú nelineánu<sup>29</sup> funkciu aproximujeme. Toto je okamih, keď prvýkrát v praxi použijeme Taylorov rozvoj. Rozvineme našu funkciu do Taylorovho radu. Vieme, že čím sa od bodu, v ktorom funkciu rozvíjame, nachádzame ďalej, tým viac členov jej rozvoja potrebujeme pre dosiahnutie požadovanej presnosti. Naopak, keď sme blízko stredu tohto rozvoja, stačí nám členov menej. V istej malej vzdialenosti nám dáva dostatočnú presnosť (čím vyššiu presnosť požadujeme, tým menšie je okolie bodu, kde je aproximácia presná) aj prvý člen Taylorovho rozvoja. Ten je obvykle lineárny, prípadne konštantný (v prípade konštantného člena vezmeme prvé dva členy). V tomto prípade vezmeme z rozvoja sínusu len prvý lineárny člen. Dostávame *linearizovanú* diferenciálnu rovnicu

$$ml^2\ddot{\varphi} + mgl\varphi = 0.$$

Táto rovnica sa dá jednoducho riešiť. Na riešenie diferenciálnych rovníc sa však v tomto seriáli nebudeme sústreďovať, ale necháme ich riešenie na počítač. Osobne preferujem, ako ste si už mohli všimnúť, na riešenie rovníc WolframAlpha, ktorý nám v tomto prípade dá výsledok

$$\varphi(t) = c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) + c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right).$$

Kde  $c_1$  a  $c_2$  sú integračné konštanty. Ich hodnoty si vieme jednoducho dopočítať. Napríklad tak, že budeme požadovať, aby na začiatku malo kyvadlo výchylku  $\varphi_0$  a uhlovú (a teda aj klasickú) rýchlosť  $\dot{\varphi} = 0$ . Z prvej podmienky vidíme, že  $c_1 = \varphi_0$ , čo dostaneme po dosadení  $t = 0$  do našej pohybovej rovnice.

<sup>29</sup>Medzi nelineárne funkcie samozrejme patria aj kvadratické, kubické a iné mocninné funkcie. Nemožnosť analyticky riešiť rovnice je však najmä pri nelineárnych rovniciach, kde nelinearita je spôsobená inou ako polynomiálnou funkciou.

Rýchlosť dopočítame tak, že prederivujeme rovnicu pre polohu kyvadla, aby sme dostali rovnicu pre uhlovú rýchlosť kyvadla

$$\dot{\varphi}(t) = c_2 \sqrt{\frac{g}{l}} \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) - \sqrt{\frac{g}{l}}\varphi_0 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right).$$

Z tejto rovnice a podmienky, že rýchlosť má byť na počiatku nulová, dopočítame druhú konštantu. Celý druhý člen rovnice bude po dosadení  $t = 0$  rovný nule, zatiaľčo prvý bude nulový len ak  $c_2 = 0$ . Naše riešenie pre dané počiatočné podmienky bude teda vyzerat

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right).$$

Práve sme si podrobne ukázali jeden zo spôsobov riešenia Lagrangeových rovníc. Jedná sa o to najjednoduchšie, čo nám môže napadnúť. Hlavnou nevýhodou je ale to, že riešenie, ktoré taktó nájdeme, nie je presným riešením, a správne výsledky dáva len pre body blízke nule (pretože spravidla linearizujeme funkciu v nule). Existuje ale ďalší trik použiteľný pri niektorých príkladoch, ktorý nám výrazne uľahčuje ich analytické riešenie.

### Integrály pohybu

Jeden z trikov, ktoré môžeme pri riešení Lagrangeových rovníc použiť, je získať dodatočné rovnice, ktoré nám zjednodušia riešenie samotných Lagrangeových rovníc. Zo strednej školy viete, že pri riešení úloh z mechaniky ste častokrát využívali zákony zachovania. Univerzálny sa môže zdať zákon zachovania mechanickej energie, ktorý ale neplatí vždy. Ďalej sú užitočné aj zákony zachovania hybnosti a momentu hybnosti. Častokrát nebolo jednoduché zistiť, najmä pri veľmi komplexných problémoch, ktorá zložka hybnosti sa zachováva a prečo. Prípadne či sa zachováva alebo nezachováva energia. V Lagrangeovom formalizme je tento problém náležite ošetrený a z matematických vlastností Lagrangiánu (Lagrangeovej funkcie) vieme jednoducho určiť, ktoré veličiny sa zachovávajú počas celého deja. Tieto veličiny nazývame *integrály pohybu*. Matematickejšie povedané, integrál pohybu hľadáme ako funkciu  $f(q_j, \dot{q}_j)$  zovšeobecných súradníc a zovšeobecných rýchlostí, pričom od tejto funkcie požadujeme, že na skutočnej trajektórii riešiacej Lagrangeove rovnice bude nadobúdať po celý čas jednu konštantnú hodnotu. Povedali sme si, že v praxi sa jedná napríklad o hybnosť telesa. Z Lagrangeových rovníc vidíme, kedy sa niečo ako „zovšeobecnená hybnosť“ zachováva, celkom rýchlo.

Predpokladajme, že Lagrangeova funkcia závisí na všetkých zovšeobecných súradniciach okrem nejakej jednej  $q_i$ . Potom  $i$ -tu Lagrangeovu rovnicu získame

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

Derivácia Lagrangiánu podľa tejto súradnice bude teda 0 (pretože pri zmene tejto súradnice sa Lagrangián nezmení). Z toho dostávame

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0.$$

Na záver preintegrujeme podľa času

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \text{konst.}$$



Vidíme, že tento výraz sa bude stále zachovávať, nakoľko je po celej trajektórii konštantný. Na záver možno ešte poznamka k názvu „zovšeobecnená hybnosť“. Keďže Lagrangián má fyzikálny rozmer energie (jedná sa o rozdiel dvoch energií), keď zderivujeme „energiu“ podľa „rýchlosti“, dostaneme niečo, čo má fyzikálny rozmer hybnosti.

Okrem toho existuje ešte jeden integrál pohybu,<sup>30</sup> a ten sa nazýva „zovšeobecnená energia“. Zaujímavejšie než jeho konštrukcia je, že k Lagrangiánu existuje zachovávajúca sa zovšeobecnená energia práve vtedy, keď Lagrangián explicitne nezávisí na čase (teda na čase závisí len prostredníctvom zovšeobecných súradníc a rýchlostí). Jej definícia je

$$h(q_i, \dot{q}_i) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L.$$

Znova si všimneme, že táto veličina má fyzikálny rozmer energie, takže jej názov dáva dobrý zmysel.

Ešte predtým, ako reálne začneme riešiť príklady, je podľa mňa dôležité ukázať (pre niektorých zopakovať) nový spôsob hľadania zovšeobecných súradníc.

### Najčastejšie krivočiare súradnice

V mnohých úlohách sa stretávame s pohybom po povrchu sféry alebo po kružnici, alebo s problémom, ktorý má rotačnú symetriu. Hlboko v podstate prírody je totižto zakorenená jedna vlastnosť, ktorej sa snáď budeme venovať v poslednom diele seriálu a z ktorej sa dá odvodiť celá fyzika. Zjednodušene by sa dalo povedať, že príroda je „lenivá“, a preto nechá planéty obiehať okolo Slnka po elipsách a nie po napríklad štvorcoch. Vďaka tejto podivuhodnej vlastnosti sa zakrivený pohyb najčastejšie odohráva po elipsách veľmi blízkych kružniciam (mimo mechaniky na Zemskom povrchu, kde uvažujeme homogénne gravitačné pole). Preto je častokrát výhodnejšie počítať v súradniciach, ktoré dobre vystihujú symetriu danej sféry alebo kružnice. Zavádzajú sa preto polárne a sférické súradnice.

Polárne súradnice definujeme

$$\begin{aligned}x &= r \cos(\varphi), \\y &= r \sin(\varphi).\end{aligned}$$

Ak si v rovine nakreslíme kartézsku mriežku, potom bod s kartézskymi súradnicami  $[x, y]$  môžeme popísať aj pomocou uhlu  $\varphi$  zovretého medzi kladným smerom osy  $x$  a polpriamkou z počiatku do nášho bodu; uhol meriame proti smeru hodinových ručičiek (smerom od osi  $x$  k osi  $y$ ). Súradnica  $r$  je potom vzdialenosť tohto bodu od nuly meraná po ich spojnici.

Druhé, o čosi ťažšie na predstavu, sú sférické súradnice. Prevod medzi sférickými a kartézskymi súradnicami je nasledovný

$$\begin{aligned}x &= r \cos(\varphi) \sin(\theta), \\y &= r \sin(\varphi) \sin(\theta), \\z &= r \cos(\theta).\end{aligned}$$

Môžeme si všimnúť, že je to podobné ako pri polárnych súradniciach, len ešte prenasobené sínusom a kosínusom ďalšieho uhla, ktorý sme si označili  $\theta$ . To, že vzdialenosť bodu od počiatku

<sup>30</sup>V skutočnosti môžu existovať aj iné integrály pohybu, spomenuté sa však dajú najšť pomerne jednoducho.

je  $r$  je zrejme zjavné. Ostatné dva uhly si vieme jednoducho predstaviť, keď si predstavíme, ako to vyzerá v planetáriu (tam sa nad nami nachádza sféra). V tomto prípade je polomer sféry pevný a nemení sa. Ak stojíme v strede, tak spojnica nás a nejakého význačného bodu (v planetáriu sa používa juh) je naša kartézská os  $x$ . Súradnice nejakej hviezdy vieme určiť pomocou sférických súradníc: hviezdu spojíme najkratšou možnou čiarou po sfére s horizontom. Teda spravíme jej priemet na „horizont“. Potom odčítame uhol medzi týmto jej priemetom a nami zavedenou osou  $x$  proti smeru hodinových ručičiek, čo bude naša súradnica  $\varphi$ . Na záver určíme súradnicu  $\theta$  tak, že od  $90^\circ$  odčítame uhol medzi horizontom a hviezdou po nami nájdenej najkratšej spojnici.

Snažil som sa to vysvetliť zrozumiteľne a názorne, na internete sa ale nachádza množstvo obrázkov pre tých z vás, ktorí veci potrebujú vidieť, a nestačí im vizualizovať si ich. A možno ešte jedna poznámka k zavedeniu sférických súradníc. Možno vám prišlo neintuitívne, ako som v poslednom kroku odčítal uhol medzi hviezdou a obzorom od  $90^\circ$ . Samozrejme, dostaneme rovnako dobre použiteľné súradnice, ak  $\theta$  definujeme priamo ako uhol medzi (pre náš prípad) horizontom a hviezdou. Prevodné vzťahy sa potom trochu pozmenia. Ak ste zvyknutí na túto definíciu sférických súradníc, pokojne ich používajte, no pamätajte, že nemusí byť na prvý pohľad jasné, že vzťahy získané pri týchto rôznych zavedeniach súradníc sú totožné.

Na záver tejto časti si spomenieme ešte jeden príklad, z ktorého výsledkov budeme intenzívne ťažiť nabudúce.

### *Pohyb hmotnej častice v gravitačnom poli*

V roku 1889 Nórsko-Švédsky kráľ Oskar II. vyhlásil k príležitosti svojich 60-tych narodenín súťaž o nájdenie analytického riešenia problému troch telies vo forme konvergujúceho mocninového radu, ktorú sám označil za (vo voľnom preklade): „Súťaž o dôležitý objav v ríši vysokej matematickej analýzy“. Už nasledujúci rok Henry Poincaré publikoval článok v časopise *Acta Mathematica*, v ktorom dokázal, že neexistuje dostatok integrálov pohybu na analytické vyriešenie problému troch telies, čo kráľa uspokojilo a odmena za „výhru“ v súťaži mu bola udelená.

Až v roku 1912 sa Fínskemu matematikovi Karlovi Sundmanovi podarilo vyriešiť tento problém, avšak formou radu s exponentmi, ktoré sú celočíselným násobkom  $\frac{1}{3}$ . Tento rad však konverguje veľmi pomaly, a aby dosahoval presnosť porovnateľnú s numerickými výpočtami, je nutné vziať približne jeho prvých  $10^{8000000}$  členov. Problém troch telies je tak prakticky riešiteľný iba numericky. Existujú však zjednodušené prípady, ktorých riešenia s rozumnou presnosťou môžeme získať aj analyticky. Takým je napríklad systém Slnko-Zem-Mesiac.

Než sa ale dostaneme k tomuto problému, musíme si prejsť cez problém dvoch telies. A predtým ako sa dostaneme k tomu, je potrebné si ukázať, ako vyzerá Lagrangian hmotného bodu, ktorý sa pohybuje v nejakom potenciálovom poli. Budeme predpokladať, že naše skúmané teleso svojím pohybom toto potenciálové pole nijako neovplyvňuje.

Naše teleso sa bude pohybovať v centrálnom poli s potenciálom  $V(r)$  a zo skúseností vieme, že sa bude pohybovať v jednej rovine (túto skúsenosť si v úlohách k seriálu budete mať možnosť overiť). Na jeho popis preto použijeme polárne súradnice. V nich bude jeho Lagrangian

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r).$$

Teraz uvidíme silu integrálov pohybu. Vo všeobecnosti by boli Lagrangeove rovnice v tomto prípade 2 rovnice druhého rádu, kdežto ak určíme integrály pohybu, dokážeme z nich po úpra-

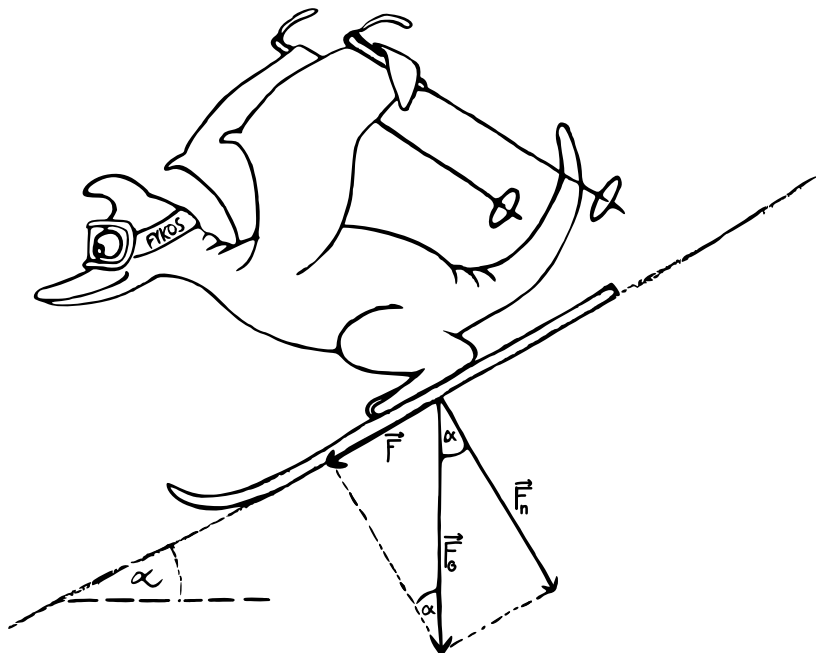
vách zostavit jediná diferenciálnu rovnicu prvého rádu. Pre premennú  $r$  bude naša výsledná diferenciálna rovnica

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m} \left( E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2} \right),$$

kde  $E$  je mechanická energia a  $l$  moment hybnosti telesa - dva integrály pohybu.

K riešeniu tejto rovnice sa dostaneme v seriálovej úlohe a ďalšom diele seriálu. Následne plynule prejdeme k problému dvoch telies, riešeniu Keplerovej úlohy a možno aj odvodeniu Keplerových zákonov.

Mnohým z vás ďakujem za reakcie na výzvu k spätnej väzbe, dojmy boli zatiaľ celkom pozitívne, za čo som rád, pretože je to pre mňa povzbudzujúce. Samozrejme naďalej platí, že budem rád za vaše návrhy, pripomienky a komentáre k seriálu. Som optimista a dúfam, že počet riešiteľov seriálu sa nebude znižovať, tak si všetci navzájom držíme palce.





## Pořadí řešitelů po III. sérii

Kompletní výsledky najdete na <http://fykos.cz>.

## Kategorie prvních ročníků

jméno Student Pilný	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	III	„%“	%	Σ
		6	6	6	8	8	10	12	10	66	100	198	
1. <i>Eva Feldbabelová</i>	Katolické gymnázium Třebíč	0	6	6	6	2	–	–	7	<b>27</b>	76	134	
2. <i>Jiří Kohl</i>	Biskupské G, Brno	6	6	5	8	6	–	12	–	<b>43</b>	84	124	
3. <i>Adam Krška</i>	G, Mikulov	4	4	6	–	1	2	11	–	<b>28</b>	65	86	
4. <i>Vojtěch Stránský</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	2	2	6	4	–	4	10	3	<b>31</b>	60	68	
5. <i>Benedikt Bareš</i>	G Dobruška	8	4	–	–	–	–	–	–	<b>12</b>	74	67	
6. <i>Vojtěch Votruba</i>	G Jana Keplera, Praha	6	–	6	–	2	–	–	1	<b>15</b>	56	64	
7. <i>Adam Húšťava</i>	European School Luxembour g II	8	–	–	–	–	2	10	–	<b>20</b>	75	60	
8. <i>Aleš Opl</i>	Gymnázium Praha 3	6	6	6	–	–	–	–	–	<b>18</b>	87	55	
9. <i>Matěj Charousek</i>	G Na Vítězné pláni, Praha	2	4	2	1	1	5	4	–	<b>19</b>	40	47	
10. <i>Barbora Čemanová</i>	G, Park mládeže, Košice	2	–	–	–	–	–	–	–	<b>2</b>	48	35	
11. <i>Sára Byšková</i>	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	63	33	
12. <i>Adéla Kolembusová</i>	European School Luxembour g II	2	–	–	–	–	–	–	–	<b>2</b>	50	29	
13. <i>Filip Zikeš</i>	G P. Bezruč, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	–	–	71	24	
14. <i>Petr Šicho</i>	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	32	18	
15. <i>Eliška Durstová</i>	G, Dvůr Králové n. L.	–	4	1	–	–	–	–	–	<b>5</b>	71	17	
16. <i>Milan Marek</i>	G Neumannova, Žďár n. S.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	35	15	
17. <i>Jan Ptáček</i>	G, Špitálská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	58	11	
18. <i>Zuzana Lisztwanová</i>	G J. Słowackiego, Český Tě- šín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	83	10	
19. <i>Lukáš Veškrna</i>	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	38	8	
20.–21. <i>Natália Kalinová</i>	G, P. Horova, Michalovce	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	7	
20.–21. <i>Bianka Tomaščíková</i>	G Varšavská, Žilina	–	–	–	–	–	–	–	–	–	54	7	
22.–26. <i>Jiří Antoňů</i>	G, Špitálská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	6	
22.–26. <i>Tereza Preclíková</i>	G Dobruška	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	6	
22.–26. <i>Matyáš Svoboda</i>	G, Mikulov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	6	
22.–26. <i>Adam Šebesta</i>	Masarykovo G, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	6	
22.–26. <i>Jan Šuráň</i>	G, Špitálská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	6	

## Kategorie druhých ročníků

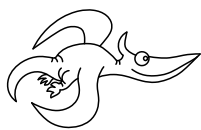
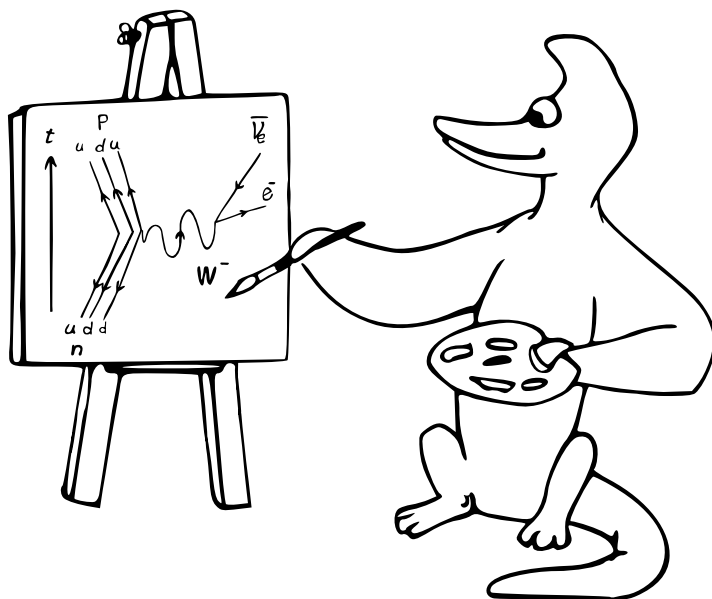
jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	III	„%“	%	Σ
<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	6	6	6	8	8	10	12	10	66	100	198	
1. <i>Robert Gemrot</i>	G Komenského, Havířov	6	6	6	8	9	10	12	4	<b>61</b>	78	154	
2. <i>Martina Daňková</i>	Klasické a španělské G, Brno	8	6	6	–	–	10	11	–	<b>41</b>	84	118	
3. <i>Patrik Kašpárek</i>	Katolické gymnázium Třebíč	6	6	5	–	–	2	12	4	<b>35</b>	65	113	
4. <i>Soňa Husáková</i>	G, Českolipská, Praha	8	4	6	2	–	9	6	–	<b>35</b>	71	100	
5. <i>Lubor Čech</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	6	6	5	2	0	4	1	–	<b>24</b>	56	99	
6. <i>Adam Mendl</i>	G P. de Coubertina, Tábor	–	–	–	4	9	–	9	–	<b>22</b>	83	96	
7. <i>Elena Chochořáková</i>	G L. Svobodu, Humenné	6	6	5	–	–	–	–	–	<b>17</b>	86	85	
8. <i>Marco Souza de Joode</i>	G Nad Štolou, Praha	6	6	5	–	–	2	–	6	<b>25</b>	66	84	
9. <i>Jan Klivan</i>	G, Dačice	4	4	5	–	–	–	9	–	<b>22</b>	63	64	
10. <i>Tomáš Tuleja</i>	G L. Svobodu, Humenné	6	6	–	–	–	–	–	–	<b>12</b>	95	56	
11. <i>Radek Lacko</i>	G Komenského, Havířov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	65	47	
12. <i>Daniel Perout</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	6	5	–	–	2	–	–	<b>13</b>	62	33	
13. <i>Jarmila Terpáková</i>	G L. Svobodu, Humenné	–	–	–	–	–	–	–	–	–	82	28	
14. <i>Karolína Letochová</i>	G, Šternberk	–	–	–	–	–	–	–	–	–	51	26	
15. <i>Jan Červeňan</i>	G J. Pivečky, Slavičín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	52	23	
16. <i>Šárka Štěpánková</i>	G J. Resslera, Chrudim	–	–	–	–	–	–	–	–	–	63	19	
17.–18. <i>Matěj Dvořák</i>	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	72	18	
17.–18. <i>Lucia Gintnerová</i>	G Sv. Františka, Žilina	–	–	–	–	–	–	–	–	–	90	18	
19. <i>Martin Polyácko</i>	G Alejová, Košice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	58	15	
20. <i>Gabriel Ščurka</i>	ŠpMNDaG, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	53	10	
21.–22. <i>Daniel Czimege</i>	SPŠ chemická, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	47	9	
21.–22. <i>Kristýna Chlupáčová</i>	G J. Resslera, Chrudim	0	4	5	–	–	–	–	–	<b>9</b>	50	9	
23. <i>Vojtěch Janota</i>	G, Strakonice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	47	7	
24. <i>František Krůs</i>	Masarykovo G, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	27	6	
25. <i>Laura Hanousková</i>	G J. Wolkera, Prostějov	–	2	–	–	–	1	–	–	<b>3</b>	19	3	

## Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	III	„%“	%	Σ
Student	MFF UK	3	6	8	8	8	10	12	10	60	100	180	
1. Viktor Materna	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	4	3	6	8	8	10	12	–	51	90	153	
2. Martin Schmied	G, Jihlava	4	3	6	8	8	8	9	10	56	77	138	
3. Jaroslav Herman	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	4	3	6	8	8	2	10	5	46	74	134	
4. Jakub Jobus	G Jura Hronca, Bratislava	4	2	6	4	4	4	10	10	44	71	128	
5. Jan Benda	G, Litoměřická, Praha	5	3	6	8	8	–	11	10	51	90	116	
6. Jaroslav Scheinpflug	G Jírovcova, České Budějovice	4	3	5	3	4	5	–	7	31	67	109	
7. David Kománek	G, Špitálská, Praha	3	3	6	6	–	–	12	–	30	73	104	
8. Radka Krížová	G J. Heyrovského, Praha	3	3	5	2	6	–	7	–	26	78	102	
9. Martin Vavřík	G, Šumperk	4	–	5	–	10	–	–	–	19	87	95	
10. Jiří Zelenka	G Z. Wintra, Rakovník	2	3	6	–	–	2	12	–	25	63	84	
11. Jakub Strnad	Klvaňovo G Kyjov	3	3	6	8	–	6	4	0	30	55	82	
12. Jan Divila	G, Lesní čtvrť, Zlín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	52	52	
13.–14. Ronald Doboš	G Poštová, Košice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	85	51	
13.–14. Pavla Rudolfová	G, Vídeňská, Brno	–	–	6	–	–	–	–	–	6	91	51	
15. Veronika Hendrychová	G, Turnov	3	2	2	–	–	–	–	–	7	64	49	
16. Lukáš Hronek	G, Písek	–	–	–	–	–	–	–	10	10	100	47	
17. Jan Obořil	Klasické a španělské G, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	–	74	37	
18. Jakub Pravda	ŠpMNDaG, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	34	
19.–20. Kateřina Barotová	G, Olomouc-Hejčín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	60	28	
19.–20. Matěj Holubička	Zemědělská akademie a Gymnázium	a 3	2	–	–	–	3	6	–	14	56	28	
21. Matěj Krátký	PORG, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	71	27	
22.–23. Petra Pálkovácsová	G, Nové Zámky	–	–	–	–	–	–	–	–	–	38	23	
22.–23. Václav Zvoníček	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	–	–	–	–	–	–	–	72	23	
24. Josef Polášek	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	48	22	
25. Rachel Johnson	Richardson High School, USA	–	–	–	–	–	–	–	–	–	42	21	
26. Milan Tichavský	Slezské G, Opava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	20	
27. Kryštof Jasenský	G, Lesní čtvrť, Zlín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	45	19	
28.–29. Minh Khoi Ho	Hanoi - Amsterdam HS, Vietnam	–	–	–	–	–	–	–	–	–	76	16	
28.–29. Filip Zukal	G, Blansko	–	–	–	–	–	–	–	–	–	27	16	
30. Eva Vochozková	Biskupské G, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	–	62	13	
31. Jan Vondra	G Týn nad Vltavou	1	–	–	–	–	–	–	–	1	48	12	
32. Dominika Kodlová	PORG, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	29	11	
33. Daniel Krátký	G, Trutnov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	59	10	
34. Kateřina Roupová	G, Blansko	–	–	–	–	–	–	–	–	–	23	9	
35. Erika Žitniaková	Evanjelické G, Banská Bystrica	–	–	–	–	–	–	–	–	–	23	5	
36.–37. Lucia Krajčoviechová	G Jura Hronca, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	4	
36.–37. Martina Pivková	Evanjelické G, Banská Bystrica	–	–	–	–	–	–	–	–	–	40	4	

## Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	III	„%“	%	Σ
<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	3	3	6	8	8	10	12	10	60	100	180	
1. <i>Martin Vaněk</i>	G, Vysoké Mýto	4	3	6	8	8	-	-	10	<b>39</b>	<i>93</i>	<i>127</i>	
2. <i>Kateřina Rosická</i>	G J. Ortena, Kutná Hora	3	2	6	8	10	3	-	7	<b>39</b>	<i>88</i>	<i>107</i>	
3. <i>Ivan Hudák</i>	ESS, Lip. Mikuláš	3	3	6	-	-	-	12	-	<b>24</b>	<i>92</i>	<i>103</i>	
4. <i>Jiří Blaha</i>	G, Uherské Hradiště	3	3	6	8	-	-	12	6	<b>38</b>	<i>82</i>	<i>84</i>	
5.-6. <i>Vojtěch Ulman</i>	G Jaroslava Seiferta, Praha	2	3	6	4	1	4	5	-	<b>25</b>	<i>47</i>	<i>80</i>	
5.-6. <i>Leonardo Wimmer</i>	Colégio pH, Tijuca, Brazil	4	3	6	8	6	3	10	8	<b>48</b>	<i>82</i>	<i>80</i>	
7. <i>Marie Grunová</i>	G, Moravský Krumlov	1	2	-	-	-	-	10	-	<b>13</b>	<i>57</i>	<i>78</i>	
8. <i>Jindřich Jelínek</i>	G, Olomouc-Hejčín	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>108</i>	<i>65</i>	
9. <i>Matej Moško</i>	G Grösslingova, Bratislava	2	3	5	8	-	2	-	-	<b>20</b>	<i>70</i>	<i>59</i>	
10. <i>Michal Jáza</i>	G, Benešov	3	1	-	-	-	2	10	-	<b>16</b>	<i>57</i>	<i>54</i>	
11. <i>Filip Koňářík</i>	G F. Palackého, Val. Mez.	3	3	5	8	-	-	-	-	<b>19</b>	<i>91</i>	<i>53</i>	
12. <i>Kristián Matuščík</i>	G, Benešov	3	1	3	-	2	2	4	-	<b>15</b>	<i>42</i>	<i>51</i>	
13. <i>Vojtěch Klimeš</i>	G, Třeboň	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>67</i>	<i>40</i>	
14. <i>YUQING XU ARIA</i>	Dulles High School, USA	4	2	6	8	4	3	4	7	<b>38</b>	<i>63</i>	<i>38</i>	
15. <i>Tomáš Drobil</i>	G, Dačice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>72</i>	<i>36</i>	
16. <i>Jindřich Dušek</i>	G Jana Keplera, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>57</i>	<i>34</i>	
17. <i>Tadeáš Wilczek</i>	G F. Živného, Bohumín	3	2	6	-	-	-	-	-	<b>11</b>	<i>73</i>	<i>32</i>	
18. <i>Marek Jankola</i>	G M. Hattalu, Trstená	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>71</i>	<i>27</i>	
19. <i>Jakub Růžička</i>	G, Nymburk	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>63</i>	<i>24</i>	
20. <i>Tereza Prokopová</i>	G Jura Hronca, Bratislava	-	1	-	-	-	-	-	-	<b>1</b>	<i>85</i>	<i>23</i>	
21. <i>Kateřina Charvátová</i>	G B. Němcové, HK	3	3	6	-	-	-	-	-	<b>12</b>	<i>79</i>	<i>22</i>	
22. <i>Andrej Rendek</i>	G, Dubnica n. Váhom	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>30</i>	<i>18</i>	
23. <i>Karel Balej</i>	G a SOŠ, Rokycany	-	-	6	-	-	-	-	-	<b>6</b>	<i>100</i>	<i>17</i>	
24. <i>Miroslav Horský</i>	G, Českolipská, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>52</i>	<i>16</i>	
25. <i>Dominik Majkus</i>	G Na Vítězné pláni, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>46</i>	<i>13</i>	
26. <i>Bibiána Hroncová</i>	G Poštová, Košice	-	-	-	-	-	-	11	-	<b>11</b>	<i>92</i>	<i>11</i>	
27.-29. <i>Bernadeta Maříková</i>	G, Český Krumlov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>56</i>	<i>9</i>	
27.-29. <i>Štěpán Tichý</i>	G, Jateční, Ústí nad Labem	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>43</i>	<i>9</i>	
27.-29. <i>Marie Vaňáková</i>	G Botičská, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>50</i>	<i>9</i>	
30.-31. <i>Vratislav Besta</i>	G, Olomouc-Hejčín	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>33</i>	<i>6</i>	
30.-31. <i>Marek Talíř</i>	G, Český Krumlov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>60</i>	<i>6</i>	
32. <i>Marek Božoň</i>	G, Karviná	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<i>43</i>	<i>3</i>	



**FYKOS**  
 UK, Matematicko-fyzikální fakulta  
 Ústav teoretické fyziky  
 V Holešovičkách 2  
 18000 Praha 8

www: <https://fykos.cz>  
 e-mail: [fykos@fykos.cz](mailto:fykos@fykos.cz)

 @FYKOS  @fykosak

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.  
 Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.