Úloha II.E ... potřebuji obejmout

13 bodů; průměr 5,24; řešilo 67 studentů

Změřte svůj objem několika různými způsoby. *Matěj se koupal ve vaně.*

Nejdříve si ujasněme, co vlastně budeme měřit. Objem našeho těla není konstantní dlouhodobě (rosteme, přibíráme, hubneme,...) ani krátkodobě (dýchání). Dlouhodobé změny objemu eliminujeme tak, že budeme měření provádět v dostatečně krátkém časovém úseku. Konkrétně toto měření bylo provedeno v srpnu 2019. Objem je také značně ovlivněn tím, zda jsme nadechnutí nebo vydechnutí. Proto si nyní stanovíme, že budeme měřit pouze objem nadechnutého těla. Objem při vydechnutí by bylo možné měřit následujícími metodami zcela analogicky.

Geometrická aproximace těla

Na lidské tělo se můžeme dívat jako na velmi komplexní geometrický objekt, jehož objem by bylo velmi obtížné spočítat. V této metodě měření budeme lidské tělo aproximovat vhodnou kombinací geometrických těles, jejichž objem dokážeme spočítat snadno. Samozřejmě toto měření nebude moc přesné, proto se musíme dobře zamyslet nad volbou geometrických těles.

Není jednoznačný způsob, jak lidské tělo aproximovat. My zvolíme takovou aproximaci, ve které si tělo rozdělíme na končetiny, trup a hlavu. Objem těchto částí spočítáme zvlášť. Nejjednodušší by bylo aproximovat člověka jako minecraftovou figurku, kde je těchto šest částí reprezentováno obyčejnými kvádry. Lidské tělo ale není takto hranaté, proto zkusíme vymyslet přesnější aproximaci.

Ruka

Chceme-li být přesnější než minecraftový kvádr, můžeme zvolit místo toho tvar válce. Jenže to taky není dokonalé, protože ruka[1] nemá ve všech místech stejný průřez. U ramena je nejširší a u zápěstí je užší. Zároveň nemá rovnoměrný průběh, aby ji bylo možné nahradit komolým kuželem. Ve skutečnosti ani nemá kruhový průřez. Pokusíme se ji aproximovat jakousi soustavou komolých kuželů postavených na sebe tak, že sousední komolé kužely sdílejí stejnou podstavu. První podstava bude odpovídat průměru natažené ruky těsně pod ramenem, druhou podstavu zvolíme nad loketním kloubem, třetí pod loketním kloubem a čtvrtou u zápěstí. Náš model ruky se tedy bude sestávat ze tří komolých kuželů. Využijeme vzorec pro objem komolého kuželu

$$V_\mathrm{k} = \frac{\pi v}{3}\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right) = \frac{v}{12\pi}\left(o_1^2 + o_1 o_2 + o_2^2\right) ,$$

kde v je jeho výška, $r_{1,2}$ jsou poloměry jeho podstav a $o_{1,2} = 2\pi r_{1,2}$ jsou obvody jeho podstav. Zobecněním tohoto vzorečku najdeme vztah pro objem našeho modelu ruky.

$$V_\mathrm{r} = \frac{v}{12\pi\,(N-1)}\left(o_1^2 - o_N^2 + \sum_{i=2}^{N}\left(2o_i^2 + o_{i-1}o_i\right)\right) , \tag{1}$$

kde v je délka celé ruky a využili jsme předpokladu, že měřené obvody ruky jsou rovnoměrně rozložené po délce ruky, takže výška jednoho komolého kuželu je $\frac{v}{N-1}$, kde N je počet měření obvodů.

Všechna měření byla provedena krejčovským metrem. Výsledky měření jsou v tabulce 1. Po dosazení těchto hodnot do (1) dostáváme

$$V_\mathrm{r} = (2\,100 \pm 100)\ \mathrm{cm}^3 = (2{,}1 \pm 0{,}1)\ \mathrm{l}\,.$$

[1] Jako ruku zde označujeme celou horní končetinu.

Délka ruky byla měřena od ramene k počátku prstů. Jejich objem zanedbáváme.

Tab. 1: Objem ruky

délka ruky	v	(72 ± 2) cm
obvod pod ramenem	o_1	(31 ± 1) cm
obvod nad loketním kloubem	o_2	(24 ± 1) cm
obvod pod loketním kloubem	o_3	(26 ± 1) cm
obvod u zápěstí	o_4	(17 ± 1) cm

Noha

Pro nohu použijeme zcela analogický model jako pro ruku. Dalo by se argumentovat, že například koleno docela porušuje „kuželovitost“ nohy, ale pro rozumný odhad to stačí. Po dosazení dostáváme

$$V_\mathrm{n} = (6\,100 \pm 200)\ \mathrm{cm^3} = (6{,}1 \pm 0{,}2)\ \mathrm{l}\,.$$

Tab. 2: Objem nohy

délka nohy	v	(93 ± 2) cm
obvod pod pánví	o_1	(53 ± 1) cm
obvod nad kolenem	o_2	(38 ± 1) cm
obvod pod kolenem	o_3	(34 ± 1) cm
obvod u kotníku	o_4	(22 ± 1) cm

Hlava

Hlava bude komplikovaná na aproximaci. Mohli bychom ji aproximovat elipsoidem. Ale v tom případě by bylo složité změřit jeho poloosy a není jasné, jak bychom tam zakomponovali bradu. Vzhledem k tomu, že hlava je oproti ostatním částem těla relativně malá, můžeme zde užít hrubší aproximaci. Aproximujeme jí prostě koulí. Objem koule (hlavy) lze vypočítat, když známe její obvod

$$V_\mathrm{h} = \frac{1}{6\pi^2} o^3\,.$$

Obvod změříme několikrát v různých místech. Po dosazení dostaneme

$$V_\mathrm{h} = (4{,}2 \pm 0{,}6)\ \mathrm{l}\,.$$

Trup

Toto je asi nejkomplikovanější část, její průřez se špatně modeluje nějakým geometrickým objektem. Použijeme modifikaci aproximace rukou a nohou s tím že místo kruhového průřezu budeme předpokládat elipsoidální průřez. Jelikož však je to velmi hrubá aproximace, nebudeme se zabývat tím, jak přesně vypočítat objem takového komolého objektu, jehož podstavy

Tab. 3: Obvod hlavy

v horizontální rovině	(58 ± 1) cm
ve vertikální rovině (pod bradou)	(65 ± 1) cm
šikmo (přes bradu)	(69 ± 1) cm
šikmo (přes čelo)	(60 ± 1) cm
průměr	(63 ± 3) cm

jsou různé elipsy s různou excentricitou. Použijeme jednodušší model, kdy si trup rozdělíme rovnoměrně svisle na určitý počet řezů a každému řezu bude příslušet eliptický válec, jehož podstavou je daná elipsa. Objem tedy vypočteme jako

$$V_\mathrm{T} = \frac{\pi v}{4\,(N-1)} \sum_{i=1}^{N} 2a_i 2b_i\,,$$

kde N je počet řezů, v je výška trupu, $2a_i$ je hlavní osa (tedy největší průměr, nikoliv poloosa) a $2b_i$ je vedlejší poloosa i-té elipsy.[2]

Výška $v = (74 \pm 2)$ cm byla změřena od konce nohou po ramena. Poloosa průřezu trupu se neměří tak snadno, protože nemůžeme jednoduše natáhnout metr skrze tělo. Pro tento účel bylo vyrobeno velké posuvné měřidlo (šuplera) ze stavebnice LEGO, která umožňuje dobře postavit pravé úhly. Dvojnásobek poloosy byl změřen sevřením trupu mezi čelisti měřidla a následným přepočítáním počtu LEGO dílků na centimetry. Nejistota této metody byla odhadnuta na 1 cm. V tabulce 4 jsou vypočteny i dílčí průřezy a excentricity.

Tab. 4: Průměr trupu

kde?	$\frac{2a_i}{\mathrm{cm}}$	$\frac{2b_i}{\mathrm{cm}}$	$\frac{S_i}{\mathrm{cm}^2}$	ε
boky/zadek	33 ± 1	23 ± 1	610 ± 30	0,71
pupík	27 ± 1	20 ± 1	430 ± 30	0,69
mezi pup a prs	29 ± 1	23 ± 1	510 ± 30	0,64
prsa	32 ± 1	25 ± 1	630 ± 30	0,64
ramena	45 ± 1	18 ± 1	630 ± 40	0,92

Průměrný obsah průřezu je[3] $S = (560 \pm 30)\ \mathrm{cm}^2$. Pro objem trupu pak dostáváme

$$V_\mathrm{T} = (41{,}4 \pm 2{,}2)\ \mathrm{l}\,.$$

Zbytek

Některé části těla jsme zcela zanedbali, jako například chodidla, dlaně s prsty, krk a samozřejmě pohlavní orgány. Tyto části nejsou však v porovnání s trupem a končetinami dost velké

[2] Trochu neintuitivně zde pracujeme s průměry elipsy místo jejich poloos, protože poloosy nemůžeme snadno měřit přímo.

[3] Do toho nebyla započtena směrodatná odchylka aritmetického průměru, jelikož to je součást chyby našeho modelu.

a geometricky příliš komplikované, než aby se nám vyplatilo vytvářet jejich modely. Místo toho odhadneme, že dohromady bude jejich objem

$$V_\mathrm{Z} = (3{,}0 \pm 0{,}5)\ \mathrm{l}\,.$$

Shrnutí

Po sečtení dostáváme celkový objem

$$V = (66 \pm 3)\ \mathrm{l}\,.$$

Tab. 5: Části těla

část těla	geometrické těleso	objem
ruka	komolé kužele	$(2{,}4 \pm 0{,}1)$ l
noha	komolé kužele	$(6{,}1 \pm 0{,}2)$ l
hlava	koule	$(4{,}2 \pm 0{,}6)$ l
trup	eliptický válec	$(41{,}4 \pm 2{,}2)$ l
zbytek	odhad	$(3{,}0 \pm 0{,}5)$ l

Měření přes lidskou hustotu

Nejsnáze by se nám asi objem těla měřil, pokud bychom znali hustotu. Pak by stačilo zjistit pouze hmotnost. Naštěstí je možné na Wikipedii[4] tuto hustotu dohledat. Podle této stránky je průměrná hustota lidského těla po vydechnutí $1\,025\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Toto číslo musíme však brát s rezervou, protože by to měl být průměr a individuální hustota se bude u různých lidí lišit v závislosti na poměru objemu kostí (jejichž hustota je podle stejné stránky $1\,700$ až $2\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$), tuku ($940\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$) a jiných částí těla, které mají různou hustotu. Vzhledem k těmto variacím odhadneme nejistotu této hustoty na $4{,}0\,\%$

$$\varrho = (945 \pm 38)\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}\,.$$

Nyní se stačí zvážit na klasické lidské váze. Podle ní je naše hmotnost

$$m = (69{,}1 \pm 0{,}3)\ \mathrm{kg}\,,$$

kde byla nejistota odhadnuta jako $0{,}3\,\mathrm{kg}$. Displej sice zobrazuje hmotnost s přesností na desetiny kg, ale byla zvolena větší nejistota vzhledem k tomu, že to je obyčejná osobní váha, jejíž výrobci ani nespecifikovali třídu přesnosti.

Z těchto údajů již lze dopočítat objem

$$V = \frac{m}{\varrho} = (73{,}1 \pm 2{,}9)\ \mathrm{l}\,,$$

kde jsme $\mathrm{m^3}$ rovnou převedli na litry a nejistotu jsme vypočítali podle Gaussova zákona šíření nejistot jako

$$\sigma_V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial m}\sigma_m\right)^2 + \left(\frac{\partial \varrho}{\partial V}\sigma_\varrho\right)^2} = V\sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\varrho}{\varrho}\right)^2}\,.$$

[4] `http://www.wikina.cz/a/Hustota#.C4.8Clov.C4.9Bk`

Měření ponořením do kapaliny

Klasická a asi i poměrně snadná metoda měření objemu pevných těles je pomocí ponoření do kapaliny a změření objemu kapaliny, kterou těleso vytlačí. V případě, kdy tělesem je lidské tělo, je však problém najít dostatečně velký odměrný válec. Proto byla použita vana. Ta však nemá stupnici, na které by bylo možné odečíst, kolik je ve vaně vody. Místo toho je možné použít jako referenční výšku hladiny polohu horní výpusti, která bývá ve vanách, aby zabraňovala přetečení. To však umožňuje měřit pouze jednu výšku, a tak měření bylo provedeno následujícím způsobem:

1. napustíme vanu dostatečným množstvím vody,
2. postupně ponořujeme tělo, přebytečná voda začne odtékat horní výpustí a stabilizuje tak výšku hladiny při dalším ponořování,
3. když je celé tělo[5] pod hladinou, počkáme chvíli, než všechna přebytečná voda odteče,
4. vyjmeme tělo z vany a dopustíme tolik vody, abychom hladinu dostali přesně na úroveň výpusti,
5. při dolévání měříme objem dolité vody.

Voda byla dolévána 5 l konví s ryskami, díky čemuž se dal snadno změřit objem dolité vody. Když se hladina blížila k výpusti, byl pro přesnější dolévání použit odměrný válec. Správnost rysek konve byla ověřena pomocí odměrného válce a při tomto hrubém ověření byla odhadnuta její nejistota na 5 %. Celkem bylo potřeba do vany vylít 14 konví a následně ještě 1,5 l vody pomocí odměrného válce. Celkový objem naměřený touto metodou tedy je

$$V = (72 \pm 4)\ \mathrm{l}\,.$$

Kapičky vody, které zůstaly na těle po výlezu z vany, zanedbáváme.

Diskuze výsledků

Výsledky z posledních dvou měření se v rámci nejistoty dobře shodují, zatímco výsledek získaný geometrickým postupem se od nich liší. Lze tedy usuzovat, že náš geometrický model těla není příliš přesný. A zároveň, že průměrná hustota lidského těla je v rámci nejistot dostatečně podobná té naší.

Tab. 6: Porovnání výsledků

postup	výsledek
geometricky	(66 ± 3) l
hmotnostně	(73 ± 3) l
ponořením	(72 ± 4) l

Poznámky k došlým řešením

V mnoha řešeních se opakovaly ty samé chyby, proto jsme se rozhodli, že se zde o nich pořádně rozepíšeme. Ve svých opravených řešeních je můžete najít pod čísly 1 až 7. Jenom pro upřesnění, při bodování jsme se neřídili těmito chybami, ale posuzovali jsme každé řešení individuálně. Uvedená čísla tak slouží především pro vás jako přehled toho, co zlepšit.

[5] Až na nos kvůli dýchání.

1. **Chyby měření vstupních veličin.** Měření nemá žádnou vypovídající hodnotu, pokud není stanovena jeho nejistota. O tom, jak určit chybu měření, už byla napsána spousta textů, například seriál XXX. ročníku FYKOSu nebo díl o zpracování měření z Knihovničky Fyzikální olympiády.
   Chtěli bychom zdůraznit, že existuje více druhů chyb – statistické (vyplývající z náhodnosti procesu) a systematické (způsobené například nedokonalostí měřidla nebo nevhodným postupem). Při měření musíme vzít v úvahu oba druhy, výsledná chyba je typicky kvadratickým součtem té statistické a systematické.
   Konkrétně v tomto experimentu bylo určení nejistot velmi obtížné. V takovém případě je nutné je alespoň odhadnout, popřípadě zdůvodnit, proč je můžeme zanedbat.
2. **Chyby měření výsledných veličin.** Tento bod se zabývá přenosem chyby od veličin měřených přímo až po ty, které z nich spočítáme. Problematika je opět dostatečně dobře popsána ve výše zmíněných textech, na tomto místě pouze připomeneme univerzální vzorec šíření nejistot. Nechť $f(a_1, a_2, \ldots a_n)$ je výsledná veličina a a_i jsou její proměnné, jejichž hodnoty jsme změřili. Pokud známe jejich chyby u_{a_i} (bod 1.), dokážeme spočítat chybu f podle vztahu
$$u_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a_1} u_{a_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial a_2} u_{a_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial a_n} u_{a_n}\right)^2}\,.$$
3. **Diskuze výsledků a chyb.** Nedílnou součástí každého experimentu je diskuze, ve které hodnotíme naše výsledky a přemýšlíme, kde jsme se dopustili nejzávažnějších chyb (bod 2.). Už jen zamyšlení se nad tím, jestli jsme naměřili rozumné hodnoty, má velký smysl. Dále je zvykem porovnat výsledky s teoretickou předpovědí nebo (jako v tomto případě) s hodnotami z jiných způsobů měření. Nakonec můžeme zmínit, jak by se dal náš experiment vylepšit a co bychom příště měli udělat jinak, abychom dostali přesnější výsledky.
4. **Průměrování výsledných hodnot z různých způsobů měření.** Dostaneme-li pomocí různých experimentálních postupů různé hodnoty, nemá smysl je na konci průměrovat. Každý způsob byl pravděpodobně zatížen jinak velkou chybou (bod 2.), a proto aritmetický průměr nemá žádnou vypovídající hodnotu. Teoreticky by ještě mohlo mít smysl spočítat něco jako vážený průměr, kde bychom vzali v úvahu nejistoty jednotlivých výsledků.
   Místo toho je daleko lepší srovnat výsledné hodnoty v diskuzi (bod 3.) – hned můžeme rozebrat, proč se liší a co nám to říká o měřené veličině.
5. **Archimédův zákon.** *Těleso ponořené do kapaliny je nadlehčováno silou, která se rovná tíze kapaliny tělesem vytlačené.* Všimněme si, že tento zákon neříká nic o tom, že ponořením se do vody vytlačíme množství vody rovnající se našemu objemu. Toto tvrzení je důsledkem nestlačitelnosti (ideální) kapaliny, což vyplývá z rovnice kontinuity.
   Archimédův zákon hovoří o silách, které působí na ponořená tělesa. K řešení úlohy ho bylo možné použít například tak, že bychom měřili, jak hmotné závaží potřebujeme k tomu, abychom se volně vznášeli ve vodě. Ačkoli to několik řešitelů navrhovalo, žádný to prakticky nezkusil.
6. **Objem plic.** V některých případech je hodnota měřené veličiny ovlivněna celou řadou okolností. Rozdíl mezi nadechnutím a vydechnutím je řádově několik litrů, což už rozhodně není zanedbatelné. Správným přístupem bylo si na začátku měření stanovit, jestli budeme měřit s maximálním nádechem nebo výdechem.

Mnozí řešitelé sice uvedli rozdílné hustoty, které pro jednotlivé případy nalezli (bod 7.), ale u jiných způsobů měření už mezi nádechem a výdechem nerozlišovali.

7. **Zdroje a snadno vyhledatelné hodnoty.** Průměrná hustota lidí je jistě mnohokrát změřená veličina, kterou jednoduše najdeme na internetu. Není proto potřeba odhadovat ji hustotou vody. Pokud máme dobrý důvod věřit, že jsme jinak hustí než většina populace, potom dává smysl tabulkovou hodnotu nepoužít, ale je to potřeba dostatečně zdůvodnit. V každém případě ale musíme uvést zdroj, kde jsme danou hodnotu našli. Není nutné odkazovat na všechny fyzikální konstanty, které používáme, protože jsou typicky všude stejné na dostatečný počet platných cifer. Ale hustota lidí se může podle různých zdrojů nezanedbatelně lišit, a proto je potřeba zmínit, odkud naše hodnota pochází.

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.