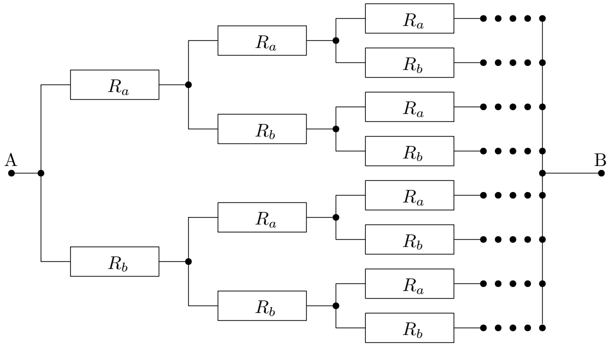
Úloha I.5 ... zpropadený obvod

8 bodů; průměr 6,10; řešilo 70 studentů

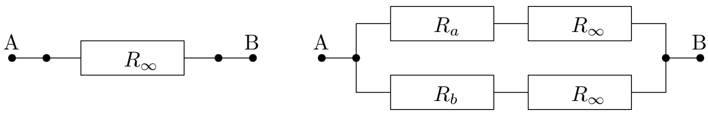
a) Určete odpor nekonečné odporové sítě na obrázku mezi body A a B. Bod A je přímo spojen s dvěma rezistory s odpory R_a a R_b. Každý z těchto rezistorů je spojen s dalšími dvěma odpory R_a a R_b a tak dále.
b) Na obrázku si místo rezistorů představte kondenzátory s kapacitami C_a a C_b. Jaká bude celková kapacita obvodu?



Karel zase jednou chtěl něco nekonečně-nekonečného.

V nekonečných sítích se obecně využívá toho faktu, že pokud by síť byla opravdu dokonalá a nekonečná a pokud je zároveň pravidelná, dají se v ní nalézt jednotlivé subčásti, které mají stejný odpor (či stejnou kapacitu) jako celková síť. Pokud je totiž obvod nekonečný, nezáleží na tom, jestli ještě přidáte nebo uberete jeden opakující se článek, stále jich bude nekonečno. Něco málo o takovýchto obvodech naleznete například v knihovničce Fyzikální olympiády v textu Elektrické obvody (stejnosměrný proud) - část 2.9 Řetězový obvod.[1]

Nejprve se budeme věnovat bodu a), tedy rezistorové síti. Tu si můžeme představit buď jako celou síť s odporem R_∞, anebo jako obvod se čtyřmi rezistory, z nichž mají dva odpor R_∞, třetí R_a a čtvrtý R_b, viz obrázek 1.



Obr. 1: Alternativní schémata problému, pomocí nichž vypočítáme odpor celé sítě.

V druhém případě máme tedy dvě dvojice rezistorů zapojených sériově, tyto dvojice jsou pak zapojené paralelně. Můžeme jednoduše napsat vztah mezi těmito dvěma obvody pomocí

[1] `http://fyzikalniolympiada.cz/texty/elobvody.pdf`

rovnice, která po úpravách vede na kvadratickou rovnici[2], kterou snadno vyřešíme.

$$
\begin{aligned}
R_\infty &= \left(\frac{1}{R_a + R_\infty} + \frac{1}{R_b + R_\infty}\right)^{-1} , \\
R_\infty &= \frac{(R_a + R_\infty)(R_b + R_\infty)}{R_b + R_\infty + R_a + R_\infty} , \\
R_\infty (R_a + R_b + 2R_\infty) &= R_a R_b + R_\infty (R_a + R_b) + R_\infty^2 , \\
R_\infty^2 &= R_a R_b \quad \Rightarrow \quad R_\infty = \sqrt{R_a R_b} .
\end{aligned}
$$

Celkový odpor rezistorové sítě je tedy $R_\infty = \sqrt{R_a R_b}$. Záporný kořen jsme „zahodili", protože záporný odpor pro naši úlohu nemá fyzikální význam. Sčítáme totiž samé kladné ideální rezistory. Záporný odpor by mohl mít význam, pokud bychom zapojili nějaké nelineární či exotické součástky do našeho obvodu. Více si o záporném odporu můžete přečíst například na Wikipedii[3].

Stejným způsobem můžeme určit i celkovou kapacitu v bodě b). Jediný rozdíl je v tom, že u rezistorů sčítáme sériově zapojené odpory, kdežto u kapacity sčítáme paralelně zapojené kondenzátory.

$$
\begin{aligned}
C_\infty &= \left(\frac{1}{C_a} + \frac{1}{C_\infty}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{C_b} + \frac{1}{C_\infty}\right)^{-1} , \\
C_\infty &= \frac{C_a C_\infty}{C_a + C_\infty} + \frac{C_b C_\infty}{C_b + C_\infty} , \\
1 &= \frac{C_a (C_b + C_\infty) + C_b (C_a + C_\infty)}{(C_a + C_\infty)(C_b + C_\infty)} , \\
C_a C_b + C_\infty (C_a + C_b) + C_\infty^2 &= 2C_a C_b + C_\infty (C_a + C_b) , \\
C_\infty^2 &= C_a C_b \quad \Rightarrow \quad C_\infty = \sqrt{C_a C_b} .
\end{aligned}
$$

Vyšlo nám, že celková kapacita obvodu je $C_\infty = \sqrt{C_a C_b}$, tedy shodou okolností jsme získali zcela stejný tvar řešení jako u rezistorů. Kromě záporného řešení jsme ještě „zahodili" možnost, že by kapacita celkového obvodu byla nulová. Došlo k tomu v kroku mezi druhým a třetím řádkem, kdy jsme obě strany vydělili C_∞. Proč nečekáme, že by kapacita byla nulová? Intuitivně by se dalo čekat, že pokud by byla kapacita nekonečného obvodu nulová, bude odpor složený z rezistorů stejným způsobem nekonečný. Pokud tento argument nestačí, můžeme se podívat na to, jaké budou kapacity pro konečné obvody, které budeme postupně konstruovat přidáváním dalších a dalších sad kondenzátorů. Je to alternativní metoda, jak kapacitu určit, ale je náročnější na jednotlivé výpočty a počet kroků. Navíc je potřebná znalost konvergence. Pokud si zjednodušíme pro rozhodnutí potvrzení či zamítnutí nulové hodnoty celkové kapacity na situaci $C_a = C_b = C$, dostáváme postupně celkové kapacity obvodu $2C$, $4C/3$, $8C/7$, $16C/15$, $32C/31\ldots$ Intuitivně vidíme, že tato řada konverguje k C, což odpovídá $C_\infty = \sqrt{C_a C_b} = C$, nikoliv nulovému řešení, které jsme zahodili oprávněně.

Celkový odpor či celková kapacita takto poskládaného obvodu z nekonečného množství součástek o dvou odporech či kapacitách je tedy geometrickým průměrem jejich hodnot.

[2] Nekonečné či řetězové obvody ve většině úloh, se kterými se můžete v soutěžích setkat, vedou právě na kvadratickou rovnici.

[3] `https://en.wikipedia.org/wiki/Negative_resistance`

Ještě můžeme zcela na závěr poznamenat, že jsme od začátku předpokládali, že odpory spojovacích vodičů jsou nulové, což je standardní dle obvyklých konvencí. Pokud bychom museli uvažovat odpory i těchto vodičů, pak by se nám úloha zkomplikovala. Nicméně v případě rezistoru je rozumné zahrnout odpor vodiče vedoucího k rezistoru k tomu příslušnému rezistoru. Výsledek by byl pak stejný, pokud by tyto odpory vodičů byly všude stejné. Samozřejmě, že u reálné nekonečné sítě by byl nejspíše problém v nestejné délce vodičů, pokud tedy pomineme fakt, že nekonečné sítě stejně nelze dosáhnout. V případě kondenzátorů by mohlo jít o trochu větší problém, protože kromě kapacity bychom museli uvažovat i rezistivitu vodičů. Navíc i mezi jakýmikoliv součástkami může vznikat parazitní kapacita (či induktance), která bude nejspíše malá, ale v případě nekonečného obvodu je pak netriviální ji zanedbat. Úlohu jsme nezamýšleli až takto těžkou, a proto úvahy nad těmito jevy by mohly získat bonusové body. Důležité je korektní „snadné“ řešení idealizovaných obvodů.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`