

Úloha IV.5 ... frisbee

9 bodů; průměr 5,50; řešilo 24 studentů

Tenký homogenní disk obíhá na vodorovné podložce po kružnici s poloměrem R . Velikost rychlosti těžiště disku je v . Určete úhel α mezi rovinou disku a svislým směrem. Tření mezi diskem a podložkou je dostatečné. Poloměr disku je řádově menší než R .

Jáchym si nebyl jistý řešením. Snad na to účastníci přijdou.

Hmotnost disku a jeho poloměr označme m a r , potom pro jeho moment setrvačnosti kolem osy kolmé na rovinu disku platí

$$J = \frac{1}{2}mr^2.$$

Disk kolem této osy rotuje s úhlovou rychlostí ω . Jeho moment hybnosti vzhledem k této ose je $L = J\omega$. Disk se stále dotýká podložky, takže pro jeho rychlost pohybu máme

$$v = \omega r = \Omega R,$$

kde Ω je úhlová rychlost oběhu disku po kružnici. Za čas dt se disk (přesněji průmět disku do podložky) otočí o úhel $d\varphi = \Omega dt$. Vodorovná složka momentu hybnosti $L_x = L \cos \alpha$ se při tom změní o $dL_x = L_x d\varphi$, svislá složka zůstane stejná.

Na střed disku působí tíhová síla $F_g = mg$. Ta je vyrovnávána tlakovou silou roviny, po které se disk pohybuje. To způsobuje moment síly vzhledem k ose procházející středem disku

$$M_1 = F_g r \sin \alpha.$$

Zároveň na disk působí třecí síla podložky, která je dostředivou silou, pro kterou platí $F_d = m\Omega^2 R$. Ta způsobuje moment

$$M_2 = -F_d r \cos \alpha.$$

Celkový moment sil se rovná derivaci momentu hybnosti podle času. V tomto případě z geometrie situace vyplývá

$$M_1 + M_2 = \frac{dL_x}{dt} = L_x \Omega.$$

Postupným dosazováním za všechny neznámé dostaneme

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3v^2}{2Rg}.$$

Můžeme psát výsledek $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{3v^2}{2Rg}$.

Jáchym Bártík
tuaki@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.