Úloha I.3 ... nestabilní

7 bodů; průměr 5,01; řešilo 67 studentů

Mějme osm bodových nábojů (každý o velikosti q) umístěných ve vrcholech krychle. Určete velikost bodového náboje q_0, který musíme umístit do středu krychle, aby byly všechny body v rovnováze. Bude rovnováha stabilní?

Matěj chtěl zadat příklad, který nespočítal ani profesor.

Na každý bod s nábojem q působí ostatní body ve vrcholech krychle odpudivou silou a jeden bod ve středu působí silou přitažlivou. Rovnováha nastane, pokud tyto síly budou mít stejnou velikost a opačný směr, takže se navzájem vyruší. Ze symetrie problému je jasné, že stačí řešit úlohu jen pro jeden z vrcholů krychle a rovnováha pak bude splněna i pro všechny zbylé body včetně toho prostředního.

Dále si uvědomme, že stačí řešit silovou rovnováhu na přímce spojující střed a daný vrchol (tedy na tělesové úhlopříčce). Všechny ostatní složky sil se totiž díky symetrii navzájem vyruší. Nejprve spočítáme, jakou celkovou silou je bod odpuzován a posléze vyjádříme, jak velký náboj musíme doprostřed umístit.

Máme celkem sedm nábojů, které na bod působí. Rozdělíme se je do tří kategorií. První jsou tři náboje, které s naším bodem sdílejí společnou hranu krychle. Další tři jsou ty, které s ním sdílejí stěnovou úhlopříčku (neboli právě jednu stěnu). Poslední jeden náboj je přesně v opačném vrcholu krychle. Pro výpočet složky síly působící ve směru tělesové úhlopříčky jsou klíčové vždy dvě veličiny – vzdálenost bodů r a sklon jejich spojnice vůči tělesové úhlopříčce φ (pokud body leží na tělesové úhlopříčce, je sklon $\varphi = 0$, pokud je spojnice kolmá na úhlopříčku, je $\varphi = 90^\circ$). Celkovou sílu nám udává Coulombův zákon

$$F_c = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q^2}{r^2}\,.$$

Pro výpočet složky síly rovnoběžné s tělesovou úhlopříčkou stačí velikost síly vynásobit členem $\cos\varphi$. Dostáváme tak

$$F = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon}\frac{\cos\varphi}{r^2}\,.$$

První zlomek je pro všechny body stejný. Úhly a vzdálenosti lze zjistit jednoduchou geometrií, výsledky jsou shrnuty v následující tabulce. Délka hrany krychle je a.

kategorie	počet nábojů	r	$\cos\varphi$	$\frac{\cos\varphi}{r^2}$
1	3	a	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}a^2}$
2	3	$\sqrt{2}a$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}a^2}$
3	1	$\sqrt{3}a$	1	$\frac{1}{3a^2}$

Celková síla tedy je

$$F = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon a^2}\left(\sqrt{3} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}\right) = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon a^2}\frac{6\sqrt{3} + 3\sqrt{6} + 2}{6}\,.$$

Náboj, který umístíme doprostřed, musí kompenzovat tuto sílu. Vzdálenost středu od vrcholu je $\sqrt{3}a/2$. Platí tedy

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{4qq_0}{3a^2}\,.$$

Z podmínky rovnosti sil dostáváme

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon a^2}\frac{6\sqrt{3}+3\sqrt{6}+2}{6} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{4qq_0}{3a^2}\,,$$
$$q\left(6\sqrt{3}+3\sqrt{6}+2\right) = 8q_0\,,$$
$$q_0 = \frac{3\sqrt{6}+6\sqrt{3}+2}{8}q \doteq 2{,}468q\,.$$

Všimněme si, že výsledek nezávisí na rozměru krychle ani na permitivitě prostředí (předpokládali jsme homogenní prostředí). Zbývá vyřešit otázku, zda bude rovnováha stabilní, labilní, či volná. Stabilní rovnováha nastává, když se soustava po malé výchylce z rovnovážné polohy samovolně vrátí zpět do rovnovážné polohy. Tedy pokud malinko vychýlíme některý z bodů, výslednice sil ho bude tlačit zpět. Jak to ale zjistíme? Mohli bychom si rozepsat závislost sil na obecné poloze bodu nebo přímo vypočítat potenciál v okolí daného bodu.

Zkusme na to jít jednoduchou úvahou. Představme si, že vychýlíme prostřední bod o malinkou vzdálenost ze středu směrem k jednomu z vrcholů. Na prostřední bod původně působily pouze přitažlivé síly od ostatních vrcholů. Nyní se rozhodně zvýší přitažlivá síla směrem k bodu, ke kterému byl středový náboj přiblížen, zároveň se ale sníží přitažlivá síla k vrcholu na opačné straně. Na vychýlený prostřední náboj nyní proto bude působit síla, která ho bude vychylovat dále od středu. To znamená, že rovnováha je nestabilní, ba dokonce labilní.

Pokud bychom všem vrcholovým bodům udělili stejnou výchylku směrem od středu, stabilita by zůstala zachována, protože nezáleží na délce strany krychle. V tomto směru je tedy rovnováha volná.

Tento problém můžeme samozřejmě řešit i trikem. Z Gaussova zákona elektrostatiky lze dokázat, že jakákoli soustava bodových nábojů nemůže být nikdy ve stabilní rovnovážné poloze bez působení dalších sil (např. gravitační). Dokažme to sporem – předpokládejme, že existuje bod, ve kterém má elektrostatický potenciál lokální minimum a nenachází se zde žádný náboj (tedy kdybychom do tohoto místa umístili libovolně malý kladný bodový náboj, byl by ve stabilní rovnováze). Kolem tohoto místa uděláme dostatečně malou Gaussovu plochu tak, aby se uvnitř nenacházel žádný náboj. Jelikož je to stabilní poloha, lze kouli udělat tak malou, aby vektor intenzity elektrického pole všude na povrchu koule směřoval dovnitř (aby se při malé výchylce kladný náboj vracel zpět). Nyní po integraci

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

dostaneme záporný výsledek, což znamená, že uprostřed koule se nachází záporný náboj, ale to je ve sporu s naším předpokladem.

Matěj Mezera
`m.mezera@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.