Úloha II.5 ... kolečko s pružinkou

8 bodů; průměr 4,31; řešilo 54 studentů

Máme tenký dokonale tuhý homogenní disk o poloměru R a hmotnosti m, ke kterému je připojena gumička. Jedním koncem je upevněná ve vzdálenosti $2R$ od okraje disku a druhým koncem na jeho okraji. Gumička funguje jako dokonalá tenká pružina o tuhosti k, klidové délce $2R$ a zanedbatelné hmotnosti. Disk je upevněný ve svém středu tak, že se může v jedné rovině volně otáčet kolem tohoto bodu, ale nemůže se posouvat či měnit rotační rovinu. Určete závislost velikosti momentu síly, kterou bude gumička urychlovat či zpomalovat rotaci disku v závislosti na úhlové výchylce φ, a sestavte pohybovou rovnici disku.

Bonus Určete periodu malých kmitů soustavy.

Karlovi se točila hlava.

Zvolme počátek soustavy souřadné ve středu disku tak, aby souřadnice bodu upevnění gumičky k disku byla

$$x = R\sin\varphi\,,$$
$$y = R\cos\varphi\,.$$

Délku gumičky potom určíme jako

$$l = \sqrt{x^2 + (3R - y)^2} = \sqrt{R^2\sin^2\varphi + 9R^2 - 6R^2\cos\varphi + R^2\cos^2\varphi} = \sqrt{10 - 6\cos\varphi}R\,.$$

Obecně pro velikost síly, kterou gumička působí na bod upevnění, platí

$$F = k\Delta l\,,$$

kde Δl je prodloužení gumičky, neboli $\Delta l = l - l_0 = l - 2R$. V našem případě je tato vzdálenost vždy nezáporná, čili velikost síly bude kladná.

Velikost momentu síly M, který roztáčí disk, je součinem síly a kolmé vzdálenosti síly $\mathbf{F}$ od středu, kterou označíme r. Uvažujme trojúhelník, jehož vrcholy jsou body upevnění gumičky a střed disku. Úhel u vrcholu daného bodem upevnění gumičky mimo disk označme α, potom platí

$$r = 3R\sin\alpha\,.$$

Ze sinové věty vyplývá

$$\sin\alpha = \frac{R}{l}\sin\varphi\,,$$

takže pro r dostáváme

$$r = 3R\frac{\sin\varphi}{\sqrt{10 - 6\cos\varphi}}\,.$$

Velikost momentu síly bude

$$M = Fr = 3kR^2\left(1 - \frac{2}{\sqrt{10 - 6\cos\varphi}}\right)\sin\varphi\,.$$

Posledním úkolem bylo sestavit pohybovou rovnici. Pro rotační pohyb platí $J\varepsilon = M$, kde ε je úhlové zrychlení, neboli $\ddot{\varphi}$. Celkově pak dostáváme

$$\frac{1}{2}mR^2\ddot{\varphi} = 3kR^2\left(\frac{2}{\sqrt{10 - 6\cos\varphi}} - 1\right)\sin\varphi\,,$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{6k}{m}\left(\frac{2}{\sqrt{10 - 6\cos\varphi}} - 1\right)\sin\varphi\,.$$

Z této rovnice vidíme, že úhlové zrychlení nezávisí na poloměru disku, pokud je disk homogenní, ale na jeho hmotnosti a na tuhosti gumičky. Rovnici bychom mohli pak dále řešit, ale obecné analytické řešení zapsané pomocí konečného počtu základních funkcí téměř jistě neexistuje.

Bonus

Dalo by se vyjít z pohybové rovnice, ale použijeme jiný postup. Začneme s tím, že určíme potenciální energii pružnosti

$$E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}k\Delta l^2 = \frac{1}{2}kR^2\left(\sqrt{10-6\cos\varphi}-2\right)^2 .$$

Provedeme Taylorův rozvoj potenciální energie pro $\varphi_0 = 0$ a to až do 4. řádu, protože první tři členy vychází nulové. To ukazuje, že okolí rovnovážné polohy je docela metastabilní, protože obvykle pro kmitání dostáváme nenulový člen už ve druhém řádu. Pro malé kmity stačí aproximovat potenciální energii pouze prvním nenulovým členem

$$E_\mathrm{p} \approx \frac{9}{32}kR^2\varphi^4 .$$

Periodu kmitů určíme pomocí zákona zachování celkové mechanické energie

$$E_\mathrm{p} + E_\mathrm{k} = \frac{9}{32}kR^2\varphi^4 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 = \frac{9}{32}kR^2\varphi^4 + \frac{1}{4}mR^2\dot{\varphi}^2 = \frac{9}{32}kR^2\varphi_\mathrm{m}^4 ,$$

kde φ_m je úhel maximální výchylky. Dostáváme diferenciální rovnici

$$9kR^2\varphi^4 + 8mR^2\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2 = 9kR^2\varphi_\mathrm{m}^4 ,$$

kterou řešíme separací proměnných

$$\sqrt{\frac{8m}{9k}}\int_0^{\varphi_\mathrm{m}} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\varphi_\mathrm{m}^4-\varphi^4}} = \int_0^{T/4}\mathrm{d}t .$$

Úpravou dostáváme

$$T = \frac{4}{\varphi_\mathrm{m}^2}\sqrt{\frac{8m}{9k}}\int_0^{\varphi_\mathrm{m}} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{\varphi}{\varphi_\mathrm{m}}\right)^4}} ,$$

kde použijeme substituci

$$\frac{\varphi}{\varphi_\mathrm{m}} = \sin\psi ,$$
$$\mathrm{d}\varphi = \varphi_\mathrm{m}\cos\psi\mathrm{d}\psi .$$

Pro periodu tak platí

$$T = \frac{4}{\varphi_\mathrm{m}}\sqrt{\frac{8m}{9k}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1+\sin^2\psi}} .$$

Integrál nemá analytické řešení, ale to nevadí. Jedná se jen o číselnou konstantu, takže ho můžeme řešit numericky, což vychází

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1+\sin^2\psi}} \doteq 1{,}311\,.$$

Výsledný vztah pro periodu malých kmitů je

$$T \approx \frac{4,944}{\varphi_\mathrm{m}}\sqrt{\frac{m}{k}}\,.$$

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Jindřich Jelínek
`jjelinek@fykos.cz`