Úloha III.5 ... bodová

8 bodů; průměr 5,32; řešilo 22 studentů

Uvažujme hmotný bod umístěný v jednodimenzionálním prostoru. Jeho počáteční pozice i rychlost je nulová. Bod se dokáže pohybovat s libovolným zrychlením z intervalu $[-a\ , a]$. *Nazvěme* $M(t)$ *množinu všech možných stavů* (x, v) *takových, že bod se v čase* t *může nacházet na pozici* x *s rychlostí* v. *Sestrojme graf závislosti* v *na* x *v čase* t. *Množina* $M(t)$ *v tomto grafu vytvoří plochu* $S(t)$. *Analyticky popište křivky ohraničující* $S(t)$.

Bonus *Najděte funkční závislost obsahu* $S(t)$.

Jáchym chtěl jistou triviální úlohu řešit jako speciální případ této.

Nejdříve podotkněme, že pokud je možné nějakého bodu (x, v) dosáhnout v čase t, zřejmě je možné ho dosáhnout i v jakémkoli větším čase tím, že se před začátkem pohybu budeme odpovídající časový rozdíl pohybovat s nulovým zrychlením. Z toho vyplývá, že množina M se v čase pouze zvětšuje.

Zvolme nějaký konkrétní čas t. Nyní si představme, že se po celou dobu od počátku do času t pohybujeme pouze se zrychlením a. Není těžké spočítat, že dosáhneme rychlosti $v_{\max} = at$ a polohy

$$x_{\max} = \frac{1}{2}at^2\,.$$

Toto je zřejmě největší rychlost a zároveň největší vzdálenost, které můžeme v daném čase dosáhnout, takže musí být součástí okraje množiny. Obráceně, nejdále v záporném směru se můžeme dostat do bodu ve vzdálenosti $x_{\min} = -x_{\max}$ s rychlostí $v_{\min} = -v_{\max}$.

Dále zkusme najít, jakou největší rychlost můžeme mít na souřadnici x. Pro každý bod od $x_{\min}$ do $x_{\max}$ tak najdeme horní hranici množiny pro rychlost bodu. Situace je zřejmě symetrická vůči současné změně znaménka u rychlosti a polohy, takže dolní hranici rychlosti najdeme pouhým bodovým zrcadlením výsledku vzhledem k počátku.

Abychom při pohybu z klidu dosáhli nějaké rychlosti, musíme zrychlovat a při tom nutně urazíme nějakou vzdálenost. Můžeme si rozmyslet, že pokud bychom se pohybovali s menším než maximálním zrychlením, jakékoli rychlosti bychom dosáhli na větší vzdálenosti než v případě pohybu s maximálním zrychlením. Jinak řečeno, chceme-li na co nejkratší vzdálenosti dosáhnout co největší rychlosti, musíme se pohybovat s maximálním zrychlením.

Snadno spočítáme, že pro zrychlení z nuly na v musíme urazit vzdálenost

$$\Delta x = \frac{v^2}{2a}\,.$$

Jakou maximální rychlost tak můžeme mít například v počátku, tedy v bodě $x = 0$? Jednoduše musíme nejdříve zrychlovat na opačnou stranu, čímž se dostaneme do záporných hodnot osy x. Potom můžeme začít zrychlovat v kladném směru, čímž se postupně vrátíme zpět do počátku, tentokrát už s kladnou rychlostí v.

Nyní zase vyvstává otázka, jak se v co nejkratším čase dostat co nejdále od počátku, abychom se pak mohli vrátit s co největší rychlostí? Odpověď je stejně prostá, jako celý zbytek úlohy – pohybem nejdříve s maximálním záporným zrychlením a hned poté s maximálním kladným zrychlením.

Pojďme konečně úvahy výše přepsat do rovnic. Pro daný čas t si zvolíme bod x a maximální rychlost, kterou v něm můžeme mít, označíme v. Po čas t_1 budeme mít zrychlení $-a$ a po další čas t_1 zrychlení a. Tím dosáhneme bodu $(y,0)$. Odtud se budeme pohybovat se zrychlením a po dobu t_2 a konečně dorazíme do bodu (x,v). Dostáváme rovnice

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}at_1^2 + \left(-at_1^2 + \frac{1}{2}at_1^2\right) = -at_1^2\,, \\ x - y &= \frac{1}{2}at_2^2\,, \\ v &= at_2\,, \\ t &= 2t_1 + t_2\,. \end{aligned}$$

Známe a, t a x, neznáme v, t_1, t_2 a y. Čtyři rovnice pro čtyři neznáme jsou přesně tolik co potřebujeme, abychom si z nich vyjádřili v. Nicméně zjistíme, že se neobejdeme bez odmocnin. Nám ale stačí najít vztah pro hraniční body v čase t, teda zbavit sa pomocných neznámých t_1, t_2 a y. Dostat můžeme například rovnici

$$x = \frac{1}{4a}\left(v^2 + 2vat - a^2t^2\right)\,.$$

Což je samozřejmě parabola. Její osa je rovnoběžná s osou x, kterou parabola protíná v bodě $(x_1,0)$, kde

$$x_1 = -\frac{1}{4}at^2\,,$$

což je nejvzdálenější bod v záporném směru, kam se můžeme dostat s nulovou konečnou rychlostí. Odtud vede hranice až do bodu $(x_{\max}, v_{\max})$, který jsme určili dříve. Parabola samozřejmě pokračuje i dál, tam však nemá fyzikální smysl (příslušný čas t_1 by vyšel záporný). Nicméně stále ještě jsme nenalezli druhou hranici množiny od bodu $(x_{\max}, v_{\max})$ zpět na osu x.

Pokud se budeme pohybovat polovinu času t se zrychlením a a druhou polovinu se zrychlením $-a$, skončíme opět na ose x, tedy s nulovou rychlostí, na souřadnici

$$x_2 = \frac{1}{2}a\left(\frac{t}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}at^2 - \frac{1}{2}a\left(\frac{t}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{4}at^2\,.$$

Bod $(x_2,0)$ tak zřejmě představuje největší vzdálenost, kam se můžeme od počátku na ose x dostat. Hranice množiny musí vést z bodu $(x_{\max}, v_{\max})$ do bodu $(x_2,0)$.

Nyní stojíme před podobným problémem jako v první části řešení – snažíme se najít nejmenší rychlost, kterou můžeme mít pro dané x mezi x_2 a $x_{\max}$. Jednodušší však bude opačný postup – zkusme pro danou rychlost mezi 0 a $v_{\max}$ najít největší x, do kterého se můžeme v čase t dostat.

Jistě je pravda, že maximálního x dosáhneme tehdy, pokud se v každém bodě trajektorie budeme pohybovat s největší rychlostí, s jakou to bude právě možné. Začněme tedy zrychlovat se zrychlením a, a to až do času τ. V čase τ naopak začněme brzdit se zrychlením $-a$, takže v čase t budeme mít rychlost v. První část dráhy se pohybujeme s maximálním zrychlením a tedy i maximální možnou rychlostí. Naopak ve druhé části brzdíme nejvíce jak to jde, a tedy kdybychom měli ještě o něco větší rychlost, už bychom to do času t nedokázali ubrzdit na rychlost v.

Jednoduchou úvahou jsme ukázali, že tento způsob pohybu nám pro danou koncovou rychlost v zajistí největší možnou uraženou vzdálenost. Opět dostáváme sadu rovnic

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}a\tau^2 + \left(a\tau\left(t-\tau\right) - \frac{1}{2}a\left(t-\tau\right)^2\right)\,, \\ v &= a\tau - a\left(t-\tau\right) = a\left(2\tau - t\right)\,. \end{aligned}$$

Nyní máme jen dvě neznámé, a sice x a τ. Můžeme si tak vyjádřit

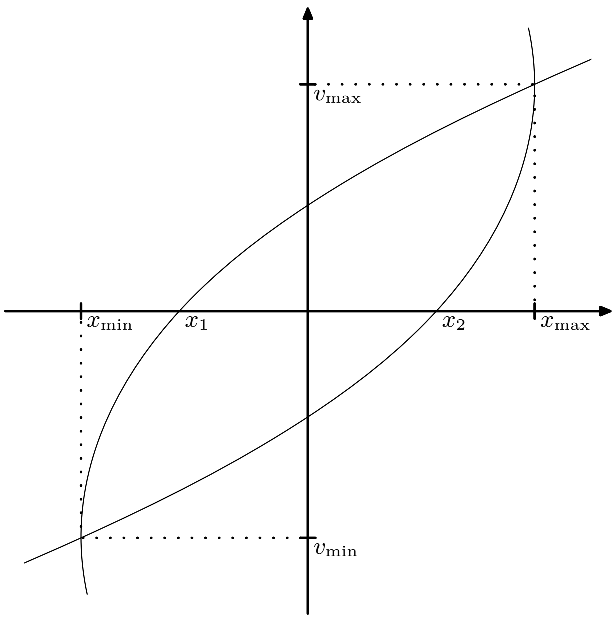
$$x = \frac{1}{4a}\left(a^2t^2 + 2vat - v^2\right) .$$

Pokud nám tento výsledek přijde povědomý, tak zcela oprávněně. Jedná se o parabolu, která nám vyšla již v první části, bodově převrácenou podle počátku. Jak jsme zmínili výše, ze symetrie situace vyplývá, že tato parabola tvoří dolní hranici množiny od bodu $x_{\min}$ do bodu x_2, zatímco první parabola vytváří dolní hranici od bodu $x_{\min}$ do bodu x_1.

Abychom shrnuli předchozí úvahy, množina všech bodů, ve kterých se můžeme v čase t nacházet, je ohraničená dvěma parabolami, bodově symetrickými vůči počátku. Jejich analytický předpis je

$$x = \frac{1}{4a}\left(v^2 + 2vat - a^2t^2\right) ,$$
$$x = \frac{1}{4a}\left(a^2t^2 + 2vat - v^2\right) .$$

Pro úplnost dodejme, že pro každý bod uvnitř ohraničeného prostoru můžeme najít takový čas τ, že $\tau < t$ a zároveň daný bod leží na jedné z hraničních parabol pro čas τ. To je podle vůbec první poznámky tohoto řešení důkazem, že celá plocha nemá žádné vnitřní hranice kolem oblastí, které by do hledané množiny nepatřily, ale zároveň by byly uvnitř vnějších hranic.



Obr. 1: Hranice výsledné množiny M v nějakém čase t.

Bonus

Pokud jste to dočetli až sem, tak jistě tušíte, že bonus je již jen triviální záležitostí. Stačí vhodně zvolit podle čeho integrovat, abychom si zbytečně nepřidělávali práci. Definujme první parabolu jako $x = f_1(v)$ a druhou jako $x = f_2(v)$. Potom pro obsah plochy S zřejmě platí

$$S = 2\int_0^{v_{\max}} \left(f_2(v) - f_1(v)\right) \mathrm{d}v = \frac{1}{a}\int_0^{v_{\max}} \left(a^2t^2 - v^2\right) \mathrm{d}v = \frac{1}{a}\left[a^2t^2v - \frac{v^3}{3}\right]_0^{v_{\max}} = \frac{2}{3}a^2t^3\,.$$

Jáchym Bártík
`tuaki@fykos.cz`