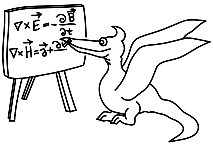

Seriál: Tipy a triky v řešení fyzikálních úloh

Úvod

Letošní seriál se bude od většiny minulých seriálů FYKOSu lišit jak svým pojetím, tak i obtížností. Tentokrát chceme začít od úplných základů tak, aby byl seriál přístupný pro všechny řešitele. Věříme ale, že se i ti pokročilejší naučí něco nového. Některá z letošních témat se sice probírají i v hodinách fyziky či fyzikálních seminářů na školách, ale většinou se moc nestíhá a tak se z nich obvykle dozvíte jenom část. Cítíme proto povinnost vytvořit studijní materiály pokrývající tyto informace, které považujeme za základní pro další studium fyziky. Taktéž vycházíme ze zkušeností s opravováním účastnických řešení a v nich vytrvale se opakujících typů chyb.[1]

Typickými chybami se budeme zabývat zejména v prvním díle seriálu, a to společně s různými aspekty fyzikálních jednotek a veličin. V dalších dílech se budeme věnovat symetriím, zákonům zachování, trikům s nekonečnem či hledání extrémů a kvalifikovaných odhadů. Seriál se bude tedy lišit i tím, že nebude popisovat jeden obor fyziky (či matematické/informatické fyziky), ale budeme se pohybovat napříč různými oblastmi. Cílem bude předložit různé typy „triků“, či možná přesněji rychlých typů řešení, které se můžou hodit při řešení fyzikálních úloh.

Co se týče složitosti, pokusíme se vystačit si co nejvíce se středoškolskou matematikou. Myslíme tím znalost základních funkcí (sin, cos, tg, exponenciála, logaritmus) a operací (sčítání, násobení, mocnění a příslušné inverzní operace). Časem budeme potřebovat i derivace.[2] Seriál se dále bude snažit citovat historické úlohy FYKOSu související s probíranými tématy a také další externí zdroje. Ty budou sloužit pro procvičení, vyjasnění tématu či pro nastudování dalších zajímavostí. Některé tipy vám pak můžou získat alespoň „body za snahu“ či přesněji body za nějaké fyzikální uvažování, například že daná veličina nemůže nabývat méně než něco, více než něco nebo že se musí jednat o vztah v nějakém tvaru.

Přestože se může zdát, že jde o „stará“ témata, která nemají co nabídnout, tak jste si jistě všimli, že i v dnešní době dochází k pokrokům v rámci základních kamenů fyziky, jako například v definici základních jednotek. Toto je stále aktuální téma, protože změny definic byly schváleny na 26. Generální konferenci pro míry a váhy 16. listopadu 2018 s účinností od 20. května 2019.

Závěrem úvodu – v rámci tohoto seriálu budeme hodnotit i „úpravu“ řešení, od čehož se snažíme u jiných úloh odhlédnout (byť v některých případech to nelze). Tedy snažte se, aby řešení byla čitelná a postup byl dostatečně dobře popsaný. Dále dodržujte správný zápis jednotek popsaný v prvním díle seriálu.[3] Na druhou stranu – **můžete se snažit nalézt chyby v autorských řešeních** organizátorů. Nikdo není dokonalý a pokud naleznete závažné chyby či více drobných chyb a pošlete je v řešení seriálové úlohy, můžete dostat bonusové body.

[1] Samozřejmě, že nepokryjeme všechno i vzhledem k rozsahu. Ale snad se nám podaří vybrat co největší množství co nejužitečnějších témat.

[2] Pokud byste se chtěli rovnou vrhnout na derivace, které se vám určitě mohou pro další studium fyziky hodit, tak si můžete projít text o derivacích `https://fykos.cz/_media/akce/rseminar/derivace_1_.pdf` či nějakou středoškolskou učebnici.

[3] Pokud máme zadané veličiny na dvě, tři platné cifry, opravdu nemá smysl psát výsledek na čtyři a více platných cifer. Jak by se najednou mohla přesnost zvýšit? Tohle je jedna z hlavních point tohoto dílu a ještě ji, pro jistotu, zopakujeme.

Základní kameny fyziky

V prvním dílu se budeme zabývat tím, jak správně přistupovat k řešení úloh a to zejména z hlediska jednotek, které vážně nejsou jenom na ozdobu. Seznámíte se také s metodami, které se ve fyzice používají k některým užitečným odhadům, a to s rozměrovou analýzou a s podobnostními čísly. Pokusíme se o stručnost – tedy počítejte s tím, že nějaké zajímavé informace vynecháme a úplný seznam bude pouze u základních jednotek. Další jednotky můžete nalézt např. v matematicko-fyzikálních a chemických tabulkách.

Fyzikální jednotky

Základem fyziky je správné používání jednotek. Když se nám podaří dostat k nějakému výsledku, tak hraje velkou roli v jakých jednotkách výsledek dostaneme. Je snad zřejmé, že je opravdu velký rozdíl, jestli máme 10 metrů, kilometrů, úhlových stupňů, radiánů, mikroampérů, grayů či třeba brambor.

Rovnou si uveďme to, že pokud máme nějakou fyzikální veličinu X, pak tím, že ji dáme do hranatých závorek $[X]$ dostaneme její jednotku. Pokud ji dáme do složených závorek $\{X\}$, pak získáme její hodnotu v základních jednotkách. Platí tedy $X = \{X\}\,[X]$. Například, pokud máme změřenou dráhu s o délce 5,00 metrů s přesností na centimetry, tak můžeme psát $s = 5{,}00\,\mathrm{m}$, respektive $\{s\} = 5{,}00$ a $[s] = \mathrm{m}$. Více k zápisu a přesnosti se dozvíte v části o formálních částech řešení.

Základní jednotky

V České republice, Slovensku a ve velké části světa se primárně používají jednotky SI.[4] Je sice pár států, kde sveřepě používají jiné systémy (např. USA), což může působit problémy,[5] ale těm se nebudeme věnovat.[6] Více o historii jednotek se můžete dočíst např. na Wikipedii.[7] V rámci stručnosti se budeme věnovat pouze aktuální verzi, resp. poslední změně z května 2019.

Přehled základních jednotek Základních jednotek SI je 7 a jejich přehled se značkami najdete v tabulce 1.

Kilogram je jedinou základní jednotkou, která má ve svém názvu předponu (kilo) – pozor na to při výpočtech a používání odvozených jednotek!

Doporučené značky je vhodné používat, aby z vašeho zápisu někdo další[8] snadněji pochopil postup vašeho řešení. Pokud si ale definujete veličiny jinak, pak to ničemu nevadí – nicméně v tom případě je nutné každou veličinu popsat.

[4] Zkratka pochází z francouzského „Le Système International d'Unités“.

[5] Například pokud stavíte v kolaboraci nějakou družici a někdo ji vyrobí ve velikostech odpovídající centimetrům a někdo v palcích.

[6] V některých oblastech fyziky či v technické praxi se používají i jiné základní jednotky, ale vždycky musí být jasná domluva, jaké jednotky jsou používané, aby nedošlo ke zmatení. Docela známá varianta je systém CGS (centimetr, gram, sekunda), který má vůči SI relativně jednoduché převodní vztahy. Zajímavým příkladem je letectví, jehož specifikem, a to i v ČR, je určování výšky letadla ve stopách, horizontální vzdálenosti v mílích a rychlosti letadel v uzlech. Nicméně se zde používají i metry např. pro určování dohlednosti. Základním předpisem pro jednotky v letectví je ICAO Annex 5, respektive jeho český ekvivalent letecký předpis L 5. Letecké předpisy v ČR se přejímají z ICAO a dále jsou upraveny nařízeními EU a zákony ČR. Je další zajímavostí, že předpisy ICAO jsou obvykle placené, ale jejich české ekvivalenty jsou volně ke stažení na `https://aim.rlp.cz/predpisy/predpisy/index.htm`.

[7] Doporučujeme anglickou verzi: `https://en.wikipedia.org/wiki/International_System_of_Units`.

[8] Například organizátor hodnotící úlohu.

Tab. 1: Základní jednotky SI; Dop. zn. = doporučená značka veličiny, Jd. = Jednotka, Zn. = Závazná značka jednotky; * u délky je více doporučených značek v závislosti na tom, o jakou délkovou veličinu se jedná.

Veličina	Dop. zn.	Jd.	Zn.
Délka	$l, x, \ldots$ *	metr	m
Hmotnost	m	kilogram	kg
Čas	t	sekunda	s
Elektrický proud	I, i	ampér	A
Termodynamická teplota	T	kelvin	K
Látkové množství	n	mol	mol
Svítivost	I_v	kandela	cd

Jednotky píšeme s malým písmenem na začátku – např. kelvin je jednotka, lord Kelvin of Largs je osoba.

Definice základních jednotek Od letošního roku jsou konečně všechny fyzikální jednotky definované na základě nějakých fyzikálních konstant, jimž byla zafixována přesná hodnota, či vztahem k nějakému fyzikálně měřitelnému ději. Mohli bychom si klást otázku, jestli jsou tyto „konstanty“ opravu konstantní v čase, v prostoru a v celém vesmíru. Odpovědí je, že se zdá, že snad ano. Respektive zatím nebyly naměřeny žádné změny a minimálně pro praxi v běžném životě je vhodné je považovat za konstantní.[9]

> **Sekunda** *je definována fixací číselné hodnoty cesiové frekvence* $\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$*, tedy frekvence přechodu mezi hladinami velmi jemného rozštěpení neporušeného základního stavu atomu* ^{133}*Cs, aby byla rovna* 9 192 631 770*, je-li vyjádřena jednotkou* $\mathrm{Hz} = \mathrm{s}^{-1}$.

Jinak řečeno, sekundu máme přesně definovanou pomocí atomových hodin s cesiem. Sekunda je právě definovaná sice přes relativně dobře objektivně měřitelnou veličinu, ale stále zatím závisí na nějakém konkrétním atomu a na měření blízko absolutní nule, respektive na korekcích měření na reálnou teplotu. Definice se od roku 1967 výrazně nezměnila, ale do budoucna se uvažuje například o změně atomu, aby byla určena ještě přesněji. To pravděpodobně nebude mít žádný znatelný vliv na lidský život, ale bude to vhodné pro vědecké účely a možná nějaké technické aplikace.

> **Metr** *je definován fixací číselné hodnoty rychlosti světla ve vakuu c tak, aby byla rovna* 299 792 458*, je-li vyjádřena jednotkou* $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$*, kde sekunda je definována pomocí cesiové frekvence* $\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$.

Jinak řečeno, metr je vzdálenost, kterou urazí světlo za $(299\,792\,458)^{-1}$ s ve vakuu.

[9] Ve FYKOSu jsme již několikrát zadávali úlohy, které se zabývaly často dost drastickými změnami fyzikálních konstant a úkolem bylo snažit se domyslet, co by to znamenalo pro experimenty, pro život a pro vesmír. Ukázkou může být zdvojnásobení gravitační konstanty v úloze 26-II-P (`https://fykos.cz/_media/rocnik26/ulohy/pdf/uloha26_2_p.pdf`), výrazné snížení rychlosti světla v 27-I-P (`https://fykos.cz/_media/rocnik27/ulohy/pdf/uloha27_1_p.pdf`) nebo třeba opačný přístup, ve kterém jsme chtěli, aby se zachovávala velikost vesmíru na úkor změny konstant v 31-VI-P (`https://fykos.cz/_media/rocnik31/ulohy/pdf/uloha31_6_p.pdf`).

> **Kilogram** *je definován fixací číselné hodnoty Planckovy konstanty h tak, aby byla rovna* $6{,}626\,070\,15\cdot 10^{-34}$*, je-li vyjádřena jednotkou* $\mathrm{J{\cdot}s} = \mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-1}}$*, kde metr a sekunda jsou definovány pomocí* c *a* $\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$*.*

Jinak řečeno, zafixovali jsme hodnotu rychlosti světla a přechodů v chladných atomech cesia. Když doplníme fixaci Planckovy konstanty, máme určenou hmotnost.

Kilogram je jednotka, která byla až do letošní změny definice poslední závislou na prototypu, který je uložen v Sèvres u Paříže. To bylo nepraktické z mnoha důvodů. Představte si, že někdo přijde s hadříkem, setře vrstvu atomů a hmotnost Slunce „najednou naroste“ o miliony kilogramů.[10] Uvažovalo se o více možnostech fixace. Přímočará by byla fixace gravitační konstanty. Bohužel, tu v současnosti nedokážeme měřit dostatečně přesně. Může se to zdát trochu zvláštní, ale když už dokážeme měřit něco rozumně, tak je to spíše součin hmotnosti konkrétního tělesa jako Země či Slunce s gravitační konstantou, ale ne ji samotnou.[11] Proto nakonec padla volba na Planckovu konstantu, kterou dokážeme měřit s vysokou přesností a tím pádem víme, že hodnota, kterou jsme zafixovali co nejlépe dle současného poznání, odpovídá kilogramu, který jsme měli doposud.

Možná bychom mohli k této jednotce poznamenat, že na otázku: *Je těžší kilogram železa, nebo kilogram peří?* je správná odpověď: to záleží. Kilogram železa na podložce je těžší, pokud je v atmosféře a ve stejně silném tíhovém poli jako peří (a pokud dokonale nepřiléhá na podložku). Železo má totiž vyšší hustotu a tedy i nižší objem. Vztlaková síla je přímo úměrná objemu, takže větší vztlaková síla bude působit na peří a to tak bude na váze lehčí. Pokud bychom ovšem umístili oba předměty do prostoru bez atmosféry, pak by měly být stejně těžké. Pokud bychom je umístili na různá místa s různou tíhovou silou, pak bude rozhodující intenzita tíhového pole.

Jako nehodnocenou úlohu si můžete rozmyslet, jak je to s kilogramem v obecné teorii relativity a jak se může změnit jeden kilogram, který byl původně v klidu, když se začne pohybovat, a jak se změní intenzita gravitačního pole v místě, kde se vyskytuje.

> **Ampér** *je definován fixací číselné hodnoty elementárního náboje tak, aby byla rovna* $1{,}602\,176\,634\cdot 10^{-19}$*, je-li vyjádřena jednotkou* $\mathrm{C} = \mathrm{A{\cdot}s}$*, kde sekunda je definována pomocí* $\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$*.*

Jinak řečeno, když máme sekundu, tak zafixováním hodnoty elementárního náboje dostaneme elektrický proud.

Tato jednotka se letos měnila. Předcházející definice byla závislá na existenci nekonečně dlouhých vodičů ve vakuu umístěných přesně 1 m od sebe.[12] Současná definice je přirozenější.

> **Kelvin** *je definován fixací číselné hodnoty Boltzmannovy konstanty tak, aby byla rovna* $1{,}380\,649\cdot 10^{-23}$*, je-li vyjádřena jednotkou* $\mathrm{J{\cdot}K^{-1}} = \mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-2}{\cdot}K^{-1}}$*, kde kilogram, metr a sekunda jsou definovány pomocí* h*,* c *a* $\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$*.*

Jinak řečeno, pokud máme sekundu, metr a kilogram, můžeme zafixovat Boltzmannovu konstantu a dostaneme teplotu. Tato jednotka se nyní také měnila. V minulých verzích jednotek

[10] Kulturní vložka: Hadříky jsou obecně nebezpečným nástrojem v rukou neerudovaných osob, vizte ukázku restaurace obrazu např. `https://en.wikipedia.org/wiki/Ecce_Homo_(Martínez_and_Giménez,_Borja)`.

[11] Například v tabulce na `https://ssd.jpl.nasa.gov/?constants` můžete srovnat nepřesnost určení „gravitational constant“, která je zhruba 0,005 %, s nepřesností určení „mass ratio: sun/(Earth+Moon)“, která je zhruba 0,000006 %.

[12] Jak vidíte, nejenom ve FYKOSu se potkáte s takovými praktickými záležitostmi jako je sféricky symetrické kuře ve vakuu – vizte 28-III-5 (`https://fykos.cz/_media/rocnik28/ulohy/pdf/uloha28_3_5.pdf`).

SI byla definovaná pomocí fázových změn vody. Poslední definice byla spojena s trojným bodem vody a absolutní nulou.

> **Mol** *je definován fixací číselné hodnoty Avogadrovy konstanty, aby byla rovna* $6{,}022\,140\,76 \cdot 10^{23}$*, je-li vyjádřena jednotkou* mol^{-1}*.*

Jinak řečeno, řekli jsme si, kolik částic je jeden mol a tím jsme zafixovali jednotku látkového množství. Jak jistě tušíte, mol vlastně není skutečnou fyzikální jednotkou. Je to spíše jen předpona, tedy něco jako „kilo-“ nebo „mili-“.

> **Kandela** *je definována fixací číselné hodnoty světelné účinnosti* K_{cd} *monochromatického záření o frekvenci* $540 \cdot 10^{12}\,\mathrm{Hz}$*, aby byla rovna* 683*, je-li vyjádřena jednotkou* $\mathrm{lm{\cdot}W^{-1}} = \mathrm{cd{\cdot}sr{\cdot}W^{-1}} = \mathrm{cd{\cdot}sr{\cdot}kg^{-1}{\cdot}m^{-2}{\cdot}s^{3}}$*, kde kilogram, metr a sekunda jsou definovány pomocí* h*,* c *a* $\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$*.*

Kandela je asi nejméně používanou základní jednotkou. Úplně původně se vycházelo ze svítivosti svíčky a i proto má jednotka takový název.

Odvozené jednotky

Odvozené jednotky jsou ty, které vzniknou součinem či podílem základních jednotek. Mohou být v různých mocninách, ale nesmí být násobené nějakým číslem. Můžeme místo nich obecně používat zápis pomocí základních jednotek. Existuje jich velké množství, podíváme se na některé z nich. Některé byly už zmíněné v předchozích definicích, vybrané pojmenované ukázky jsou v tabulce 2. Některé používáme ve formě zápisu základních jednotek, jako je například rychlost v $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Tab. 2: Vybrané odvozené jednotky SI; Dop. zn. = doporučená značka veličiny a ukázka vztahu základním jednotkám, Jd. = Jednotka, Zn. = Značka jednotky; * energie má mnoho forem značení a vztahů v rámci fyziky, rozměrově odpovídá práci W.

Veličina	Dop. zn.	Jd.	Zn.
Elektrický náboj	$Q = It$	coulomb	$\mathrm{C} = \mathrm{A{\cdot}s}$
Frekvence	$\nu = \frac{1}{t}$	hertz	$\mathrm{Hz} = \mathrm{s^{-1}}$
Intenzita záření radioak. zdroje	$A = \frac{1}{t}$	bequerel	$\mathrm{Bq} = \mathrm{s^{-1}}$
Energie	např. $E = mgh$, ...*	joule	$\mathrm{J} = \mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-2}}$
Výkon	$P = \frac{W}{t}$	watt	$\mathrm{W} = \mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-3}}$

Důležitými odvozenými jednotkami jsou radián – bezrozměrná veličina odpovídající rovinnému úhlu od 0 do 2π (plný úhel), a steradián – bezrozměrná veličina odpovídající prostorovému úhlu od 0 do 4π (plný prostorový úhel). Obě můžeme určit tak, že vezmeme délku jednotkové kružnice, resp. plochu povrchu jednotkové koule, a to je právě hledaná hodnota.

Násobné jednotky

Pro zkrácení zápisu se používají násobné jednotky. Jistě z nich některé známe, v tabulce 3 jsou připomenuté ty, co se používají častěji a doporučujeme naučit se je zpaměti. Jinde můžete nalézt předpony od 10^{-24} po 10^{24}.

Tab. 3: Předpony pro násobné jednotky.

piko	nano	mikro	mili	centi	deci	deka	hekto	kilo	mega	giga	tera
p	n	μ	m	c	d	da	h	k	M	G	T
10^{-12}	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^{1}	10^{2}	10^{3}	10^{6}	10^{9}	10^{12}

Vedlejší jednotky

Jedná se o jednotky, které nejsou přímo odvozené jako součiny či podíly několika základních jednotek, ale je mezi nimi a základními jednotkami nějaký složitější vztah. V současnosti se nepovažují za jednotky soustavy SI, ale některé z nich jsou používané napříč světem. Typickými příklady, které často používáme, jsou minuta, hodina, den, rok, úhlový stupeň, hektar, litr či tuna. Mohli bychom sem řadit i jednotky, které v SI světě už obvykle nepoužíváme, jako jsou stopa, míle, loket, uzel, bušl, galon, libra atd.

Formální stránka řešení úloh

Jak jste si jistě všimli, správně se píše číslo, mezera, jednotka. Značky veličin píšeme kurzívou (skloněným písmem), značky jednotek pak normálním písmem (stojatým, neskloněným). V ČR používáme desetinnou čárku, v anglicky psané literatuře se pak obvykle setkáte s desetinnou tečkou. Pro oddělení tisíců můžeme použít mezeru, vhodnou násobnou jednotku, nebo tisíce oddělovat nemusíme. Pokud je jednotka naší veličiny tvořena více základními jednotkami, používáme tečku · pro zdůraznění násobení. Je ale i možné mezi jednotkami napsat pouze mezeru. Pro násobení (jak skalárních veličin, tak jednotek) nepoužíváme křížek ×, který je vyhrazený pro vektorový součin. Přijatelné formy zápisu jsou například

$$W = 1\,230\,\mathrm{J} = 1{,}23\,\mathrm{kJ} = 1\,230\,\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-2}} = 1\,230\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}}\,.$$

Dále pro vyšší či nižší řády často používáme zápis s mocninou desítky, tedy např.

$$G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\,\mathrm{kg^{-1}{\cdot}m^3{\cdot}s^{-2}}\,,\quad M_{\mathrm{Slunce}} = 1{,}98\cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}\,.$$

Jednotka se nemusí uvádět u bezrozměrných veličin. Mnohdy ale uvádíme procenta % či části z milionu ppm, kde $1 = 100\,\% = 1\,000\,000\,\mathrm{ppm}$. Někdy ovšem používáme bezrozměrnou jednotku, protože nechceme splést například u úhlových veličin

$$\pi\ \mathrm{rad} = 180^\circ\,.$$

Ve specifických případech, kdy je zápis jednotky dlouhý a zajímá nás pouze srovnání hodnot (zpravidla v grafu), se využívá označení „arbitrary unit“, resp. různé zkratky jako arb. unit, arb. u., AU či a.u. – vzhledem k tomu, že poslední dvě jsou často používané pro astronomickou jednotku (přičemž au je nyní doporučené označení astronomické jednotky). V případě řešení úloh FYKOSu se doporučujeme tomuto způsobu označení jednotky zcela vyhnout. Jinde bychom pak doporučili používat spíše označení „procedure defined unit“ se zkratkou p.d.u. dle IUPAC.[13]

[13] International Union of Pure and Applied Chemistry = Mezinárodní unie pro čistou a užitou chemii

Vyjádření neznámé z rovnice

Pokud řešíte nějakou fyzikální úlohu, téměř vždy je lepší pracovat s „písmenky“ než s „čísly“. Má to několik důvodů:

- Obecný zápis je kratší. Srovnejte $mc\,(t_1 - t_0)$ a
$$0{,}206\,\mathrm{kg} \cdot 4\,180\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}} \cdot (303\,\mathrm{K} - 273\,\mathrm{K})\ .$$
- Hybridní zápis ve výpočtu bez jednotky je nekorektní, protože 10 brambor není to samé jako 10 ampérů. I tak se stává, že se objevují zápisy jako
$$mc\,(t_1 - t_0) = 0{,}206 \cdot 4\,180 \cdot (303 - 273) = 861 \cdot 30 = 25{,}8\,\mathrm{kJ}\,.$$
Jak jste si asi všimli, tak ani jedna rovnost dokonale neplatí. První a třetí nám říkají, že jouly jsou rovny bezrozměrné jednotce, což je závažná chyba, a u druhé a třetí jsme zaokrouhlovali, což není taková chyba, ale ztrácíme přesnost.
- Pokud dosadíte až na konec, zmenšíte zaokrouhlovací chyby v průběhu.
- Může se stát, že vám někdo řekne: „A co kdyby se teplota v chladnější lázni snížila o 10 K?“ Pak vám stačí jenom dosadit do výsledného vztahu jedno číslo jiné a nemusíte počítat celou úlohu od začátku.
- Můžete provézt rozměrovou zkoušku (vizte dále). V případě, že rovnou dosazujete čísla, tak se obvykle stane, že si rovnou napíšete $mc\,(t_1 - t_0) = 0{,}206 \cdot 4\,180 \cdot (303 - 273) \cdot \mathrm{J}$ a pak už rozměrová zkouška nedává smysl.

Poučení do života tedy zní: **Pokud to jde, počítejte obecně a vyjádřete neznámou z rovnice!** Pokud to nejde, tak je opět vhodné upravovat rovnici co nejdéle do nějakého co nejjednoduššího tvaru a až ten využít pro numerické výpočty.[14]

Zaokrouhlování, přibližné rovnosti a úměrnosti

Důležitým završením výpočtu je závěrečné zaokrouhlení. Buď pouze vhodně zaokrouhlíme na vhodný počet platných cifer nebo i vypočteme chybu měření a tu u svého výsledku uvedeme. Zpravidla druhou a složitější variantu s určením chyby vyžadujeme u experimentální úlohy, kdežto u teoretických úloh nám stačí vhodné zaokrouhlení na správný počet platných cifer.

Platné cifry Je potřeba přesně chápat, co znamenají platné cifry. Pokusme si to vysvětlit názorně na příkladech. Pokud víme, že něco měří 12,5 cm a měřili jsme to pravítkem s přesností na milimetry, tak je to správný zápis a námi naměřená veličina má tři platné cifry. Pokud bychom měřili s přesností na centimetry a dospěli k výsledku 13 cm, pak se jedná o dvě platné cifry. I pokud zapíšeme svoje měření jako 1,3 dm, pak jsou to stále dvě platné cifry. Z formátu zápisu 130 mm si tím už ale nemusíme být jisti, zejména pokud vidíme pouze tento zápis a nikdo nám neřekl, jak měření probíhalo a jak moc si tedy můžeme výsledku „vážit“. Obecně ale bychom tento zápis také měli považovat za dvě platné cifry, pokud nemáme další informaci. Stejně tak zápis 130 000 μm budeme považovat za zápis se dvěma platnými ciframi. Pokud bychom chtěli jasně vyjádřit, že jsme něco změřili s přesností na čtyři platné cifry a na konci jsou dvě nuly, pak musíme číslo převést do desetinné formy, např. 1,300 dm či $1{,}300 \cdot 10^{-2}$ m nebo 130,0 mm.

[14] O numerických metodách řešení různých problémů pojednávaly seriály FYKOSu v 31. ročníku (o numerických metodách a počítačových simulacích), v 21. ročníku (o počítačové fyzice) a 8. ročníku (o numerických metodách). Odkaz na ročenky s texty a řešenými úlohami naleznete na stránce `https://fykos.cz/ulohy/serial`.

Snad je i z ukázek názorné to, že nemá smysl mluvit o desetinných místech, protože převodem jednotek se nám počet desetinných míst změní, ale fyzikálně zajímavý je právě počet platných cifer.

Jak se chovat při zaokrouhlování? Jednak se moc nesnažte zaokrouhlovat mezivýpočty, které byste dosazovali dále. Jak je uvedené u zdůvodnění důležitosti vyjadřování neznámé z rovnice, tak tím byste se mohli dopustit akumulované nepřesnosti.[15] Na druhou stranu je vhodné si dosazovat do některých mezikroků a ověřit, že vám vychází rozumné hodnoty pro tyto fyzikální veličiny a pak třeba i tyto hodnoty do postupu napsat – lépe tím zdokumentujete svůj postup.

Závěrečné zaokrouhlení se provádí podle nejhůře zadané veličiny. Tedy té, která byla zadána na nejmenší počet platných cifer. V případě, že ve výpočtu vystupují nějaké věci jako počet kusů apod., pak tyto veličiny bereme jako zadané přesně a ne např. jako jednu platnou cifru. Zaokrouhlíme na počet platných cifer odpovídající nejhůře zadané veličině či maximálně o jednu platnou cifru více. Při zaokrouhlování dle těchto pravidel používáme standardní způsob zaokrouhlování (méně než 5 dolů; 5 a více nahoru).

Příklad Perdita X běžela rychlostí $v = 3{,}12\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Jak všichni jistě víte, má a měla hmotnost zhruba metrák. Jakou měla kinetickou energii?

Kinetickou energii určíme ze vztahu $E_\mathrm{k} = mv^2/2$. Jaká je nejhůře zadaná veličina? Zjevně jde o hmotnost, kde víme, že jde asi o metrák, takže nevíme ani jak moc přesně to víme. Jde o praktickou ukázku toho, že ne vždy je počet platných cifer hned jasný. Pravděpodobně bude přesnost tak na desítky kilogramů, tedy budeme předpokládat, že hmotnost je $m = 1{,}0 \cdot 10^2\,\mathrm{kg}$. Zaokrouhlíme proto na dvě platné cifry. Výsledek je $E_\mathrm{k} = 490\,\mathrm{J}$, když zaokrouhlíme na dvě platné cifry. Samozřejmě by byl lepší explicitnější zápis $E_\mathrm{k} = 4{,}9 \cdot 10^2\,\mathrm{J}$ či $E_\mathrm{k} = 0{,}49\,\mathrm{kJ}$.

Co u výsledků s chybou měření V případě, že máte vypočítanou chybu měření, zaokrouhlujeme právě podle této chyby. Chybu obvykle zaokrouhlíme na jednu platnou cifru. Výjimkou je, pokud je první cifra 1 nebo 2, pak lze zaokrouhlit na dvě platné cifry.[16] Chybu často zaokrouhlujeme nahoru, aby byla vyšší jistota, že se v intervalu vytyčeném střední hodnotou a touto chybou nalézá skutečná hodnota. To, jakým způsobem lze vypočítat chybu měření, se můžete dočíst v mnoha zdrojích.[17]

Samotnou veličinu pak zaokrouhlíme na stejné desetinné místo, na které jsme zaokrouhlili chybu. Tedy pozor, zde se poprvé něco řídí podle desetinného místa. Zaokrouhlení provádíme jinak standardním postupem (méně než 5 dolů; 5 a více nahoru). Nezapomeneme výsledek zapsat tak, aby jak samotná veličina, tak chyba měly jednotku. V tabulce 4 je několik ukázek korektních zápisů.

Typy rovností Máme několik forem rovnosti. Základní rozdělení je uvedeno v tabulce 5.

[15] Když už byste opravdu potřebovali počítat s vyjádřenými hodnotami a ne proměnnými, pak je vhodné zaokrouhlovat mezivýpočty tak, že používáte o dvě platné cifry více, než budete potřebovat přesnost výsledku. Tím pádem budou chyby v několikanásobném zaokrouhlení mezivýpočtu skoro jistě dostatečně malé, aby výsledek nezměnily. Ale tento postup nedoporučujeme.

[16] V některých specifických případech se zaokrouhluje vždy na dvě platné cifry.

[17] Například knihovnička Fyzikální olympiády ČR obsahuje text Zpracování dat fyzikálních měření `http://fyzikalniolympiada.cz/texty/mereni.pdf`. FYKOSí seriál 30. ročníku se také věnoval zpracování dat fyzikálních měření `https://fykos.cz/rocnik30/serial/start`.

Tab. 4: Příklady korektního zápisu výsledků s chybou měření.

$a_\mathrm{g} = (9{,}81 \pm 0{,}02)\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$	$h = (162 \pm 2)\ \mathrm{cm}$	$A_\mathrm{Bq} = (1\,430 \pm 40)\ \mathrm{Bq}$
$l = (4{,}242 \pm 0{,}008) \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}$	$I = (0{,}132 \pm 0{,}017)\ \mathrm{\mu m}$	$U = (630 \pm 30)\ \mathrm{kV}$

Tab. 5: Formy rovnosti a úměrnosti.

Forma rovnosti	Význam
$=$	Rovná se, přesně.
$\doteq$	Rovná se, ale přibližně. Používáte, když běžně zaokrouhlujete.
$\equiv$	Rovná se ve smyslu „je identické“. Na rozdíl od běžného = platí rovnost pro všechny možné hodnoty. Například rovnice $f(x) = 1$ znamená, že hledáme takové x, pro které je funkční hodnota jedna. Oproti tomu vztah $f(x) \equiv 1$ nám říká to, že hodnota funkce f je pro všechna x rovna jedné.
$\approx$	Rovná se přibližně. Obvykle by mělo jít o řádový odhad na jednu, maximálně dvě platné cifry. Typicky se používá u aproximací, například $\sin x \approx x$ pro malé hodnoty x.
$\propto$	Vyjadřuje, že veličina vlevo je přímo úměrná veličině vpravo.
$\sim$	Má více významů, například úměrnost nebo podobnost. Občas se používá pro hodně divoké odhady (slabší verze $\approx$).

Užitečnost fyzikálních jednotek

Rozměrová zkouška

Rozměrová zkouška je základním nástrojem pro kontrolu výsledků. I když vůbec nechápete postup, jak někdo něco spočítal, pokud nevychází rozměrová zkouška, musí být nutně ve výpočtu chyba. Tato metoda je velice rychlá a hodí se mimo jiné i pro kontrolu vlastních výsledků.

Rozměrová zkouška spočívá v tom, že si porovnáte jednotku veličiny, kterou jste chtěli vypočítat s jednotkou vztahu, která vám vyšla. Pokud se rovnají, výsledek má naději na to být správný. Pokud se nerovnají, máte jistotu, že je to špatně (pokud jste neudělali chybu v rozměrové zkoušce).

Například, co by se nemělo nikdy stát, je, že bychom měli do funkce sinus, kosinus, tangens, exponenciála či logaritmus dosazovat veličinu s jednotkou, která není bezrozměrná. Další evidentní chybou je, pokud sčítáme či odečítáme dvě různé jednotky. Také bychom nikdy neměli nic mocnit na nějakou veličinu s fyzikálním rozměrem.

Rozměrová analýza

Jde o užitečnou metodu, s jejíž pomocí můžeme získat velice zajímavé vztahy pouze na základě znalosti veličin (a jejich jednotek), které by měly hrát roli v daném fyzikálním jevu. Jednotky se musí rovnat. Proto převedeme všechny jednotky na základní s neznámými exponenty a sestavíme rovnice pro tyto exponenty.

Tento postup dobře ilustruje následující úlohy FYKOSu:

- 24-IV-1 (1. část) – napnutá struna[18] – rozměrová analýza je zde docela podrobně vysvětlena,
- 28-V-1 – tuhost pana Plancka[19] – pomocí rozměrové analýzy se hledá jedna z Planckových veličin,
- 32-V-2 – hloubka vniku do koule[20] – pomocí rozměrové analýzy se nalezne řešení jinak velice náročného problému vedení tepla,
- 7. FYKOSího Fyziklání[21] – úloha AB – písky času – další jednoduchá aplikace u jinak složitého problému.

Další úlohy využívající rozměrovou analýzu:

- 28-II-E – vodní rozpad[22] – rozměrová analýza je využita v teorii k experimentu,
- 20-II-E – vlny na vodě[23] – opět aplikace rozměrové analýzy v teorii k experimentu s vodou.

Podobnostní čísla

Podobnostní čísla jsou výpočetně velmi podobná rozměrové analýze. Motivací pro sestavování takových čísel je v tom, že některé fyzikální jevy probíhají obdobně při stejných hodnotách daných podobnostních čísel. Často se využívají v hydromechanice, protože jde často o příliš složité problémy na to, aby měly analytické řešení. Pokud ale nalezneme vhodné podobnostní číslo, pak můžeme provést simulace či experimenty pro mnohem menší rozměry, což bude pravděpodobně daleko levnější, než kdybychom museli např. stavět různá celá křídla letadel jako prototypy.

Ve srovnání s rozměrovou analýzou se nám situace komplikuje (či zjednodušuje, záleží na úhlu pohledu) tím, že chceme, aby výsledná veličina byla bezrozměrná. Tím pádem, pokud nalezneme jeden výsledek, nalezneme jich nekonečně mnoho. Stačí naše podobnostní číslo umocnit na (nenulovou) mocninu a dostáváme další řešení. Nejhezčí je obvykle sestavit podobnostní číslo tak, aby bylo co nejvíce veličin v čitateli a aby exponenty všech veličin byly celá čísla. Mnoho podobnostních čísel můžete nalézt na internetu.[24]

Nejznámějším podobnostním číslem je pravděpodobně Reynoldsovo číslo, které je definované vztahem

$$\mathrm{Re} = \frac{v_\mathrm{s} d}{\nu}\,,$$

kde v_s je střední hodnota rychlosti proudění kapaliny v daném průřezu (tu můžeme vypočítat z průtoku kapaliny), d je „hydraulický průměr“ trubice (tedy efektivní průměr) a ν je kinematická viskozita kapaliny. Případně vztah mezi kinematickou viskozitou kapaliny, její dynamickou viskozitou η a hustotou ϱ je $\eta = \nu\varrho$.

Vysoké hodnoty Reynoldsova čísla znamenají turbulentní proudění kapaliny, při nízkých pak dochází k laminárnímu proudění. O hranici mezi těmito oblastmi se hovoří jako o kritické hodnotě, byť jde spíš o interval, kde není proudění ani trvale turbulentní ani zcela laminární. Často se mluví o kritické hodnotě kolem 2 000, ale záleží na konkrétním uspořádání toku kapaliny.

[18] https://fykos.cz/_media/rocnik24/ulohy/pdf/uloha24_4_1.pdf
[19] https://fykos.cz/_media/rocnik28/ulohy/pdf/uloha28_5_1.pdf
[20] https://fykos.cz/_media/rocnik32/ulohy/pdf/uloha32_5_2.pdf
[21] https://fykos.cz/_media/rocnik26/fyziklani/reseni.pdf
[22] https://fykos.cz/_media/rocnik28/ulohy/pdf/uloha28_2_e.pdf
[23] https://fykos.cz/_media/rocnik20/ulohy/pdf/uloha20_2_e.pdf
[24] Abychom vám usnadnili hledání, tak na anglické Wikipedii je naleznete na stránce https://en.wikipedia.org/wiki/Dimensionless_numbers_in_fluid_mechanics.

Jak správně zapsat řešení

Ještě si na závěr zdůrazněme, jaký je správný postup pro zápis řešení. Nejde jenom o to, jak psát řešení FYKOSu, podobná struktura je obvykle požadována i u jiných soutěží, protokolů z měření, závěrečných prací a dalších textů.

Předně je potřeba slovně popsat, alespoň stručně, svůj **postup řešení**. Je sice pěkné, pokud se matematicky dostaneme ke správnému výsledku, ale hodnotí se i to, jak své výsledky dokážeme interpretovat a také odkud a jak jsme se k danému matematickému řešení dostali. V některých případech se to může zdát zjevné, ale i tak je lepší popsat postup slovně. Uvedení podrobného postupu je důležité i proto, že pokud se hned na začátku řešení dopustíme malé chyby, může být zbytek řešení stále uznaný jako správný. Napíšeme-li ale pouze chybný výsledek bez dostatečného postupu, bude špatně celá úloha.

Dále nesmíme zapomínat na všechna **pravidla o zaokrouhlování a jednotkách**, která jsme uvedli výše. Je vhodné si výsledek zkontrolovat jak z hlediska správnosti jednotek, tak z hlediska reálnosti hodnot veličin, které nám vyšly. Typický příklad, kdy by nás mělo trknout, že něco nevyšlo dobře, je, pokud nám vyjde rychlost vyšší než rychlost světla. Ale i když se budeme bavit o tom, jak rychle jede auto, tak už tisíce metrů za sekundu by také měly vyvolávat silné podezření, že je něco špatně. Pokud ovšem chybu nedokážete najít a jste přesvědčeni o správnosti svého postupu, tak je určitě rozumné řešení odeslat. Každopádně je potřeba v rámci diskuze napsat, že výsledek není moc pravděpodobný a že nejspíše bylo zanedbáno ještě něco, co hraje velkou roli. I za takovou diskuzi je často možné získat body. Určitě je to lepší šance na větší bodový zisk, než když budete nereálný výsledek ignorovat.

Všechny úlohy, které jsou zadány ve FYKOSu, jsou slovní úlohy. Stejně tak když píšete nějakou vědeckou práci, zadání problému je slovní. Proto je potřeba na závěr **napsat slovní odpověď** - či ještě lépe doplnit ji diskuzí. Diskuze by se měla zabývat obvykle tím, co jsme zanedbali a jaký vliv by mohlo mít uvážení těchto veličin, pokud to dokážete odhadnout. Tím myslíme třeba i jen kvalitativní popis toho, že na základě jevu X bude výsledek Y větší či menší. Například pokud otázkou bylo, jaký výkon musí mít motor auta na to, aby dojelo za určitý čas z místa A do místa B a explicitně nebylo v zadání napsáno, že se má zanedbat odpor prostředí, ale nikde nebyly ani popsány parametry auta, které s odporovými silami souvisí, tak je vhodná odpověď typu: „Aby se auto dostalo z bodu A do bodu B za 20 minut, muselo by mít v průběhu cesty minimálně konstantní výkon 40 kW. Jedná se o minimální výkon, protože jsme neuvažovali odporové síly prostředí, které by způsobily ještě další energetické ztráty.“

Závěr a upoutávka na příště

Co jsme se dozvěděli a co jsme si zopakovali? Hlavně to, že je potřeba používat jednotky. Připomněli jsme si základní jednotky SI s jejich novými definicemi. Rozměrová analýza nám může pomoci odhalit zajímavé vztahy mezi fyzikálními veličinami. Nezapomeňte psát správné jednotky a správně zaokrouhlovat.

Příště se budeme zabývat grafickým řešením úloh a využíváním symetrie. Dále zmíníme vhodnost některých souřadnic pro řešení vybraných fyzikálních problémů.

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.